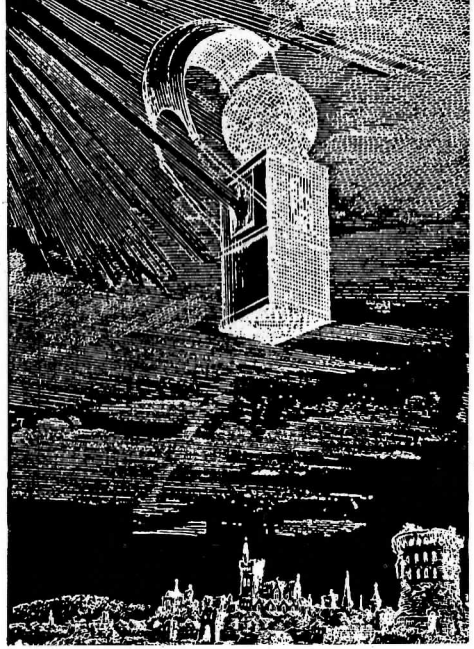
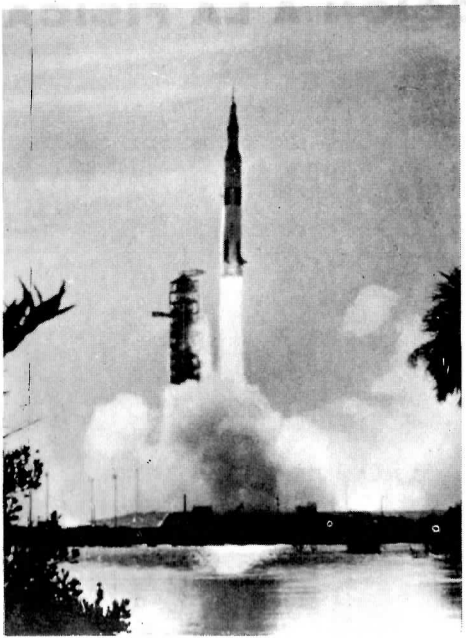


INTRODUCCIÓN



1

A LA FÍSICA

ALBERTO P. MAIZTEGUI

PROFESOR DE FÍSICA Y DE MATEMATICA
doctor en ciencias fisicomatematicas

JORGE A. SABATO

PROFESOR DE FÍSICA

EDITORIAL
KAPELUSZ
Moreno 372 · Buenos Aires

EDICIÓN CON ÍNDICE TEMÁTICO

Están prohibidas y penadas por la ley la reproducción y la difusión totales o parciales de esta obra, en cualquier forma, por medios mecánicos o electrónicos, inclusive por fotocopia, grabación magnetofónica y cualquier otro sistema de almacenamiento de información, sin el previo consentimiento escrito del editor.

Todos los derechos reservados por (©. 1951)
EDITORIAL KAPELUSZ S.A., Buenos Aires. Argentina.

Hecho el depósito que establece la ley 11.723.

LIBRO DE EDICION ARGENTINA.

Décima edición, febrero de 1974.

ISBN 950-13-2025-1

IMPRESO EN ARGENTINA. Printed in Argentina.

ÍNDICE

Pág.

Introducción 1

¿Qué es la física? 1
El mundo maravilloso de la física 3
Las mediciones en física 5

I Hidrostática

LOS LÍQUIDOS EN EQUILIBRIO

1 Fuerza y presión 10

Fuerza 10
¿Qué es el peso? 11
Medición de fuerzas 12
Magnitudes vectoriales 14
Magnitudes escalares 15
Peso específico 15
Presión 15
Efectos de la presión 17
Diferencia entre fuerza y presión 18
Problemas 18

2 El principio de Pascal 20

Aplicaciones: la prensa hidráulica 21
Lo que se gana en fuerza se pierde en recorrido 22
Problemas 23

3 Presión hidrostática 24

La presión en el interior 24
La presión contra la pared 26
Superficies de igual presión 26
Valor de la presión 27
Significado de la fórmula $p = h\varrho$ 28
Vasos comunicantes con un solo líquido 28
Vasos comunicantes con dos líquidos 28
La paradoja hidrostática 29
Ley fundamental de la hidrostática 30
Problemas 31

4 El principio de Arquímedes 33

¡Eureka!... ¡Eureka! 33
El empuje hacia arriba 34
Pesos específicos 38
Preguntas 41
Problemas 42

II Neumostática

LOS GASES EN REPOSO

Pág.

5 La presión atmosférica 45
¿Pesan los gases? 45
Presión atmosférica 46
La atmósfera 55
Los fluidos 57
La conquista de la atmósfera 59
Preguntas 61
Problemas 62

6 Compresión y expansión de los gases 63
Presión y volumen 63
Ley de Boyle-Mariotte 63
Cómo se mide una presión 66
El peso específico varía con la presión 69
Compresores 70
El vacío 70
Problemas 72

III Cinemática

CÓMO SE MUEVEN LOS CUERPOS

7 El concepto de movimiento 75
Definición de movimiento 80
Trayectoria 80
Movimiento de traslación 81
Movimiento de rotación 81

8 Movimiento rectilíneo uniforme 82
Velocidad 82
Cambio de unidades 83
Significado físico de la velocidad 83
Características del movimiento rectilíneo uniforme 84
Representación gráfica de la distancia en función del tiempo 85
Representación gráfica de la velocidad en función del tiempo 87
La velocidad es una magnitud vectorial 90
Problemas 91

9 Movimiento rectilíneo uniformemente variado 93
Movimiento variado 93
Representación gráfica de la velocidad en el movimiento variado 93
Movimiento uniformemente variado 93
Distancia *d* recorrida en un tiempo *t* 98
Representación gráfica de la distancia 99

Pág.

Velocidad instantánea 101
Características de un movimiento uniformemente variado 102
Problemas 102

10 Caída de los cuerpos 104

El problema de la caída 104
Razonamiento de Galileo 106
Experiencia de Galileo 106
¿Qué tipo de movimiento es el de caída? 107
Aceleración de la gravedad 108
Fórmula de la caída de los cuerpos 109
Galileo Galilei 112
Problemas 113

11 Movimientos compuestos 115

Movimiento + movimiento + movimiento 115
Principio de la independencia de los movimientos 118
La velocidad, magnitud vectorial 119
La aceleración, magnitud vectorial 120
Composición de velocidades 120
¿Qué pasa cuando hay más de dos velocidades? 123
Descomposición de una velocidad 124
El problema del tiro 125
Problemas 129

12 Movimiento circular 130

Movimiento circular uniforme (M. C. U.) 130
Período 130
Dos velocidades 131
Frecuencia 136
La aceleración centrípeta 136
Movimiento circular variado 138
Movimiento circular uniformemente variado 138
Significado físico de la aceleración angular 139
Problemas 142

IV Dinámica

13 El principio de inercia 143

La inercia 143
Las fuerzas y el movimiento 146
Sir Isaac Newton 149
Algunas sencillas experiencias para comprobar la inercia ... 149

14 El principio de masa 150

El concepto de masa 150
No confundamos masa con peso 154
El principio de masa 156

Pág.

Definición general de masa 158
Cálculo de fuerzas 158
El empleo de distintas unidades 160
Los sistemas de unidades 162
Densidad 163
Problemas 165

15 El principio de acción y reacción 166

Impulso y cantidad de movimiento 171
Composición de cantidades de movimiento 173
Las fuerzas centrípeta y centrífuga 175
Problemas 179

16 Dinámica de las rotaciones 180

¿Quién produce las rotaciones? 180
Cupla 180
La inercia en las rotaciones 183
Cálculo de momentos de inercia 187
Analogías entre traslación y rotación 194
Los principios de la dinámica 195
Relatividad 199
Problemas 212

17 Estática 213

¿Qué es la estática? 213
Sistema de fuerzas o de cuplas 213
Vectores con la misma recta de acción y sentidos opuestos .. 215
Vectores con la misma recta de acción y el mismo sentido .. 217
Vectores concurrentes 218
Descomposición de una fuerza en otras dos direcciones dadas 222
Composición de fuerzas paralelas y del mismo sentido 224
Fuerzas paralelas de sentidos contrarios 228
Los cuerpos deformables: la ley de Hooke 232
Problemas 233

18 Movimiento oscilatorio 235

Movimiento del péndulo 235
Leyes del péndulo 237
La fórmula del movimiento pendular 241
Aplicaciones del péndulo 242
Movimiento oscilatorio armónico 244
Movimiento circular uniforme y movimiento armónico 244
Problemas 250

19 Gravitación universal 251

Un viaje por el sistema planetario 251
La aceleración de la gravedad debida a los demás astros ... 253
Cómo depende de la distancia 253

Pág.

Cómo depende la aceleración de la gravedad de la masa del cuerpo que la produce 254
La constante de la gravitación universal 256
La ley de la gravitación universal 257
Medición experimental de la constante de la gravitación 257
¿Por qué no cae la Luna sobre la Tierra? 258
¿Con qué fuerza la Tierra atrae a la Luna? 258
Cómo se descubrió la existencia de un planeta sin necesidad del telescopio 261
Cómo se mueven los planetas 261
Problemas 265

V La energía

20 Trabajo, potencia y energía 267

El hombre y la máquina 267
Trabajo mecánico 268
El kilográmetro, unidad de trabajo 268
Otras unidades de trabajo 270
Equivalencia de unidades 270
Idea del Joule 271
Idea del Erg 271
Potencia 271
El kilográmetro/segundo, unidad de potencia 271
Otras unidades de potencia 272
Pasaje de unidades 273
El kilowatt-hora 273
Energía 274
Energía cinética y energía potencial 274
Cómo se expresa la energía de un cuerpo 275
Las fórmulas de la energía 275
El trabajo en las rotaciones 278
Energía cinética de rotación 278
Unidades de trabajo y energía 279
Unidades de potencia 280
Problemas 280

21 Las máquinas simples 283

Palanca 283
Convención 284
Arquímides y la palanca 285
Multiplicación de la palanca 285
Palanca pesada 286
Géneros de palancas 287
El trabajo realizado con palanca 288
Movimiento de la palanca 288
Balanzas 289

Pág.

Torno ... 290
Multiplicación del torno ... 291
Trabajo con torno ... 291
Engranajes ... 291
Multiplicación del engranaje ... 292
Polea fija ... 292
Multiplicación de la polea fija ... 293
Polea móvil ... 293
Multiplicación de la polea móvil ... 294
El trabajo realizado con polea móvil ... 294
Combinaciones de poleas. Aparejo potencial ... 295
Multiplicación del aparejo potencial ... 295
Trabajo realizado con aparejo potencial ... 296
Plano inclinado ... 296
Multiplicación del plano inclinado ... 297
Trabajo con plano inclinado ... 297
Traslación y rotación combinadas ... 298
El trabajo hecho con máquinas ... 298
Problemas ... 299

22 La conservación de la energía ... 301

El movimiento continuo ... 301
El juego de la energía en el péndulo ... 304
El rendimiento de una máquina ... 307
El rozamiento ... 307
Problemas ... 309

VI Dinámica de los fluidos

23 Dinámica de los fluidos ... 311

Dos sorpresas ... 311
Caudal de una corriente ... 312
Relación entre la velocidad y la sección ... 312
¿Qué indica un manómetro en una cañería? ... 313
Presión hidrodinámica ... 314
El experimento de Banki ... 315
Los vaporizadores ... 316
Velocímetro de los fluidos ... 316
La ley fundamental de la hidrodinámica: El teorema de Bernouilli ... 317
Viscosidad ... 319
Tensión superficial y capilaridad ... 319
La validez de la hidrostática ... 319
La "membrana" superficial ... 321
Tensión superficial ... 321
Capilaridad ... 325
Problemas ... 327

Pág.

24 Por qué vuela un avión 329

Las fuerzas que actúan en el vuelo de un avión 333
Fuerza sustentadora 333
Resistencia al avance 334
Fuerza impulsora 334
El vuelo supersónico 335
El número de Mach 337
El primer vuelo supersónico 337

VII El calor

25 Termometría 339

Temperatura 339
Efectos del calor 340
Termómetro de mercurio 342
La escala absoluta o de lord Kelvin 345
Problemas 347

26 Dilatación de los cuerpos 348

Dilatación de los sólidos 348
Dilatación lineal 348
La fórmula de la dilatación 350
Variación del peso específico con la temperatura 352
Dilatación de los líquidos 352
Dilatación aparente 352
Dilatación verdadera 352
Dilatación de los gases 354
Dilatación a presión constante 354
"Dilatación" a volumen constante 355
El cero absoluto 356
Las leyes de Gay-Lussac 357
Ecuación de los gases 359
La ecuación general de estado de los gases 361
Problemas 362

27 Calorimetría 364

La caloría 364
Calor específico 365
Cantidad de calor 367
Temperatura final de una mezcla 368
Medición del calor específico 369
El calorímetro de las mezclas 369
Los calores específicos de los gases 370
Problemas 372

28 Transmisión del calor 373

Formas de transmisión 373

Pág.

Transmisión por convección 373
Transmisión por conducción 374
Transmisión por radiación 378
Problemas 382

29 Naturaleza del calor 383

Calor y trabajo mecánico 383
Trabajo necesario para producir una determinada cantidad de calor 384
Conservación de la energía 386
¿Qué es el calor? 386
Problemas 388

30 Los cambios de estado 389

Fusión y solidificación 389
El calor de fusión 390
Vaporización (evaporación y ebullición) y condensación 394
La evaporación 394
La ebullición 395
La evaporación. La presión de los vapores 395
Variación de la presión de saturación con la temperatura 397
Presiones de saturación del vapor de agua 397
Temperatura y presión críticas de algunas sustancias 399
Vapor saturado en presencia de otro gas 400
Temperaturas de ebullición 400
Temperaturas de ebullición de algunas sustancias a 760 mm Hg 400
Temperatura de ebullición del agua a distintas presiones exteriores 401
Presión exterior y vaporización 402
Las leyes de la ebullición 404
Calor de vaporización 405
Calor de vaporización de algunas sustancias (en cal/g) 406
Humedad relativa o estado higrométrico 407
Sublimación y volatilización 409
Curva de equilibrio del sólido con su vapor 410
El punto triple 410
Diferencia entre vapor y gas 410
Líquido y vapor en el punto crítico 412
Problemas 415

31 El primer principio de la termodinámica 416

Trabajo realizado por un gas 416
Representación gráfica de un proceso isobárico 417
Problemas 424

32 Las máquinas térmicas 425

Idea básica de la máquina de vapor 425

Lo que pasa con la energía calórica 427
Representación gráfica de los cuatro tiempos 427
Rendimiento 428
Limitación del rendimiento 429
El motor de explosión 433
El ciclo del motor de explosión 434
Rendimiento 436
El motor Diésel 437
Funcionamiento del Diésel 438
Representación del ciclo 438
Rendimiento 440
Turbinas 440
La turbina de vapor 440
Turbina de gas 441
Rendimiento 443
Refrigeradoras 445

33 El segundo principio de la termodinámica 447
El ciclo perfecto 448
Consecuencias 450

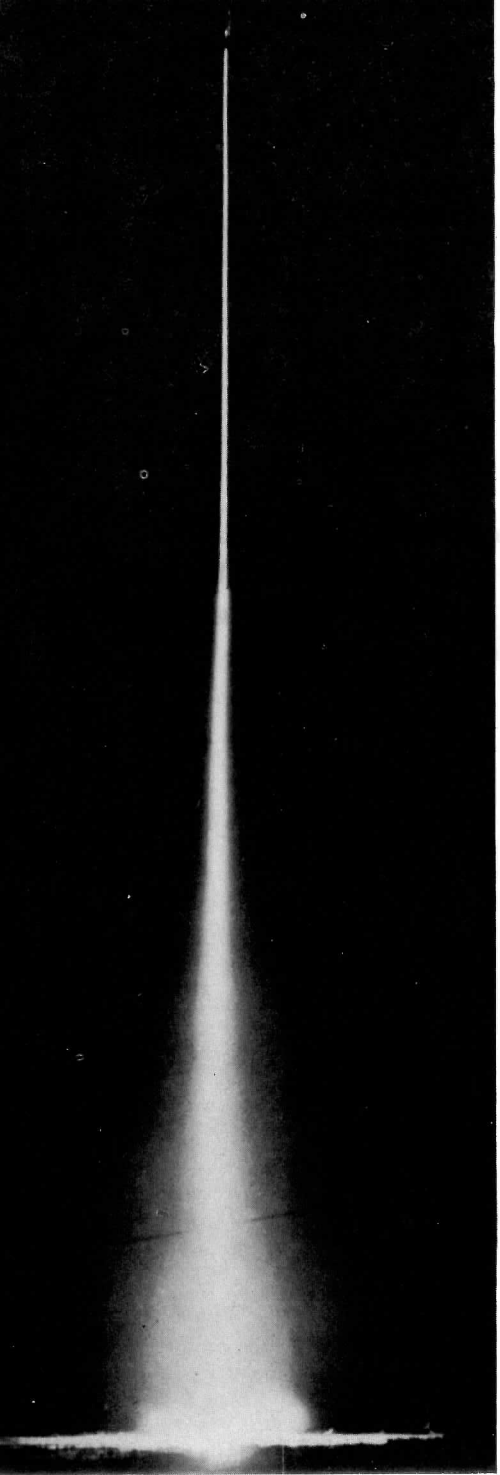
VIII Acústica

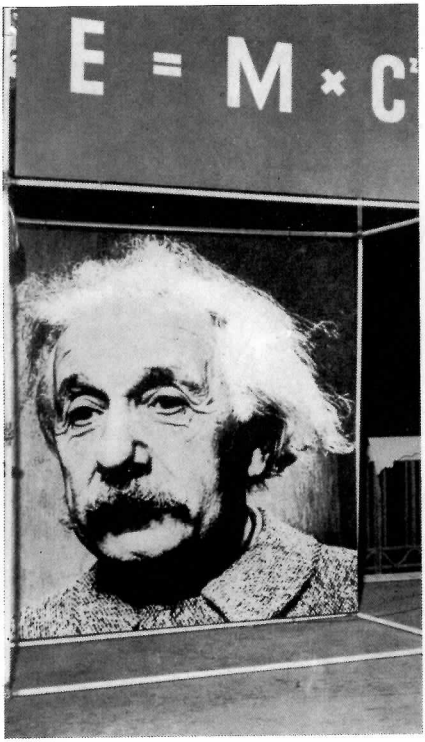
34 El sonido 452

¿Qué es el sonido? 452
Velocidad de propagación 454
Característica de un sonido 455
Resonancia 458
Reflexión del sonido 459

"La Ciencia es una de las grandes aventuras de la raza humana, tan fantástica y exigente como los cuentos de héroes y dioses, naciones y estados, historiadores y poetas. Ésa es mi convicción, y pienso que la Ciencia podría y debería ser enseñada de manera tal que se transmita una sospecha de ese espíritu a la mente del joven."

MAX BORN.

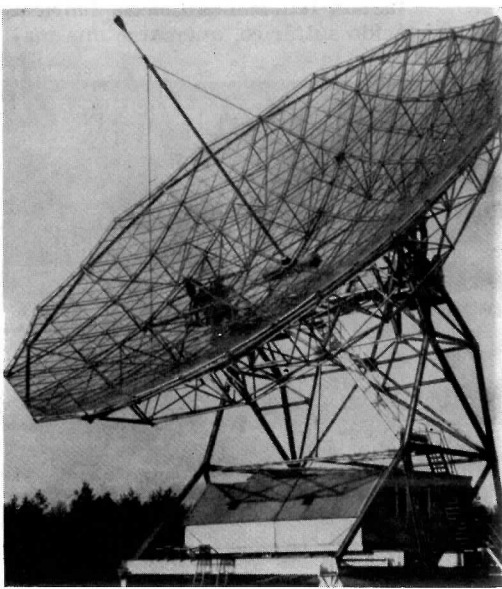



E = M × C

INTRODUCCIÓN

¿Qué es la física?

Esta pregunta es muy fácil o muy difícil de responder, dependiendo esto de nuestras exigencias. Si no pretendemos dar una definición rigurosa y completa, la respuesta es bastante simple, pues todos tenemos una idea, aunque sea vaga y difusa, de lo que es la física. Todos sabemos que tiene que



La física, aventura del pensamiento . . . Con un radiotelescopio semejante a éste actualmente se intenta saber si hay vida inteligente en planetas de otros sistemas solares.

ver con palancas, planos inclinados, poleas, Galileo, la bomba atómica, los esposos Curie, la caída de los cuerpos, etc.

Pero si se nos pide una definición rigurosa, eso es ya más difícil y nos llevaría a problemas filosóficos que no tienen cabida en este libro.

Podemos preguntarnos, sin embargo, si no será posible dar una definición de la física alejada de ambos extremos; una definición, en fin, satisfactoria para los fines de este curso.

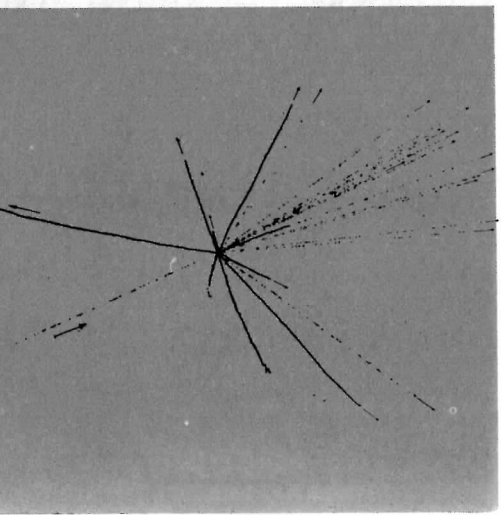
En otra época los textos comenzaban con definiciones terminantes: "La física se ocupa de los fenómenos físicos. Fenómenos físicos son aquellos que no modifican la estructura íntima de la materia, a diferencia de los fenómenos químicos, que se caracterizan, precisamente, por modificarla".

En parte, esto es cierto, porque la caída de un cuerpo, dar cuerda a un reloj, calentar agua para el mate, dar un puntapié a una pelota, son fenómenos físicos; fabricar ácido sulfúrico, quemarse una mano con ácido, la oxidación de un cuchillo, son fenómenos químicos. Pero hablando con propiedad, no hay diferencia esencial entre fenómenos físicos y fenómenos químicos, y la separación entre la física y la química se debe más bien a causas secundarias que profundas. La química estudia combinaciones entre moléculas y entre átomos, pero, ¿acaso las moléculas y los átomos no forman parte del mundo de la física? ¿Qué modificación más profunda de la estructura de la materia que la desintegración atómica? Y, sin embargo, es un fenómeno físico.

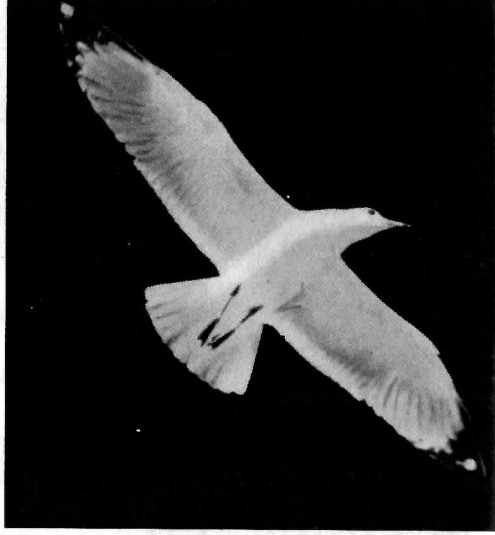
Por esto, en lugar de aquellas definiciones, daremos algunas proposiciones, tal vez menos elegantes, pero seguramente más accesibles. *La física es la ciencia de la cual se va a ocupar este libro*; si lo estudia detenidamente, el alumno llegará a saber con bastante precisión, qué es y qué no es física.

El universo en que nos movemos está constituido por *cuerpos*: árboles, sillas, animales, piedras, etc.; estos cuerpos pueden ser sólidos, líquidos o gaseosos; todos los cuerpos ocupan un *lugar* en el espacio.

Los cuerpos están formados por *materia*: el aceite es una materia, y también el aire. En cambio, la



Fenómeno físico acompañado de una profunda alteración de la materia. La microfotografía muestra qué sucedió dentro de una placa fotográfica expuesta a los rayos cósmicos, a 6 000 m de altura en la cordillera de los Andes. Uno de ellos chocó con el núcleo de un átomo de plata de la emulsión de la placa rompiéndolo en pedazos. Al revelar la placa quedaron señaladas las trayectorias de todas las partículas, y las ramas más oscuras son las trayectorias de los fragmentos en que se desintegró el núcleo. (Gentileza de Ema Pérez Ferreira, Comisión Nacional de Energía Atómica.)



Las leyes de la física gobiernan el delicado vuelo del pájaro . . .

idea de justicia no está constituida por materia: es algo *inmaterial*. Las *ideas* son inmateriales: la bondad, la blancura, la verdad, la belleza.

El mundo maravilloso de la física

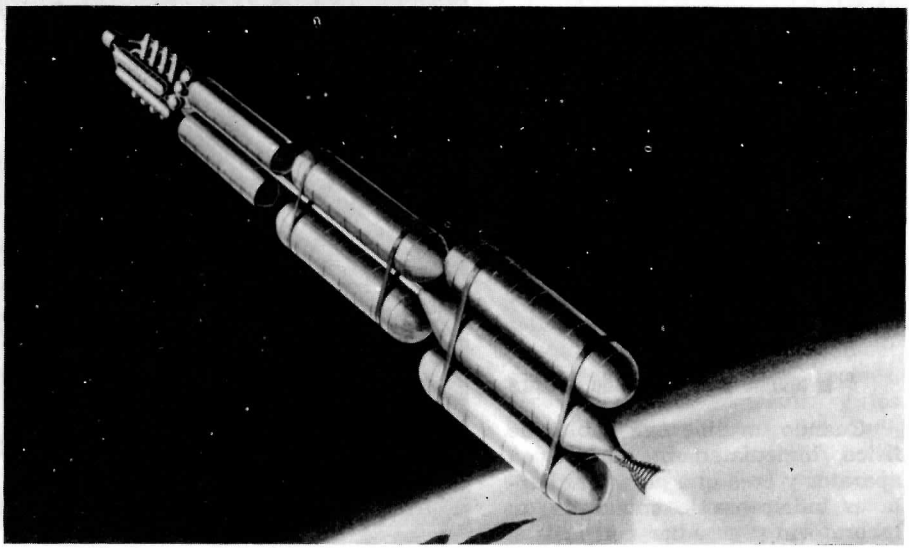
Cuando un niño oye hablar de física, inmediatamente piensa en aparatos y cree que para estudiarla es indispensable entrar en un laboratorio y estudiar con instrumentos complicados, con muchos tornillos de precisión y ruedas doradas.

Por eso no es cierto, o por lo menos no es enteramente cierto.

Sin duda, para estudiar física a fondo es necesario ayudarse de delicados aparatos de medida u observación. No debemos olvidar, sin embargo, que el mundo de la física nos rodea por completo: está en la casa, en el tranvía, en el tren, en el ascensor, en los aparatos de radiotelefonía, en el cinematógrafo . . .

Hacemos física cuando llegamos a comprender que al caminar, por ejemplo, a cada paso que damos la Tierra retrocede (capítulo XV, tomo I); cuando hacemos una experiencia en la que el agua hierve . . . hasta congelarse

. . . la magnífica estirada del guardameta de fútbol . . .



. . . y los fabulosos vehículos cósmicos de hoy y del mañana, destinados a explorar los espacios siderales y a transportar hombres y equipos.

(cap. XXX, tomo I); cuando entendemos cómo es posible que vuele un avión... siendo más pesado que el aire (cap. XXIV, tomo I); cuando descubrimos que luz más luz... oscuridad (cap. IX, tomo II); cuando aplicamos las leyes del choque para lograr una impecable carambola a tres bandas (cap. XV, tomo I); cuando descubrimos que la Tierra se comporta como un gigantesco imán (cap. XI, tomo II).

Las leyes de la física gobiernan las cosas más modestas, como el movimiento de una puerta (cap. XVI, tomo I), y las más cotidianas, como el funcionamiento de una tijera (cap. XXI, tomo I), y las más tremendas, como la bomba atómica (cap. XXXV, tomo II), y las más misteriosas, como los rayos cósmicos (cap. XXXIV, tomo II), y las más fantásticas, como los satélites artificiales (cap. XIX, tomo I), y las más triviales, como la reflexión en un espejo (cap. III, tomo II), y las más concretas, como el funcionamiento del motor de un automóvil (cap. XXXII, tomo I), y las más abstractas, como la naturaleza del calor (cap. XXIX, tomo I).

El incansable tic tac del reloj, el frío controlable de la heladera, la comodidad del teléfono, la magia de la televisión, el calor acogedor de la estufa, el suave deslizar de una pluma fuente, el estruendo de un aparato de radio, el dulce rasguido de la guitarra, el funcionamiento de la bombilla del mate, la inapreciable ayuda de los anteojos, el confort del aparato de aire acondicionado, la eficacia de las computadoras, el cine, la fotografía, los transistores, los transformadores, las turbinas, los barriletes, los trompos, las brújulas, el telégrafo, los dirigibles, los submarinos, los tubos fluorescentes, los radiotelescopios... ¿Para qué seguir? Todos ellos funcionan de acuerdo con las leyes de la física.

Dispongámonos, pues, a ver fí-

sica en todas partes, y a buscar las leyes fundamentales en los acontecimientos más comunes. Así procedió Newton: estaba recostado bajo un manzano, meditando, cuando la caída de un fruto le llevó a descubrir una de las leyes más grandes de toda la historia de la ciencia; sea o no verdadera la anécdota, hay algo que es profundamente cierto: todos los grandes hombres de ciencia se han caracterizado por extraer notables conclusiones de los hechos más sencillos; no es siempre el instrumento perfeccionado de un laboratorio lo que los ha llevado a los grandes descubrimientos, sino su aptitud para observar y reflexionar sobre lo que se ve.

Arquímedes descubrió la ley del empuje mientras se bañaba; Galileo, una de las leyes del péndulo viendo oscilar una lámpara en una catedral; Meyer, el principio de la conservación de la energía (ley fundamental de toda la física) en el momento de practicar una sangría a un marinero. Y Meyer no era físico, sino médico...

No olvidemos estos ejemplos ilustrativos, que podríamos multiplicar, y no digamos jamás que "no podemos estudiar bien la física porque nuestro laboratorio es pobre". Por el contrario, un laboratorio pobre puede ser una excelente oportunidad para desarrollar el ingenio, el espíritu de observación y la capacidad de construcción, que han sido siempre preciosos atributos del hombre de ciencia.

Sepamos, pues, aprender física al mirar el tranvía, al observar lo que ocurre en el interior de un ascensor, improvisando un péndulo con una piedra, y un reloj con el pulso, construyendo un galvanómetro con el imán de algún Ford viejo y algunos alambres de cobre. Y así aprenderemos más física y más a fondo que observando desde el banco el deslumbrante aparato venido de fábrica.

Muchas leyes fundamentales de la física se han obtenido sin aparatos complicados. De Newton se cuenta que tuvo la idea de la ley de la gravitación al ver caer una manzana.

Un famoso personaje de teatro creía que prosa era lo que escribían los escritores, y no eso tan trivial que todos hacemos todos los días. Y quedó muy halagado cuando se enteró de que él también era prosista.

Del mismo modo, no creamos que física es sólo lo que se hace con esos deslumbrantes aparatos, sino algo que realizamos cotidianamente, al caminar, al trabajar: *todos somos un poco físicos, sin saberlo.* Para serlo mejor, basta una condición: saber observar y preguntarse ante cada hecho que se observa: ¿cómo? y ¿por qué?

Las mediciones en física

Algo fundamental: medir

Las ciencias llamadas exactas

(la física, la química, la astronomía) se basan en la *medición*. Es su característica.

En otras ciencias, en cambio, lo principal es la *descripción* y la *clasificación*. Así, la zoología describe y clasifica los animales, y establece "casilleros" para los mamíferos, los vertebrados, etc.

Como sin mediciones no puede irse muy lejos en el estudio de la física, conviene que sepamos algo, desde ahora, acerca de medidas y mediciones.

Todos sabemos, más o menos, qué es medir y qué es una medida. Un almacenero no puede realizar su comercio si no mide. Con una balanza mide la cantidad de harina o de porotos pedida. Un tendero, con el metro, mide la cantidad de tela que le solicitan. En una fábrica, con un reloj miden el tiempo que trabajan los obreros.

De estos ejemplos podemos extraer varias conclusiones:

1) Hay diferentes cosas que pueden medirse: el almacenero mide *pesos*; el tendero, *longitudes*; el fabricante, *tiempos*. También pueden medirse *volúmenes*, *superficies*, *temperaturas*, etc.

Todo aquello que puede medirse se llama *magnitud*; así, el peso, la longitud, el tiempo, el volumen, la temperatura, son *magnitudes*.

En cambio, puesto que no pueden medirse, no son magnitudes la verdad o la alegría.

2) Las magnitudes son de diferente naturaleza o especie: no es lo mismo una longitud que un peso.

3) *Medir es comparar* una cantidad de una magnitud cualquiera con otra cantidad de la misma magnitud, a la cual se toma como *unidad*.

Carecería de sentido intentar medir una cantidad de una magnitud con una unidad de otra magnitud. Nadie, a menos que esté loco, pretenderá medir la extensión de un terreno en kilogramos, o la longitud de una calle en litros.

4) La física no trabaja con números abstractos. Lo fundamental es medir, y el resultado de la medición es un número y el nombre de la unidad que se empleó. De modo, pues, que cada cantidad queda expresada por una parte numérica y otra literal. Ejemplos: 4 m; 30 km/h; 8 h. Son, pues, números concretos.

5) Con las unidades se opera como si se tratara de números. Así:

$$\text{km} : \text{h} = \frac{\text{km}}{\text{h}} ; \frac{\text{m}}{\text{s}} : \text{s} = \\ = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} ; \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \text{h} = \text{km}$$

Como ejemplo, véanse los problemas de las páginas 18 y 19.

Las tres magnitudes básicas de la física

Toda la física es un gran edificio, en cuya base, como cimientos, encontramos tres magnitudes: el *tiempo*, la *fuerza* y la *longitud*.

UNIDAD DE TIEMPO. Es el segundo, que es una 86 400 ava parte de 1 día solar medio.

UNIDAD DE FUERZA. Es el kilogramo-fuerza, que es el peso del kilogramo patrón, pesa depositada en los Archivos de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia.

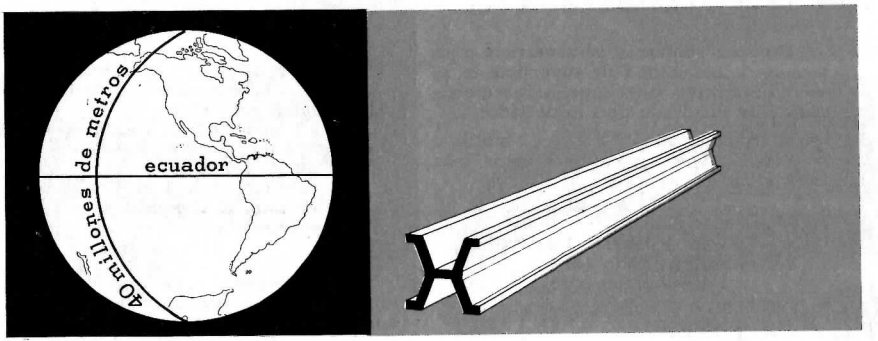
UNIDAD DE LONGITUD. Durante veinte siglos, por lo menos, hubo una gran anarquía respecto a la unidad de longitud. Cada pueblo tenía la suya, y a veces, aun en un mismo país había disputas sobre el largo que debía asignarse al pie o a la pulgada.

La Revolución Francesa, iniciada en 1789 con la toma de la Bastilla, resolvió unificar razonablemente las diferentes unidades de longitud. La Asamblea Nacional nombró una comisión, con el fin de que estudiase el problema de las unidades. Ésta procedió así: se imaginó dividido un meridiano terrestre en 40 millones de partes iguales, y se llamó *metro* a la longitud de cada trozo resultante. En otras palabras: se definió el metro como la cuarentamillonésima parte del meridiano terrestre, y se lo tomó como unidad para medir las longitudes. Hoy se lo usa en casi todas las naciones: el primer tratado internacional, "la Convención del Metro", fue firmado por 17 países el 20 de mayo de 1875. Luego se fueron agregando otros, entre ellos la Argentina, donde ya se usaba desde 1863. Se construyó una barra metálica de ese largo, el metro patrón, que se conserva en los Archivos de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia. Pero mediciones posteriores, realizadas con instrumentos más precisos y con mejores métodos, permitieron comprobar que la barra no era exactamente la cuarentamillonésima parte del meridiano. Había dos caminos: construir una barra patrón cada vez que se mejorara la medición del meridiano, o decir que el metro es la longitud de la barra que hay en Francia. Razones prácticas evidentes hicieron preferible el segundo.

1 metro es la longitud entre dos trazos marcados sobre una barra, llamada metro patrón, que está depositada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia.

La barra, como muestra la figura, tiene una forma especial, para evitar que se flexione; y como el calor dilata los cuerpos, con el fin

El metro patrón. Se pretendió construir una barra cuya longitud fuera exactamente la cuarenta millonésima parte de un meridiano terrestre.



de evitar que los cambios de temperatura modifiquen su longitud, se la ha construido con una aleación de 90 % de platino y 10 % de iridio.

Pero en 1960, nuevas exigencias de la precisión alcanzada por la tecnología han hecho que la barra metálica haya sido depuesta como patrón, y nuevamente se ha cambiado la definición de metro: 1 metro es igual a 1 650 763,73 longitudes de onda de la línea naranja del kriptón de masa atómica 86, cuando la lámpara emisora (de un tipo especial) está a 210°C bajo cero.

MÚLTIPLOS Y SUBMÚLTIPLOS DEL METRO.

Los más importantes son:

kilómetro (km) = 1 000 m
decímetro (dm) = 0,1 m
centímetro (cm) = 0,01 m
milímetro (mm) = 0,001 m
micrón (μ) = 0,000 001 m

Para longitudes muy pequeñas se usa el milimicrón, que es la milésima parte del micrón, o sea la millonésima del milímetro. En óptica se usa una unidad más pequeña aún: Angstrom, que es la décima parte del milimicrón, o sea una diezmillonésima del milímetro.

1 milimicrón (mμ)
= 0,000 001 mm
1 Angstrom (Å)
= 0,000 000 1 mm = 10^{-8} cm

UNIDADES DERIVADAS DE SUPERFICIE Y DE VOLUMEN. La unidad de superficie es el *metro cuadrado* (m^2), que es la superficie de un cuadrado de 1 m de lado:

1 metro cuadrado = 1 metro × 1 metro.

Los múltiplos y submúltiplos más importantes son:

kilómetro cuadrado (km^2)
= 1 km × 1 km = 1 000 000 m^2
decímetro cuadrado (dm^2)
= 1 dm × 1 dm = 0,01 m^2
centímetro cuadrado (cm^2)
= 1 cm × 1 cm = 0,000 1 m^2
milímetro cuadrado (mm^2)
= 1 mm × 1 mm = 0,000 001 m^2

La unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es el volumen de un cubo de 1 metro de arista.

1 metro cúbico

= 1 metro × 1 metro × 1 metro.

Los múltiplos y ubmúltiplos más importantes son:

kilómetro cúbico

= 1 km × 1 km × 1 km = 10^9 m^3
decímetro cúbico
= 1 dm × 1 dm × 1 dm = (1 litro)
centímetro cúbico
= 1 cm × 1 cm × 1 cm = (0,001 litro)
milímetro cúbico
= 1 mm × 1 mm × 1 mm = (0,000 001 litro)

Pasaje de una unidad a otra. Supongamos que se quiere saber cuán os decímetros cuadrados tiene 1 metro cuadrado; se procede así:

$$1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m$$

Puesto que cada metro tiene 10 decímetros, tendremos:

$$1\ m^2 = 10\ dm \times 10\ dm$$

10 por 10 da 100, y decímetro por decímetro da un decímetro cuadrado. Lue o:

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$

Calculando siempre así, encontramos las siguientes equivalencias:

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

REGLA: *Se pasa de una unidad de superficie a otra inmediatamente inferior multiplicando por 100.*

Procediendo de la misma manera, se encuentra que:

$$1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3$$
$$1\ dm^3 = 1\ 000\ cm^3$$
$$1\ cm^3 = 1\ 000\ mm^3$$

REGLA: *Se pasa de una unidad de volumen a otra inmediatamente inferior, multiplicando por 1 000.*

Aplicación. En los problemas de superficie o de volumen, a menudo se presenta la necesidad de pasar de una unidad a otra. Supongamos que se quiere saber la cantidad de litros de agua que puede contener un tanque de 2 metros cúbicos. Como 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico, conviene transformar los metros cúbicos en decímetros cúbicos. De acuerdo con la regla anterior, se tiene:

$$1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3 = 1\ 000 \text{ litros}$$
$$2\ m^3 = 2\ 000 \text{ litros}$$

Cálculos aproximados. Conviene desde el principio acostumbrarse al *cálculo aproximado y rápido*. Supongamos que se quiere calcular el número de litros de agua que puede contener un recipiente cilíndrico, de 70 cm de radio y 2 m de altura. El volumen de un cilindro es igual a la superficie de la base por la altura; la superficie de la base es igual a πr^2. Luego:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$V = 3{,}1416 \times (70\ cm)^2 \times 2\ m$$

Como queremos llegar a litros, es decir, a decímetros cúbicos, conviene poner desde el principio todas las medidas en decímetros.

$$V = 3{,}1416 \times (7\ dm)^2 \times 20\ dm$$

y como queremos hacer simplemente un cálculo aproximado, pondremos 3 en lugar de 3,1416. El signo ∞ puesto encima del signo $=$ indica que el cálculo es sólo aproximado

$$V \cong 3 \times 49\ dm^2 \times 20\ dm$$

Por la misma razón, pondremos 50 en vez de 49, y se tiene:

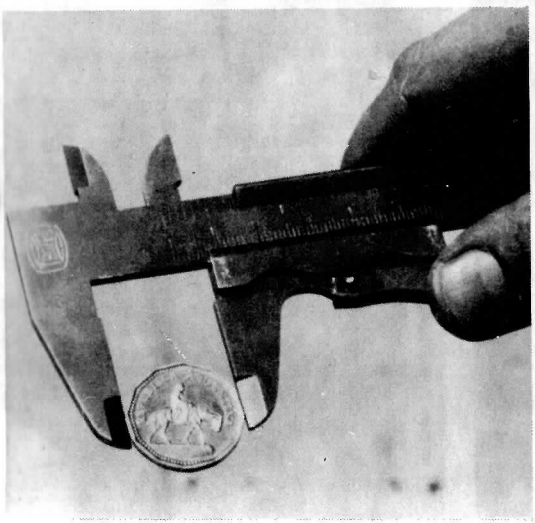
$$V \cong 3 \times 50\ dm^2 \times 20\ dm$$
$$V \cong 3\ 000\ dm^3$$
$$V \cong 3\ 000 \text{ litros}$$

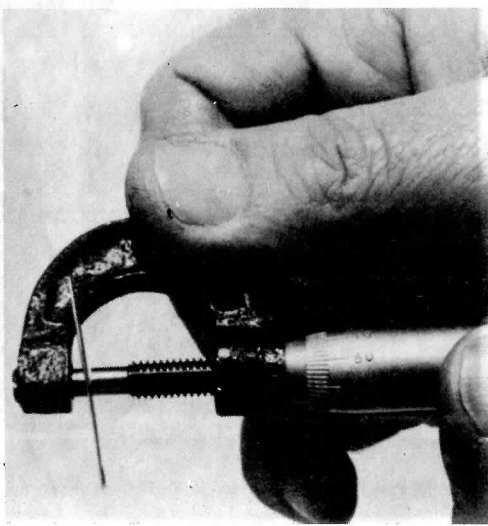
El cálculo exacto daría:

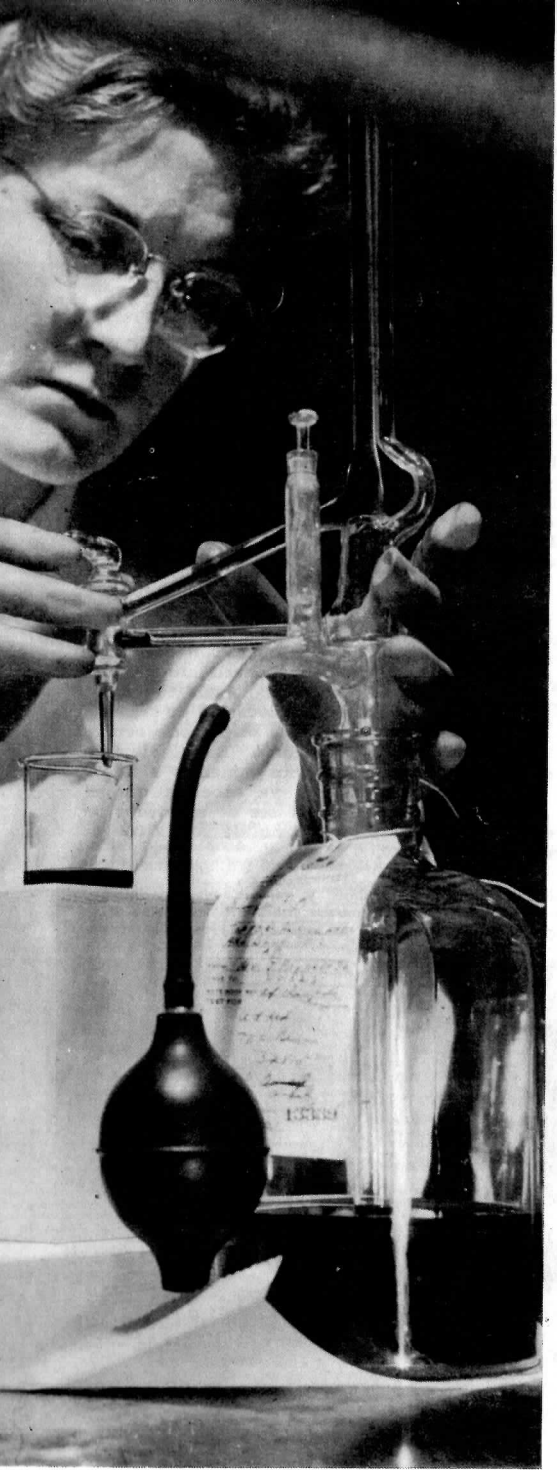
$$V = 3\ 078{,}768 \text{ litros}$$

Las ventajas que reporta el cálculo aproximado, son los siguientes: en los problemas de la vida diaria se necesita a veces saber con rapidez cuánto importa *más o menos*, determinado asunto; otras veces no se tiene a la mano lápiz y papel, y entonces es imposible realizar el cálculo exacto en forma mental, mientras que es bastante fácil, cuando se adquiere práctica, hacer el cálculo redondo; finalmente, aun cuando se quiera efectuar la operación con toda exactitud, conviene hacerla antes aproximada; de ese modo no nos equivocaremos jamás en la colocación de la coma decimal, cosa que de otro modo ocurre con mucha frecuencia. En el ejemplo anterior, cuando nos ponemos a hacer el cálculo exacto, ya sabemos que el resultado tiene que ser de alrededor de los 3 000 litros, y no de los 30 000 ni de los 300.

Instrumentos de medición denominados palmer y vernier, respectivamente, que se utilizan para medir espesores con mucha precisión: las fotografías muestran la calibración de una moneda y de una aguja, respectivamente.



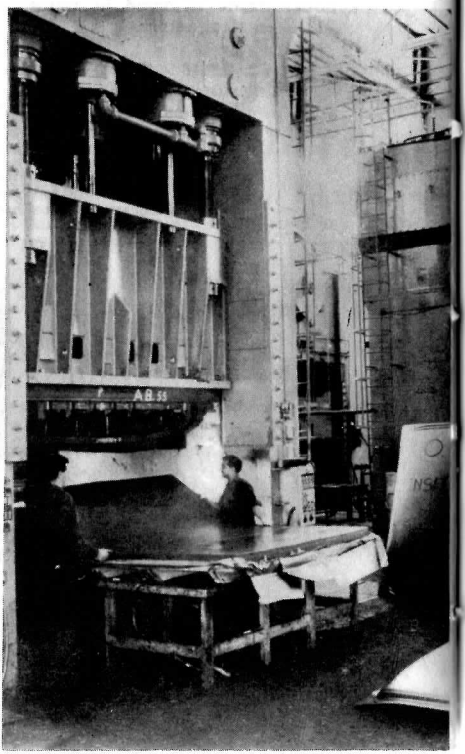




I

HIDROSTÁTICA

Los líquidos en equilibrio

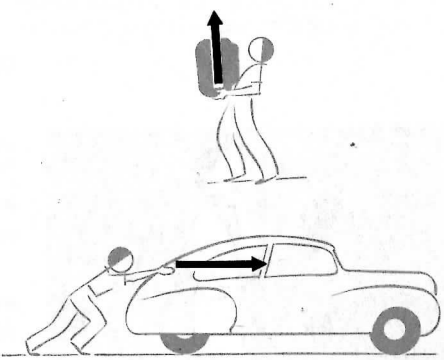


El concepto de fuerza es un concepto primario; de ahí que su definición no sea sencilla. Aceptamos la noción intuitiva que todos tenemos de ella, y dejamos para más adelante la tarea de definirla.
Pero el concepto de fuerza es uno, y el de presión, otro muy distinto. La mejor manera de comprender la diferencia es pensar en los ejemplos de fuerzas iguales que producen presiones distintas, y de fuerzas distintas que producen presiones iguales; de fuerzas pequeñas que producen presiones enormes, y, por el contrario, de pequeñas presiones ejercidas por grandes fuerzas.

1 FUERZA Y PRESIÓN

Fuerza

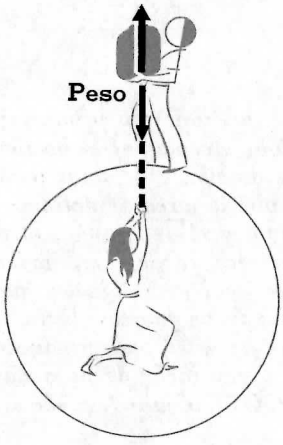
Para levantar un cuerpo, para empujar un auto o para arrastrar una piedra, el hombre realiza un esfuerzo muscular. En la física se expresa el mismo hecho diciendo que el hombre "aplica una fuerza".



¿Qué es el peso?

Si con las manos sostenemos una piedra, notamos que empuja hacia el suelo; en cuanto la soltamos, cae. Hay, por lo tanto, una fuerza que trata de hacer caer el cuerpo hacia tierra.

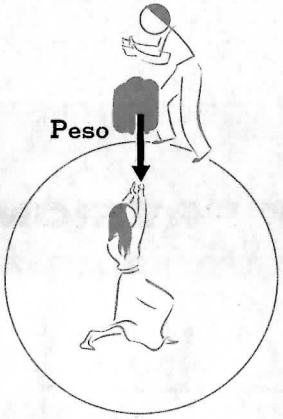
La *gravedad* es la propiedad de nuestro planeta de atraer a los cuerpos. *Peso* de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Como veremos más adelante, la gravedad no es un privilegio de



La madre Naturaleza es quien ejerce la fuerza llamada **peso**.

la Tierra: el Sol, la Luna y todo cuerpo en general atrae a los que están dentro de su campo de acción.

Si no existiese la gravedad sucederían cosas muy curiosas: no llovería, no habría paracaidistas; si diéramos un salto hacia arriba, seguiríamos subiendo indefinidamente; para leer no habría necesidad de sostener el libro, pues bastaría dejarlo a la altura conveniente; claro que sin gravedad los aviones no serían demasiado necesarios, pero si los hubiese y a un aviador se le descompusiese el avión, le sería sumamente sencillo arreglarlo, pues bajaría tranquilamente de su aparato y caminaría por el aire hasta ubicar la falla.



Medición de fuerzas

Unidades

Así como para medir longitudes se usa como unidad una longitud determinada, llamada *metro*, para medir pesos o fuerzas en general se usa una fuerza determinada, llamada *kilogramo-fuerza*, cuyo símbolo es $\vec{kg}$[1].

Aproximadamente, 1 kilogramo-fuerza es el peso de 1 litro de agua.

Si no hubiera gravedad ...

[1] La flechita es importante. Sin ella significa otra cosa, como veremos más adelante.

El kilogramo patrón, guardado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, de Francia.

En realidad, *el kilogramo exacto es el peso de una pesa que está guardada en los archivos de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia, cuando se lo mide al nivel del mar y a una latitud de 45°*. Más adelante se dirá el porqué de estas restricciones.

Además del kilogramo, en la práctica se usan otras unidades, más pequeñas y más grandes, por razones de comodidad. A nadie que no sea un tonto se le ocurriría vender pasto por miligramos, ni medir un medicamento en toneladas; el objeto de los múltiplos y submúltiplos es, justamente, usar en cada caso una unidad adecuada.

Las unidades de peso usuales son:

Tonelada (Ton) $= 1\,000\ \vec{kg}$
gramo $(\vec{g})$ $= 0{,}001\ \vec{kg}$
decigramo $(\vec{dg})$ $= 0{,}1\ \vec{g}$
centigramo $(\vec{cg})$ $= 0{,}01\ \vec{g}$
miligramo $(\vec{mg})$ $= 0{,}001\ \vec{g}$

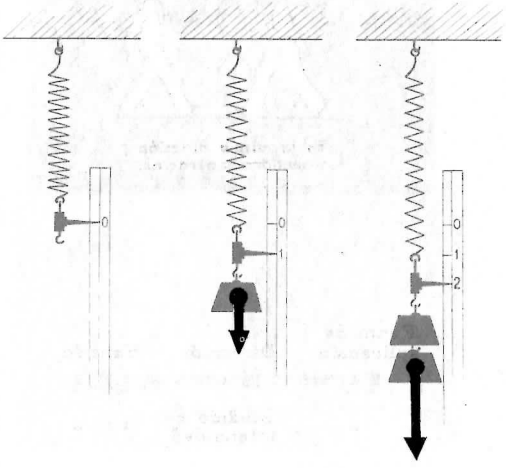
Cómo se miden las fuerzas

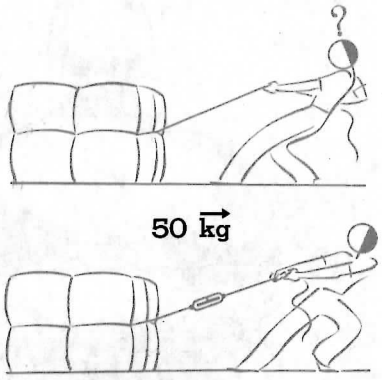
Si del extremo de un resorte colgamos una pesa, el resorte se estira; cuanto más pesada es la pesa más se estira. Poniendo un índice y una regla, fácilmente se construye un aparato para medir fuerzas, llamado *dinamómetro* (del griego *dynamys*: fuerza, y *metrón*: medida).

Para *graduar* o *tarar* el dinamómetro se cuelgan pesas conocidas, y se marcan sobre la regla las posiciones correspondientes. Una vez calibrado el dinamómetro es fácil medir una fuerza cualquiera. Si, por ejemplo, se quiere saber con qué fuerza se tira de un fardo, bastará con interponer el dinamómetro como indica la figura.

Características de una fuerza

Si decimos que un señor tiene $ 1 000, o que un tanque tiene una capacidad de 200 litros, o que la distancia entre dos ciudades es de

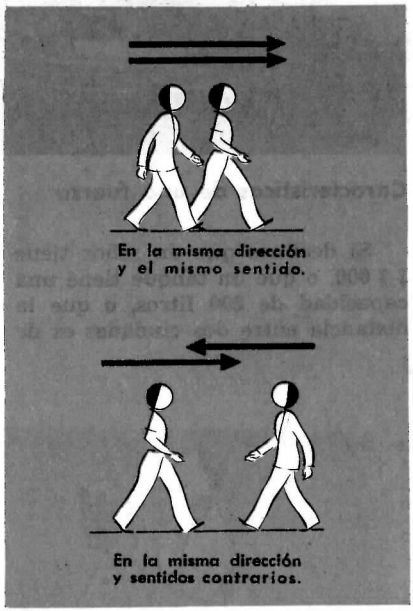




300 km, no queda nada por aclarar.

Pero si le decimos a una persona que haga una fuerza de 10 kg, posiblemente responderá: "De acuerdo; pero... ¿DÓNDE quiere que la aplique?". Podemos indicarle, por ejemplo, una mesa. Tampoco quedará, con seguridad, satisfecho nuestro señor, y preguntará: "¿Y en qué DIRECCIÓN quiere que la aplique?". Le indicaremos "a lo largo de la mesa". Pero...

"¿Hacia ALLÁ o hacia ACÁ?".



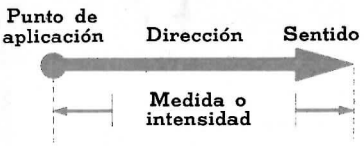
Por lo tanto, cuando se quiere hablar de una fuerza determinada, no basta con decir su *medida* y la *unidad* en que está medida. Hay que señalar, además, el *punto de aplicación*, la *dirección* y el *sentido*[1].

Es decir, que para determinar una fuerza hay que indicar sus cuatro características:

1) *Punto de aplicación;*
2) *Dirección;*
3) *Sentido;*
4) *Medida o intensidad.*

Magnitudes vectoriales

Las magnitudes que, como las fuerzas, exigen que de cada cantidad se señalen esas cuatro características, se llaman *magnitudes vectoriales.*



[1] Una recta determina una dirección; pero *cada dirección tiene dos sentidos.*

Magnitudes escalares

Las magnitudes cuyas cantidades quedan perfectamente determinadas al indicarse la medida y la unidad como las longitudes, las superficies, los volúmenes, las capacidades, se llaman *magnitudes escalares.*

Cómo se representa una fuerza

Una fuerza se representa con una flecha. El origen de la flecha señala el punto de aplicación; la recta a que pertenece determina la dirección; la punta de la flecha señala el sentido; y eligiendo una *escala*, la longitud representa la medida. En física, estas flechas se llaman *vectores.*

Peso específico

No pesan lo mismo 1 cm^3 de agua que 1 cm^3 de hierro o de plomo: se dice que tienen *pesos específicos* distintos.

DEFINICIÓN: *Se llama peso específico de un cuerpo el cociente entre su peso y su volumen.* En símbolos[1]:

$$\varrho = \frac{P}{V}$$

EJ.: *Un trozo de hierro de 2 dm^3 pesa 15,6 $\vec{kg}$. Calcular el peso específico.*

De acuerdo con la definición:

$$\varrho = \frac{P}{V} = \frac{15{,}6\ \vec{kg}}{2\ dm^3} = 7{,}8\ \frac{\vec{kg}}{dm^3}$$

[1] La letra griega ϱ (*rho*) se usa muy frecuentemente para representar pesos específicos.

Presión

Concepto

1. ¿Por qué los clavos se clavan de punta y no de cabeza?
2. ¿Por qué se afila un cuchillo para que corte?
3. ¿Por qué es difícil ser faquir, y acostarse en una cama de clavos de punta?
4. ¿Por qué se usan raquetas o esquíes para andar en la nieve?

A pesar de su disparidad, hay en estas preguntas algo de común: se podría contestar a todas con una sola respuesta: *porque el efecto que produce una misma fuerza depende de la* SUPERFICIE *sobre la cual se la aplica.*

Esto es muy importante, y por eso en física se lo deja perfectamente aclarado, definiendo lo que se llama *presión.*

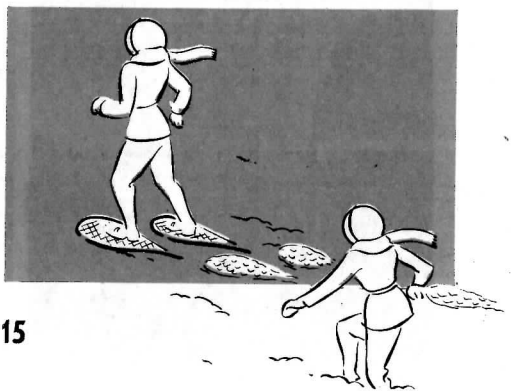
Supongamos un cilindro de metal de 20 $\vec{kg}$, cuya base mide 10 cm^2. Calculemos el peso que soporta cada centímetro cuadrado de la base:

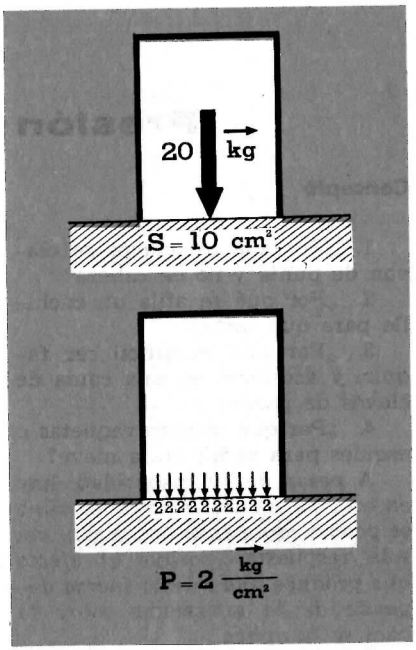
10 cm^2 soportan

un peso de 20 $\vec{kg}$

1 cm^2 soporta

un peso de $\frac{20}{10}\ \vec{kg} = 2\ \vec{kg}$





El efecto total se distribuye como indica la figura de la izquierda, inserta en esta página.

DEFINICIÓN: *Se llama* PRESIÓN *ejercida por una fuerza sobre una superficie, al cociente entre la fuerza y la superficie.*

En el ejemplo anterior tenemos:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{20\ \vec{kg}}{10\ cm^2} = 2\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

Obsérvese que la presión *representa* la fuerza que se ejerce sobre *cada* unidad de superficie.

UNIDADES. De acuerdo con la definición:

$$p = \frac{F}{S}$$ de modo que:

$$\text{unidad de presión} = \frac{\text{unidad de fuerza}}{\text{unidad de superficie}}$$

Peso del edificio Kavanagh: 31 000 toneladas; superficie de la base: 2 000 m². La presión es $1{,}5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$.

Fuerza aplicada: 1 kg; superficie de la punta de la chinche: 0,1 mm². La presión es $1\ 000\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$.

Por ejemplo: si la fuerza se mide en $\vec{kg}$ y la superficie en cm^2, la unidad de presión será $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$; si se usan $\vec{g}$ y m^2, la unidad será $\frac{\vec{g}}{m^2}$, etcétera.

Es muy sencillo pasar de una unidad de presión a otra:

EJEMPLO 1: Expresar en $\frac{\vec{kg}}{m^2}$ *una presión de 20* $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$.

$$p = 20\ \frac{\vec{kg}}{cm^2} = 20\ \frac{\vec{kg}}{0{,}0001\ m^2} = 200\,000\ \frac{\vec{kg}}{m^2}$$

EJ. 2: Expresar en $\frac{\vec{g}}{cm^2}$ *una presión de 10* $\frac{\vec{kg}}{m^2}$.

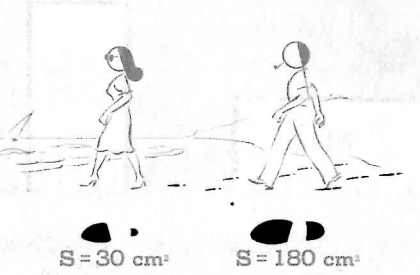
$$p = 10\ \frac{\vec{kg}}{m^2} = 10\ \frac{1\,000\ \vec{g}}{10\,000\ cm^2} = \frac{10 \times 1\,000\ \vec{g}}{10\,000\ cm^2} = 1\ \frac{\vec{g}}{cm^2}$$

EJ. 3: *Calcular la presión ejercida por un clavo cuya punta tiene una superficie de 0,04 mm², cuando sobre su cabeza se apoya (sin golpear) un martillo que pesa 2* $\vec{kg}$.

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2\ \vec{kg}}{0{,}04\ mm^2} = \frac{2\ \vec{kg}}{0{,}000\,4\ cm^2} = 5\,000\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

EJ. 4: *Calcular la presión que ejercería el mismo clavo, soportando el mismo martillo, pero apoyado sobre su cabeza, cuya superficie mide 10 mm².*

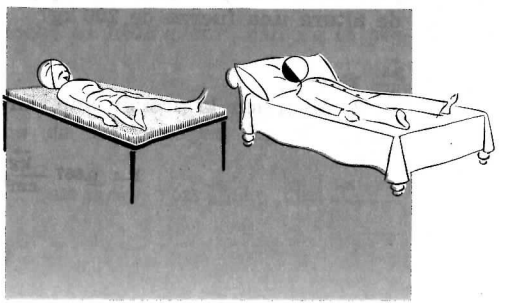
$$p = \frac{F}{S} = \frac{2\ \vec{kg}}{10\ mm^2} = \frac{2\ \vec{kg}}{0{,}10\ cm^2} = 20\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$



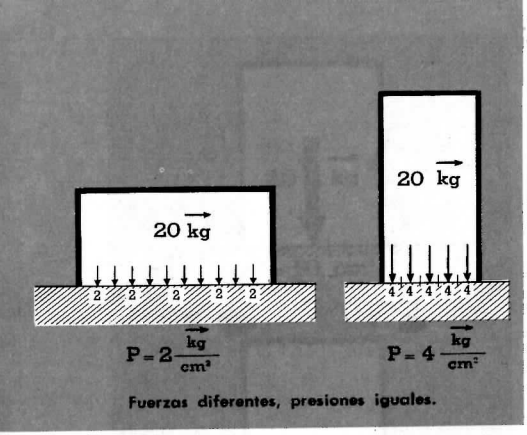
Efectos de la presión

En la arena mojada de una playa se hunden más los tacos de una mujer que los de un hombre. Aun suponiendo que ambos pesen lo mismo, la presión ejercida sobre el suelo por el peso de la mujer es 6 veces mayor que la ejercida por el hombre, pues, como se observa en el dibujo, la superficie de apoyo del zapato femenino es 6 veces menor.

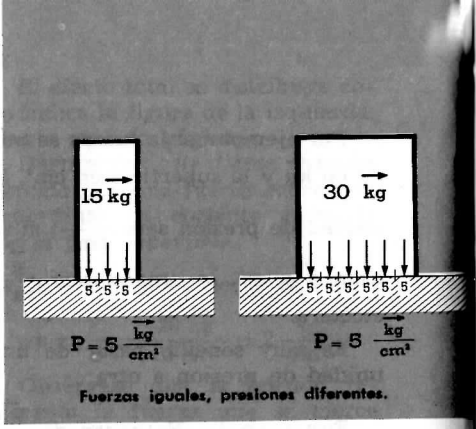
En el caso del faquir, el peso se reparte entre las puntas de los



Pero cualquiera puede ser faquir usando un número de clavos suficientemente elevado.



Fuerzas diferentes, presiones iguales.



Fuerzas iguales, presiones diferentes.

clavos: la presión es grande y no soportable por un hombre común. Acostándose sobre un colchón, en cambio, la superficie sobre la que se distribuye el peso es grande y la presión es pequeña.

Diferencia entre fuerza y presión

Como suelen confundirse, conviene conocer la diferencia. Los ejemplos que siguen la señalarán.

Fuerzas iguales pueden producir presiones diferentes

Sean dos prismas de 20 $\vec{kg}$, pero uno con 10 cm^2 de base, y el otro con sólo 5 cm^2.

Las presiones que cada uno ejerce sobre su base son:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{20\ \vec{kg}}{10\ cm_2} = 2\ \frac{\vec{kg}}{cm^2};$$

$$p_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{20\ \vec{kg}}{5\ cm^2} = 4\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

Fuerzas diferentes pueden producir presiones iguales

Imaginemos dos cilindros: el primero pesa 30 $\vec{kg}$ y su base mide 6 cm^2; el segundo pesa 20 $\vec{kg}$ y su base mide 4 cm^2. Calculemos las presiones ejercidas por cada uno sobre su base:

$$p_1 = \frac{30\ \vec{kg}}{6\ cm^2} = 5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2};$$

$$p_2 = \frac{20\ \vec{kg}}{4\ cm^2} = 5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

Problemas

1. ¿Qué presión ejerce sobre un triángulo de 20 cm de base y 3 dm de altura una fuerza de 200 $\vec{kg}$?

R.: $p = 0{,}667\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$

2. Expresar la presión anterior en $\frac{\vec{kg}}{m^2}$, $\frac{\vec{g}}{dm^2}$, $\frac{\vec{kg}}{mm^2}$.

R.: $0{,}667\ \frac{\vec{kg}}{cm^2} = 6\,667\ \frac{\vec{kg}}{m^2} = 66\,667\ \frac{\vec{g}}{dm^2} = 0{,}006\,7\ \frac{\vec{kg}}{mm^2}$

3. La base de un paralelepípedo mide 2 cm^2. ¿Cuál es su peso, si la presión que produce sobre la base es de 1 000 $\vec{kg}/m^2$?

R.: $F = 0{,}2\ \vec{kg}$

4. La presión que ejerce sobre una superficie un cuerpo que pesa 1 tonelada es de 50 $\vec{kg}/cm^2$. ¿Cuánto mide la superficie?

R.: $S = 20\ cm^2$

5. Calcular el peso específico de un cubo de 5 cm de arista, sabiendo que pesa 2,625 $\vec{kg}$.

R.: $\varrho = 21\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$

6. ¿Cuánto pesa un trozo de hierro de 10 cm^2 de base y 4 dm de altura, si el peso específico del hierro es de 7,85 $\vec{g}/cm^3$?

R.: $3\,140\ \vec{g}$

7. ¿Cómo se determina el peso específico de una moneda de $ 0,20?

8. ¿Cuál es el diámetro de una esfera de níquel que pesa 2 288 $\vec{kg}$, si el peso específico del níquel es de 8,6 $\vec{g}/cm^3$?

R.: 79,8 cm

9. ¿Cuántos centímetros cúbicos de corcho pesan tanto como 200 cm^3 de hierro? (ϱ del corcho: 0,22 $\vec{g}/cm^3$; ϱ del hierro: 7,85 $\vec{g}/cm^3$).

R.: 7 136 cm^3

10. Calcule el peso de un cubo de plomo de 10 cm de arista. Si divide el cubo por la mitad: *a)* ¿qué pasa con el peso?; *b)* ¿qué pasa con el volumen?; *c)* ¿qué pasa con el peso específico? (ϱ plomo: 11 $\vec{g}/cm^3$).

R.: 11 $\vec{kg}$; *a)* es la mitad; *b)* es la mitad; *c)* es el mismo

11. Un recipiente de 20 cm de largo, 4 cm de ancho y 3 cm de alto está lleno de mercurio. *a)* ¿Cuántos litros de mercurio contiene? *b)* ¿Cuánto pesa esa cantidad de mercurio? (ϱ mercurio: 13,6 $\vec{g}/cm^3$). *c)* ¿Cuál es la presión en la base?

R.: *a)* 0,24 litros; *b)* 3 264 $\vec{g}$; *c)* 40,8 $\vec{g}/cm^2$

12. El agua contenida en un tanque cilíndrico pesa 5 700 $\vec{kg}$. Si la presión en el fondo es de 0,15 $\vec{kg}/cm^2$, calcule el radio de la base. ¿Qué altura tiene el tanque? (ϱ agua: 1 $\vec{g}/cm^3$).

R.: *a)* R = 1,10 m; *b)* h = 1,50 m

13. Un recipiente contiene 100 litros de leche. Si su base mide 1 250 cm^2 y el peso específico de la leche es 1,028 $\vec{g}/cm^3$, calcule la presión en el fondo.

R.: $p = 0{,}082\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$

14. Exprese el peso específico de la leche en $\vec{kg}/m^3$, $\vec{g}/dm^3$, $\vec{mg}/mm^3$.

R.: 1 028 $\vec{kg}/m^3$; 1 028 $\vec{g}/dm^3$; 1 028 $\vec{mg}/mm^3$

2 EL PRINCIPIO DE PASCAL

Una característica de los sólidos es tener forma propia. Los líquidos, en cambio, no tienen forma determinada, y adoptan la del recipiente que los contiene. La diferencia fundamental no es ésa, sin embargo.

Si sobre el pistón chico aplicamos una fuerza de $10\ \vec{kg}$, para equilibrarla debe ejercerse sobre el pistón grande una fuerza de $10\ \vec{kg}$: la varilla ha transmitido la fuerza.

Un sólido transmite la fuerza que se ejerce sobre él.

Saquemos la varilla que une los pistones, y llenemos el cilindro con agua. Volvamos a aplicar la fuerza de $10\ \vec{kg}$ sobre el pistón chico. Observaremos que, para equilibrarla, ahora necesitamos aplicar sobre el pistón grande no 10, sino $100\ \vec{kg}$. Por lo pronto vemos que los líquidos no transmiten las fuerzas. Pero entonces, ¿qué es lo que transmiten?

Sobre el émbolo chico se aplicó una fuerza de $10\ \vec{kg}$, y como su superficie mide 20 cm², la presión ejercida es de

$$p = \frac{F}{S} = \frac{10\ \vec{kg}}{20\ cm^2} = 0{,}5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

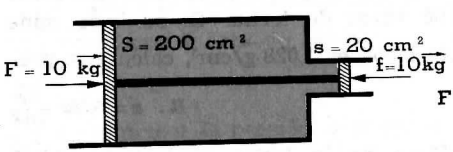
Sobre el émbolo grande se ha aplicado una fuerza de $100\ \vec{kg}$, y como la superficie es de 200 cm², la presión ejercida es:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{100\ \vec{kg}}{200\ cm^2} = 0{,}5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

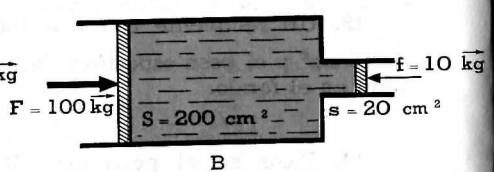
Es decir, que se ha transmitido la presión y no la fuerza.

Un líquido transmite la presión que se ejerce sobre él.

Los sólidos transmiten la fuerza que se les aplica *solamente en la dirección de esa fuerza.* Así si,



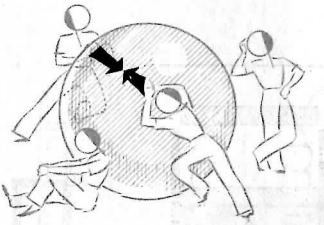
Los sólidos transmiten la fuerza.



Los líquidos transmiten la presión.

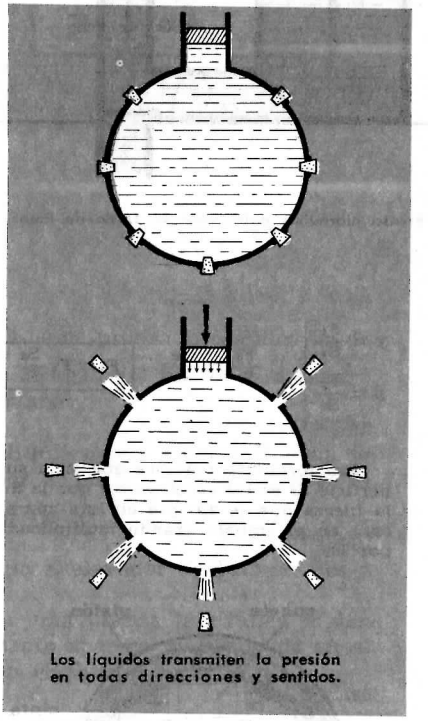
como lo indica el dibujo, alguien empuja un cuerpo aplicando una fuerza en una dirección determinada, la fuerza se transmite solamente en esa dirección.

Pero si se llena con agua una esfera como la del dibujo, que tiene agujeritos tapados con cera, al ejercer presión con el émbolo saltan *todos* los tapones de cera, y no solamente aquél que está en la dirección de la fuerza. Es decir, que:



Los sólidos transmiten la fuerza en su dirección y sentido.

Principio de Pascal: un líquido transmite en todas direcciones la presión que se ejerce sobre él.



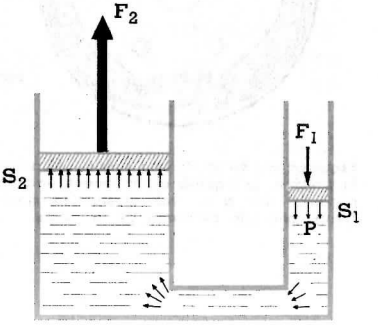
Los líquidos transmiten la presión en todas direcciones y sentidos.

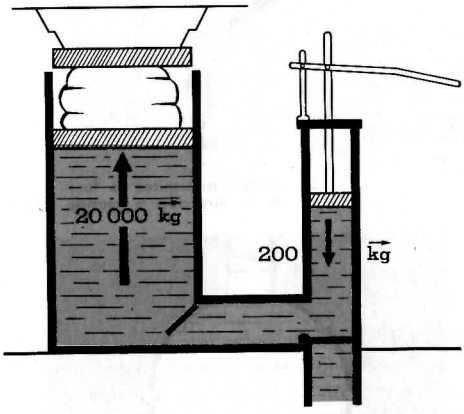
Pero, ¿cómo es posible que, como se ve en la página anterior, 10 $\overrightarrow{kg}$ se transformen en 100 $\overrightarrow{kg}$? ¿De dónde salieron los 90 $\overrightarrow{kg}$ restantes? Simplemente, porque transmitir presiones –y no fuerzas– es una propiedad de los líquidos, tan característica, que *se la puede tomar como definición de líquido*. Es una propiedad como la de adaptar su forma a la del recipiente que lo contiene, aunque más sorprendente, porque estamos menos familiarizados con ella.

Aplicaciones: la prensa hidráulica

La propiedad de los líquidos, de multiplicar o reducir una fuerza, tiene muchas aplicaciones. Una de ellas es la prensa hidráulica, de la que damos un esquema. Si sobre el pistón chico se aplica una fuerza F_1, sobre el grande aparece una fuerza F_2. Como las presiones en los dos émbolos son iguales:

Esquema de una prensa hidráulica.





Prensa hidráulica aplastando un fardo de lana.

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{F_1}{S_1} \\ p &= \frac{F_2}{S_2} \end{aligned}\right\} \therefore \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \therefore \boxed{F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}}$$

Esa formulita nos dice que si la superficie S_2 es 100 veces mayor que la S_1, la fuerza que se aplique en ésta aparecerá en el émbolo grande multiplicada por 100.

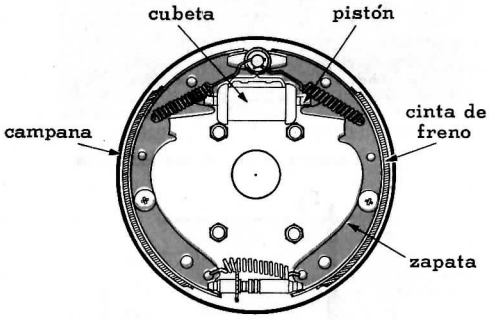
De modo que si por medio de una palanca se aplica una fuerza de 200 $\vec{kg}$ en el émbolo chico, el émbolo grande aprieta el fardo de la figura con una fuerza 100 veces mayor, es decir, de 20 000 $\vec{kg}$.

La prensa hidráulica tiene muchas aplicaciones; por ejemplo: prensar fardos de lana, aceitunas, para extraerles aceite. El mismo principio se aplica en los sillones de los dentistas y los peluqueros; en los ascensores hidráulicos; en los frenos hidráulicos de los ómnibus y automóviles; en las máquinas que modelan la carrocería y los guardabarros de los automóviles; en los elevadores de automóviles de las estaciones de servicio, los gatos hidráulicos, etc.

A la inversa, si la fuerza se ejerce sobre el émbolo grande, aparece disminuida en el chico. En los amortiguadores de los automóviles se aplica esta consecuencia.

PROBLEMA: *Se desea fabricar una prensa hidráulica de modo que las fuerzas aplicadas se multipliquen por 1 000; la superficie mayor debe medir 10 000 cm² ¿Cuánto medirá la superficie menor?*

Como la razón de las fuerzas es 1 000, la razón entre las superficies debe tener el mismo valor; luego, la menor debe ser 1 000 veces menor, o sea, medirá sólo 10 cm².



Esquema del freno de una rueda. Al aumentar la presión, el líquido de la cubeta empuja los pistones, que a su vez ajustan la cinta del freno contra la campana de la rueda.

Lo que se gana en fuerza, se pierde en recorrido

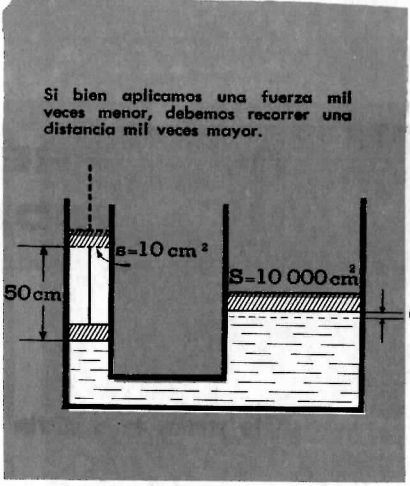
En el problema anterior, una fuerza aplicada en el émbolo chico aparece multiplicada por 1 000 en el grande. Pero hay una compensación: si el émbolo chico ha descendido 50 cm, el grande subió solamente 0,05 cm, es decir, 1 000 veces menos. En efecto: al bajar el émbolo chico desplazó un volumen de agua.

$$V = s_1 h_1 = 10 \text{ cm}^2 \cdot 50 \text{ cm} = 500 \text{ cm}^3$$

Un volumen igual ha pasado al cilindro grande, de modo que el émbolo se ha desplazado una longitud h_2 tal que

$$V = S_2 h_2 \therefore h_2 = \frac{V}{S_2} = \frac{500 \text{ cm}^2}{10\,000 \text{ cm}^2} = 0{,}05 \text{ cm}$$

Como veremos más adelante, esto sucede con todas las máquinas: por un lado se gana, pero por otro se pierde. Se sacrifica lo que no interesa.



Problemas

1. La superficie del pistón chico de una prensa hidráulica mide 20 cm². Si sobre él actúa una fuerza de 10 $\overrightarrow{kg}$, ¿qué fuerza se obtendrá en el pistón grande, de 50 dm² de superficie?

R.: $F = 2\,500 \overrightarrow{kg}$

2. Se desea construir una prensa hidráulica para ejercer fuerzas de 1 tonelada. ¿Qué superficie deberá tener el pistón grande, si sobre el menor, de 30 cm², se aplicará una fuerza de 50 $\overrightarrow{kg}$?

R.: $S = 600 \text{ cm}^2$

3. Observe en una estación de servicio el elevador de automóviles y busque dónde está el pistón chico.

4. Los diámetros de dos pistones de una prensa hidráulica miden 4 cm y 40 cm, respectivamente. ¿Por cuánto aparece multiplicada en el pistón grande la fuerza que se aplica en el chico?

R.: Por 100

5. Para hacer funcionar el elevador de automóviles de una estación de servicio se utiliza una presión de hasta 6 kg/cm². ¿Hasta qué peso podrá levantar, si el diámetro del pistón grande mide 20 cm?

R.: $F = 1\,884 \overrightarrow{kg}$ ($\pi = 3{,}14$)

6. Los diámetros de los pistones de una prensa hidráulica miden 20 cm y 2 cm. ¿Qué fuerza deberá aplicarse en el pistón chico, si en el pistón grande se desea obtener una fuerza de 5 toneladas?

R.: $f = 50 \overrightarrow{kg}$

7. Suponiendo que en la prensa anterior el pistón chico penetre 30 cm, ¿qué distancia recorre el pistón grande?

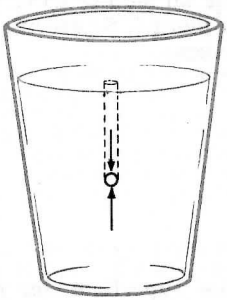
R.: 3 mm

3 PRESIÓN HIDROSTÁTICA

La presión en el interior

Imaginemos un vaso con agua en reposo. Pensemos en una de las gotitas del interior: soporta el peso de todas las gotitas que tiene encima. Ese peso, distribuido sobre su superficie, ejerce una *presión* sobre la gota.

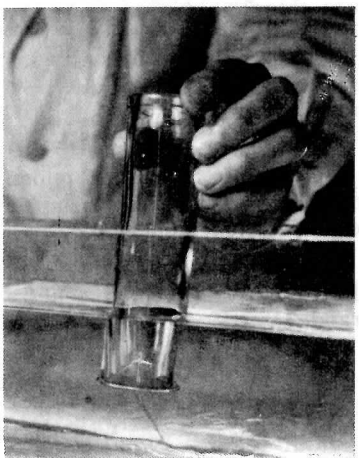
Como suponemos que el líquido está en reposo, la gota no se mueve. Pero si no se mueve, a pesar de soportar una presión desde arriba hacia abajo, significa que *existe a la vez una presión de abajo hacia arriba, igual a aquélla.* Una sencilla experiencia nos permitirá comprobarlo: tomemos un tubo abierto en sus dos extremos, y tapemos uno de ellos apoyando un disco de metal. Introduzcamos el tubo, con el extremo tapado hacia abajo, en un recipiente con agua; comprobaremos que a pesar de soltar la tapa (primera fotografía), ésta se mantiene adherida al tubo. **Conclusión:**



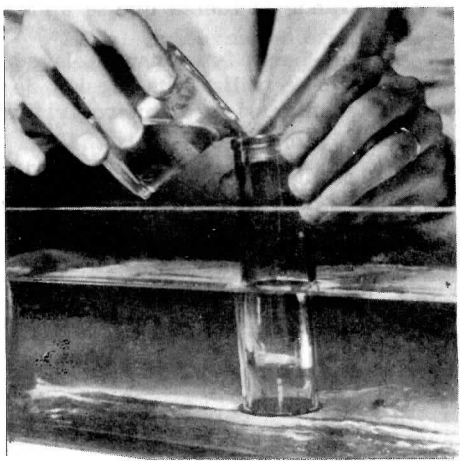
Existe una presión de abajo hacia arriba.

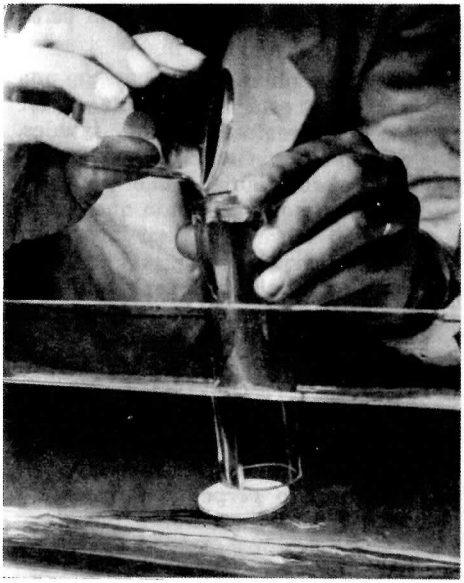
Si después echamos agua en el interior del tubo, el nivel del agua irá subiendo, pero la lámina sigue obturando el tubo, sin irse al fondo (segunda fotografía), hasta que cuando el nivel del agua en el interior iguale al nivel exte-

La presión desde abajo hacia arriba mantiene apretada la chapa metálica contra el tubo, dentro del cual no hay agua.



A pesar de que dentro del tubo se ha echado agua, la chapita todavía resiste e impide la entrada del líquido.





Cuando el nivel del líquido dentro del tubo iguala al de afuera, la chapa cae.

También hay presión oblicua.

rior, la tapa se desprenderá (tercera fotografía) e irá al fondo, porque al igualarse los niveles se igualaron las presiones, y la tapa cae por su propio peso. Conclusión:

La presión de abajo hacia arriba es igual a la presión de arriba hacia abajo

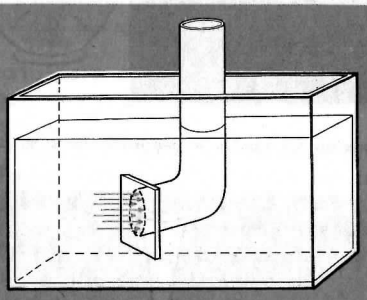
De esta experiencia podemos obtener otros datos: si inclinamos el tubo cuando la lámina está adherida al extremo, comprobaremos que tampoco cae. Conclusión:

También existen presiones oblicuas.

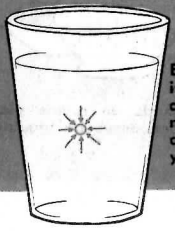
Si realizamos la experiencia con un tubo acodado, podremos comprobar que *también existen presiones horizontales.*

En resumen:

En todo punto del interior de un líquido hay presiones en todas direcciones y en todos los sentidos, y todas son iguales.



También hay presión horizontal.



En un punto del interior de un líquido, hay presiones iguales en todas las direcciones y sentidos.

El líquido presiona la pared, la cual ejerce sobre aquél una presión igual y opuesta.

La presión contra la pared

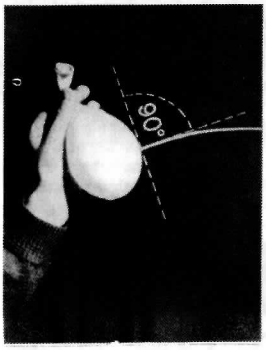
Hasta ahora hablamos de una gota que está rodeada de otras: de todas recibe presiones iguales. ¿Qué pasa con una que toca la pared del recipiente? En el punto de contacto no hay líquido que ejerza presión sobre ella, pero la presión existe porque la gota está en reposo: la ejerce la pared. Conclusión:

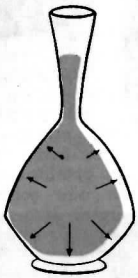
El líquido presiona sobre la pared, y la pared presiona sobre el líquido.

¿Qué dirección tienen esas presiones? Si con un alfiler pinchamos un globito de goma y lo llenamos con agua, veremos que sale un chorrito *perpendicularmente* a la pared.

Conclusión:

La presión es perpendicular a la pared.





La presión del líquido es perpendicular a la pared.

Superficies de igual presión

Si consideramos una gota como debajo de otra, la de abajo soporta mayor presión, pues se agrega la provocada por el peso de la de arriba. Si consideramos la que está encima, ésta soporta menor presión. Pero dos gotas que están en un mismo plano horizontal soportan iguales presiones, pues si no se moverían. Conclusiones:

1) *La presión depende de la profundidad.*

2) *Todos los puntos de un mismo plano horizontal soportan la misma presión.*

En puntos de un mismo plano, las presiones son iguales.

Valor de la presión

Consideremos una superficie horizontal S de un líquido en reposo, a una profundidad h. Todos los puntos que están en esa superficie soportan la misma presión. pero, ¿cuánto *vale* esa presión? ¿De qué factores depende?

En primer lugar, esa presión se debe al peso F de la columna de líquido que hay encima de la superficie S.

Sabemos que: $p = \frac{F}{S}$

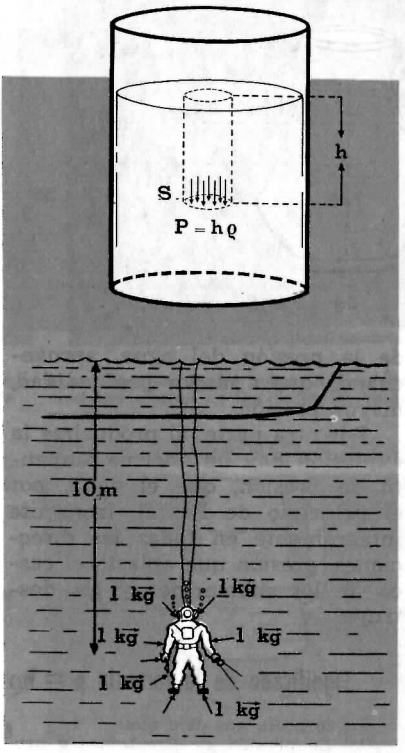
Si llamamos V al volumen de la columna de líquido, y ϱ a su peso específico, el peso F es:

$$F = V\varrho$$

y como el volumen es $V = S\,h$, reemplazando en la fórmula de la presión se tiene:

$$p = \frac{V\varrho}{S} = \frac{S\,h\,\varrho}{S}$$

$$\boxed{p = h\,\varrho}$$

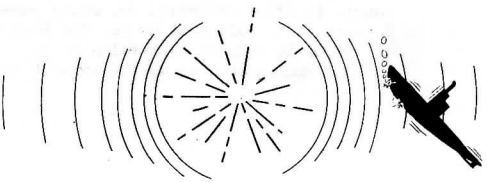


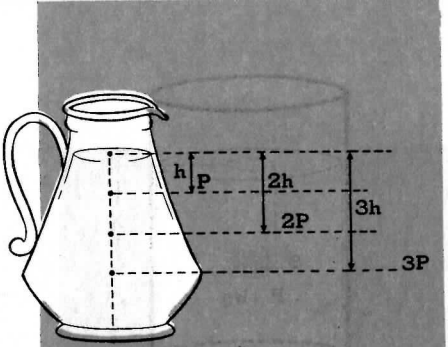
Ej.: *Calcular la presión que soporta un buzo sumergido en el mar a 10 m de profundidad.*

Admitiendo que el peso específico de agua de mar vale $1\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$, resulta $p = h\,\varrho = 10\ m \cdot 1\ \frac{\vec{g}}{cm^3} = 1\,000\ \frac{\vec{g}}{cm^2}$, es decir, que cada centímetro cuadrado de la superficie del buzo soporta una fuerza de $1\ \vec{kg}$.

Nota: La respuesta anterior no es totalmente correcta, por cuanto sobre el buzo actúa también la presión atmosférica. Sin embargo, como hasta la pág. 50 no calcularemos el valor de esa presión, en todo este capítulo supondremos que la presión atmosférica no actúa.

Destrucción de submarinos. Todos hemos oído hablar de las bombas de profundidad con que los barcos de guerra se defienden de los submarinos. Lo interesante es que se las regula para que exploten automáticamente a la profundidad deseada, por acción





La presión es directamente proporcional a la profundidad.

de la presión del agua, aprovechando que a mayor profundidad, mayor presión.

Por otra parte, al producirse la explosión hay un enorme aumento de presión, que el agua, por el principio de Pascal, transmite íntegramente en todas las direcciones, presión que aplasta el casco de los submarinos y los destruye.

Significado de la fórmula $p = h\varrho$

La fórmula nos dice que:

1) *La presión es directamente proporcional a la profundidad.* Es decir: *a mayor profundidad, mayor presión*; pero no sólo eso, sino que si a una profundidad h, la presión es p; al doble de profundidad, $2h$, la presión es exactamente el *doble*, $2p$; y al *triple* de profundidad, $3h$, la presión es el triple, $3p$, etc.

2) *La presión es directamente proporcional al peso específico del líquido.* Es decir, que si medimos la presión a una profundidad de, por ejemplo, 20 cm en el agua, y a 20 cm en otro líquido de peso específico *mayor*, la presión en éste es *mayor*. Pero no sólo eso: si el peso específico es *doble* del del agua, la presión será *doble*; si es *triple*, *triple* será la presión, etc.

3) *La presión no depende del peso total del líquido.* En dos recipientes, uno con la superficie de la base *5 veces mayor* que la del otro, echemos agua hasta que en ambos alcance el mismo nivel. El agua contenida en aquél pesa 5 veces más. ¿En cuál de las dos bases es mayor la presión hidrostática?

Tal vez alguien se sienta tentado de decir que la presión en el fondo del más grande es cinco veces mayor. Hay dos razones para negarlo:

a) Si bien el peso es cinco veces mayor, está distribuido sobre una superficie también cinco veces mayor; luego, las presiones son iguales.

b) La fórmula $p = h\varrho$ no se ocupa del peso que soporta la superficie, sino simplemente de la altura y del peso específico del líquido que tiene encima. Como en los dos recipientes las alturas son iguales, y también los pesos específicos, las presiones son iguales.

4) *La presión no depende de la forma del recipiente.* Consideremos varios recipientes de formas cualesquiera, y llenémoslos con agua (o con un mismo líquido cualquiera), hasta un mismo nivel h. Como la presión sólo depende de la altura del líquido y de su peso específico, en el fondo de todos las presiones son iguales (véanse fotografías de pág. 29).

Vasos comunicantes con un solo líquido

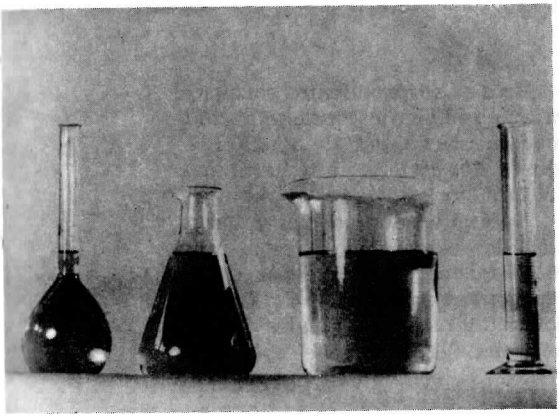
Si comunicamos todos los recipientes del punto 4 de la página ..., tendremos lo que se llama *vasos comunicantes*. Echando cualquier cantidad de un mismo líquido en ellos, alcanza en todos el mismo nivel.

Vasos comunicantes con dos líquidos

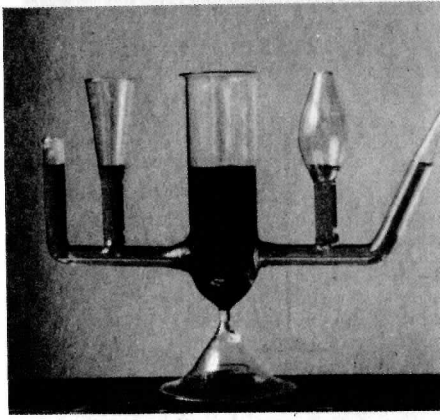
Echamos mercurio por una de las ramas de un tubo en U; en las dos alcanza el mismo nivel. Ahora echemos agua en una sola de las ramas: las superficies del mercurio quedan a distintos niveles.

Consideremos el plano horizontal que pasa por la superficie de separación mercurio-agua, y que corta a la rama que sólo tiene mercurio. Todos los puntos del mercurio de ese plano soportan la misma presión: los de la rama izquierda, la presión debida a la columna de agua; los de la derecha, la de la columna de mercurio. Como está en equilibrio, son iguales.

$$h\varrho = h'\varrho'$$



Niveles iguales y líquidos iguales originan presiones iguales. La presión no depende de la forma del recipiente.



Dispositivo que ilustra sobre la igualdad de nivel que alcanza un líquido en los vasos comunicantes.

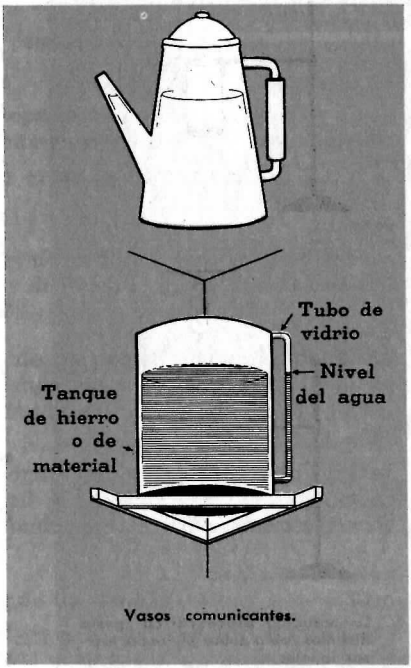
Esta igualdad permite calcular el peso específico del mercurio, conociendo el peso específico del agua y las alturas h y h':

$$\varrho' = \frac{\varrho\, h}{h'}$$

PROBLEMA: *Con los datos de la figura, calcule el peso específico del mercurio.*

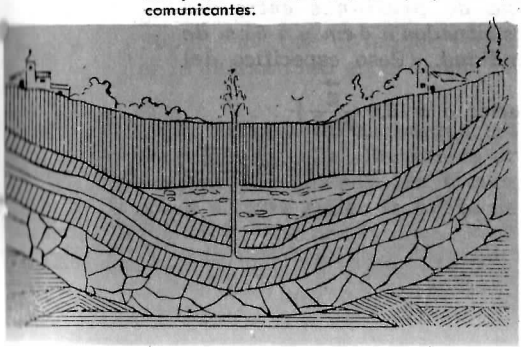
La paradoja hidrostática

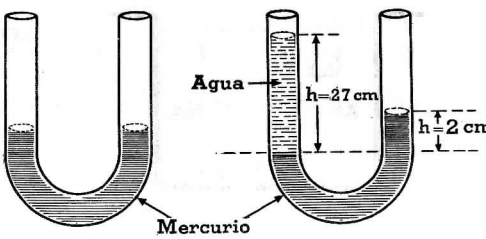
Realicemos la experiencia indicada en la figura: tres recipientes de capacidades distintas, pero de *bases iguales*. Echemos agua en los tres, hasta un mismo nivel, y midamos la fuerza que se ejerce sobre el fondo en los tres casos: *son iguales*.

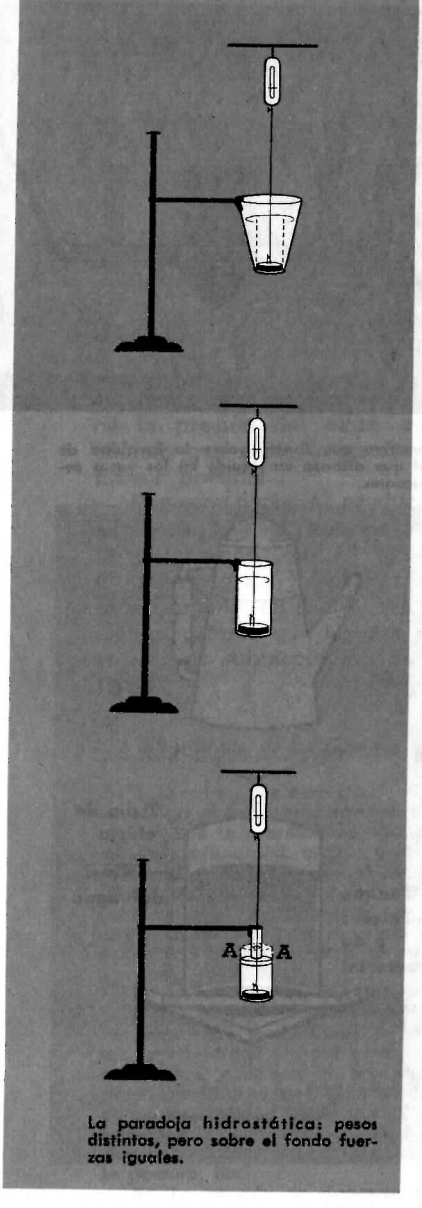


Vasos comunicantes.

Los pozos artesianos son un ejemplo de vasos comunicantes.







La paradoja hidrostática: pesos distintos, pero sobre el fondo fuerzas iguales.

Esto es sorprendente, porque el primer recipiente contiene aproximadamente 500 cm^3 de agua, el segundo 200 cm^3, y el tercero unos 150 cm^3.

La explicación es, sin embargo, sencilla: como en los tres el nivel es el mismo, las presiones en los respectivos fondos son iguales; como también son iguales las superficies, las fuerzas ejercidas ($F = P\,S$) son, a su vez, iguales.

Ley fundamental de la hidrostática

Hemos visto que entre dos puntos situados a una misma profundidad no hay diferencia de presiones. Pero sí las hay cuando están a niveles diferentes. ¿A cuánto asciende esa diferencia de presiones?

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= h_1\,\varrho \\ p_2 &= h_2\,\varrho \end{aligned}\right\} p_2 - p_1 = $$

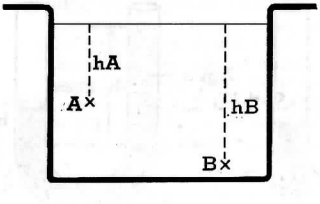
$$= h_2\,\varrho - h_1\,\varrho = (h_2 - h_1)\,\varrho$$

La diferencia de presiones entre dos puntos de un mismo líquido es igual al producto del peso específico del líquido por la diferencia de niveles.

Si están en un mismo nivel, la diferencia de presiones es nula: resultado que ya conocíamos.

PROBLEMA: *Un recipiente está lleno de mercurio. Calcular la diferencia de presiones entre dos puntos situados a 4 cm y a 6 cm de profundidad.* (Peso específico del mercurio: $\varrho = 13{,}6\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$).

R.: $27{,}2\ \frac{\vec{g}}{cm^2}$



Problemas

NOTA: Para la solución de estos problemas, supóngase que la presión atmosférica no existe.

(Tabla de pesos específicos, en la pág. 41.)

1. Una batisfera de 3 m de diámetro está sumergida a 500 m de profundidad. Calcular la presión y la fuerza total soportadas (peso específico del agua de mar: 1,025 $\vec{g}/cm^3$).

R.: 51,250 $\vec{kg}/cm^2$; 14 483 250 $\vec{kg}$

2. A una profundidad de 20 m, ¿es mayor la presión en el agua dulce o en el agua salada? ¿Y a una profundidad de 2 000 m?

3. A 5 m de profundidad, la presión en el fondo de un tanque lleno de líquido es de 4 $\vec{kg}/cm^2$. ¿Cuál es el peso específico del líquido? ¿Qué líquido puede ser?

R.: 8 $\vec{g}/cm^3$

4. El séptimo piso de una casa de departamentos está a 20 m de altura. Sus canillas requieren, para funcionar normalmente, una presión de 2 $\vec{kg}/cm^2$. ¿A qué altura, sobre el nivel de la calle, debe estar el depósito?

R.: 40 m

5. En la quilla de un barco, a 3 m de profundidad, se produce un rumbo de 1,80 m de largo por 1,20 m de ancho. ¿Qué fuerza deberá ejercer la chapa que obture el rumbo?

R.: 6 480 $\vec{kg}$

6. Calcular la presión en el fondo de un pequeño acuario, de 80 cm de largo y 50 cm de ancho, que contenga agua hasta 30 cm. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del acuario.

R.: = 30 $\vec{g}/cm^2$; 120 $\vec{kg}$

7. Una pileta de natación tiene fondo inclinado, de modo que en un extremo hay 1,20 m de profundidad y en el otro 2,80 m. Calcular la presión que ejerce el agua en el fondo, en las partes menos y más profundas.

R.: 120 $\vec{g}/cm^2$; 280 $\vec{g}/cm^2$

8. ¿Cuál es la presión, en el fondo, de un tanque con nafta de 1,30 m de altura, sabiendo que el peso específico de la nafta es 0,67 $\vec{g}/cm^3$? Suponiendo que el tanque sea cilíndrico y de 60 cm de diámetro, ¿cuál es la fuerza total en el fondo del tanque?

R.: P = 87,1 $\vec{g}/cm^2$; F = 246,145 $\vec{kg}$

9. El agua de un tanque está a 4 m de altura sobre un caño que corre por la calle. En éste se produce un agujero. ¿Qué altura alcanzará el agua que sale por el agujero? ¿Qué presión habría que ejercer sobre él para evitar la salida del agua?

R.: 400 $\vec{g}/cm^2$

10. Sobre un pistón de 10 cm de diámetro hay una columna de agua de 70 cm de alto. ¿Qué fuerza se ejerce sobre el pistón? ¿Qué fuerza se ejercería si se tratara de mercurio en lugar de agua?

R.: 5,495 $\vec{kg}$; 74,732 $\vec{kg}$

11. Un tubo de vidrio de 50 cm de altura contiene mercurio. ¿Qué presión se ejerce sobre el extremo cerrado, cuando el tubo se coloca verticalmente?

R.: 680 $\vec{g}/cm^2$

12. ¿Qué altura tendrá una columna de mercurio que equilibre a una de agua de 10,33 m?

R.: 75,95 cm

13. ¿A qué profundidad habría que sumergirse en el mar, para encontrar una presión de 50 $\vec{kg}/cm^2$?

R.: 487,8 m

14. La presión de una columna de agua sobre un recipiente equilibra la producida por una columna de mercurio de 100 cm de alto. ¿Qué altura tiene la columna de agua?

R.: 13,6 m

15. Sobre el fondo de un tubo abierto, de 4 cm^2 de sección, se ha colocado un disco metálico que pesa 2 g. El tubo se sumerge en nafta, hasta que el disco está 10 cm bajo el nivel del líquido. ¿Cuánta nafta habrá que echar en el tubo para que el disco caiga? Si en lugar de nafta se echara agua, ¿qué cantidad sería necesaria?

R.: 37,1 cm^3; 26 cm^3

16. ¿Cuál es el peso específico de un líquido, si 25 cm de él equilibran a 20 cm de agua?

R.: 0,8 $\vec{g}/cm^3$

17. De acuerdo con el problema anterior, indique usted cómo procedería para medir el peso específico del querosene; mídalo y compare el valor que obtiene con el que figura en la tabla.

18. Dos vasos comunicantes cuyas secciones miden 16 cm^2 y 4 cm^2 contienen mercurio; si el tubo estrecho se llena con 150 $\vec{g}$ de agua, ¿cuánto subirá el mercurio en el tubo ancho?

R.: 0,55 cm

19. Un cubo de 10 cm de arista está sumergido, con su cara superior, a 60 cm bajo el nivel del agua. Calcular la fuerza hacia abajo sobre la cara superior, y la fuerza hacia arriba sobre la cara inferior.

R.: 6 $\vec{kg}$; 7 $\vec{kg}$

20. Compare la diferencia entre las fuerzas del problema anterior con el peso de un volumen de agua igual al del cubo.

21. Si el cubo fuera de plomo, ¿cuál sería la diferencia entre el peso del cubo y el peso de igual volumen de agua? ¿Flotaría el cubo si se lo dejara en libertad?

R.: 10 $\vec{kg}$. No.

4 EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

¡Eureka! ... ¡Eureka!

En el sur de Sicilia (Italia) existe una ciudad milenaria, llamada Siracusa. Hace más de dos mil años vivió allí un hombre extraordinario: Arquímedes. Fue físico, matemático, inventor, ingeniero militar. La vida de este sabio está llena de anécdotas, y tendremos ocasión de hablar de él en más de una oportunidad.

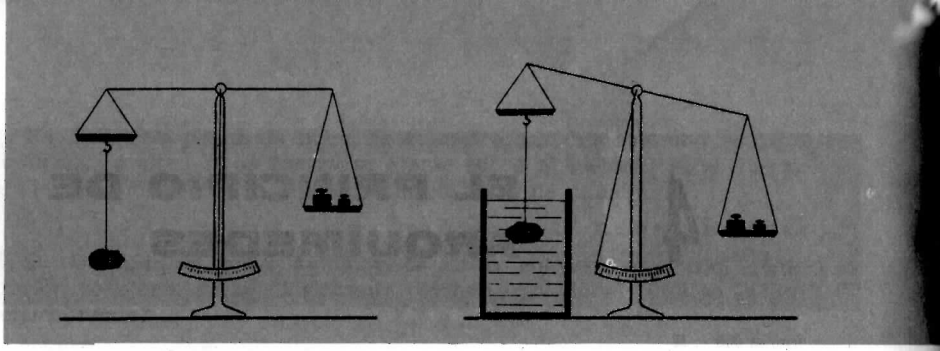
Ahora nos referiremos a la más célebre de sus anécdotas: Hierón, tirano de Siracusa, entregó a su joyero oro y plata para que le hiciese una corona. Cuando estuvo hecha, Hierón sospechó que hubiera reemplazado parte del oro por algún otro metal, y pidió a Arquímedes que, sin destruir la corona, averiguase si tenía o no la cantidad de oro debida.

El sabio anduvo mucho tiempo preocupado por el problema, entre otras cosas por una de las condiciones que le había impuesto el tirano: *si no lo resolvía, le cortaba la cabeza.* Incluso mientras se bañaba pensaba en él, y eso lo salvó. Un día, mientras tomaba el baño de costumbre y pensaba en la corona, tuvo uno de esos rasgos característicos del genio: *vinculó dos hechos aparentemente inconexos.*

Arquímedes.

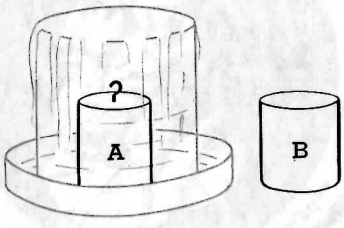
Desde hacía tiempo había notado que cuando él se sumergía en el agua, ésta lo empujaba hacia arriba, pero sólo en ese momento tuvo el chispazo genial y advirtió que *podía resolver el problema de la corona sumergiéndola en agua.* Loco de alegría salió corriendo por las calles de Siracusa, mientras gritaba: "¡Eureka!... ¡Eureka!..." que en griego significa: ¡Lo encontré!... ¡Lo encontré!

La gente, a pesar de estar acostumbrada a las distracciones del sabio, lo miraba con asombro, porque en su excitación había olvidado vestirse...



Un cuerpo sumergido en un líquido recibe una fuerza de abajo hacia arriba denominada empuje.

El empuje hacia arriba



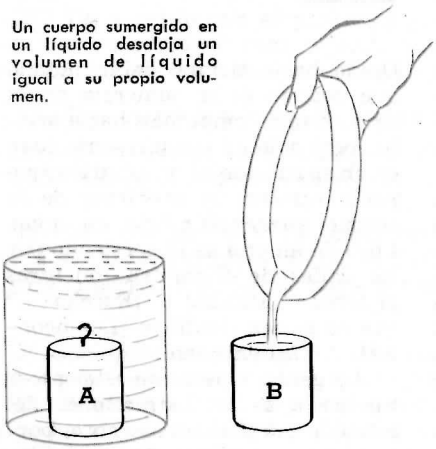
Cuando se sumerge un cuerpo en un líquido *parece* que pesara menos. Lo sentimos personalmente cuando nos sumergimos en una pileta, o cuando extraemos un balde de agua de un pozo. Es fácil comprobarlo con una balanza. Equilibramos la piedra de la izquierda; al sumergirla en agua, el equilibrio se rompe. Conclusión:

Todo cuerpo sumergido recibe una fuerza de abajo hacia arriba.

Esa fuerza se llama *empuje*.

Volumen del líquido desalojado

Un cuerpo sumergido en un líquido desaloja un volumen de líquido igual a su propio volumen.



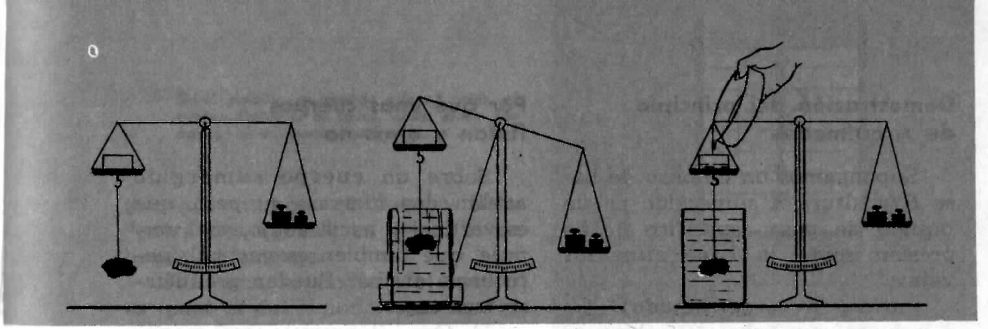
De los dos cilindros de la figura, el hueco (B) contiene *exactamente* al macizo (A). Al sumergir a éste se derrama cierto volumen de agua, que ocupa exactamente el hueco. Conclusión:

Todo cuerpo sumergido totalmente desaloja un volumen de líquido exactamente igual al suyo.

Claro está que si se lo sumerge sólo en parte, el volumen V′ de líquido desalojado será igual al volumen V′ de la parte sumergida.

Valor del empuje

Arquímedes conocía perfectamente las dos conclusiones a que hemos llegado. Pero ignoraba la



Cuando se sumerge un cuerpo en un líquido, el empuje que recibe es igual al peso del líquido desalojado.

vinculación entre el empuje y el líquido desplazado. El chispazo del genio los relacionó, y le hizo salir corriendo a efectuar las mediciones que se le habían ocurrido.

1) Del platillo corto de una balanza colgó una piedra; en ese platillo colocó un vasito vacío; luego equilibró la balanza con pesas.

2) Sumergió la piedra en un vaso que tenía agua hasta el borde: se rompió el equilibrio de la balanza y se derramó agua, que recogió en otro recipiente.

3) En el vasito colocado en el platillo volcó el agua recogida.

Al terminar la tercera operación, la balanza recobró su equilibrio. Conclusión:

El empuje es igual al peso del líquido desalojado.

Reuniendo estas conclusiones, obtenemos el enunciado del

Principio de Arquímedes: todo cuerpo sumergido en un líquido recibe un empuje, de abajo hacia arriba, igual al peso del líquido desalojado.

EJ.: *Un cuerpo de 100 cm³ pesa 500 $\vec{g}$ en el aire. ¿Qué empuje recibe cuando se lo sumerge en agua? ¿Cuánto pesa sumergido?*

El empuje es igual al peso del agua desalojada, a cuyo peso específico llamamos ϱ. Luego:

$$E = V\varrho = 100\ cm^3 \quad 1\frac{\vec{g}}{cm^3} = 100\,\vec{g}.$$

Sumergido, su peso P' es la diferencia entre su peso P en el aire y el empuje E:

$$P' = P - E = 500\,\vec{g} - 100\,\vec{g} = 400\,\vec{g}.$$

EJ.: *¿Cuánto pesará el mismo cuerpo del problema anterior, si se lo sumerge en alcohol, cuyo peso específico es $\varrho = 0{,}8\ \vec{g}/cm^3$?*

R.: $420\,\vec{g}$

Como consecuencia de estos dos ejercicios, resulta claro que:

En líquidos distintos, los empujes son diferentes.

PROBLEMA: *¿Cuál es el volumen de un cuerpo cuyo peso disminuye $40\,\vec{g}$ al ser sumergido en agua?*

Disminución de peso: $E = 40\,\vec{g}$.

$$E = V\varrho \therefore V = \frac{E}{\varrho} = \frac{40\,\vec{g}}{1\,\vec{g}/cm^3} = 40\ cm^3$$

Ése es el volumen del líquido desalojado. Pero es igual al volumen del cuerpo.

Demostración del principio de Arquímedes

Supongamos un cilindro de base B y altura h sumergido en un líquido de peso específico ϱ. La presión sobre la base superior vale:

$$p' = \varrho \cdot h' \quad (\varrho \text{ del líquido})$$

y la fuerza que sobre ella ejerce el líquido es:

$$F' = p' B = B h' \varrho$$

En la base inferior, la presión es:

$$p'' = h'' \varrho,$$

y la fuerza es:

$$F'' = p'' \cdot B = B h'' \varrho.$$

Entre las fuerzas hay una diferencia hacia arriba (el empuje E):

$$E = F'' - F' = B h'' \varrho - B h' \varrho =$$
$$= B (h'' - h') \varrho = B h \varrho = V \varrho$$

Como el volumen del cilindro es igual al del líquido desalojado, el empuje E es igual al peso del líquido desalojado.

NOTA: Un *principio* es en física lo que un *postulado* en matemática. ¿Cómo es que podemos demostrar el de Arquímedes? Porque actualmente no es un principio, como lo fue en la época de su descubrimiento, y se lo sigue llamando así por razones históricas.

Por qué unos cuerpos flotan y otros no

Sobre un cuerpo sumergido actúan dos fuerzas: su *peso*, que es vertical y hacia abajo, y el *empuje*, que también es vertical, pero hacia arriba. Pueden producirse tres casos:

1) Que el empuje sea menor que el peso: en este caso, el cuerpo se hunde hasta el fondo.

2) Que el empuje sea igual al peso: el cuerpo queda "flotando entre dos aguas".

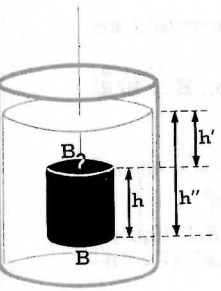
3) Que el empuje sea mayor que el peso: el cuerpo sube hasta la superficie, y aflora en parte.

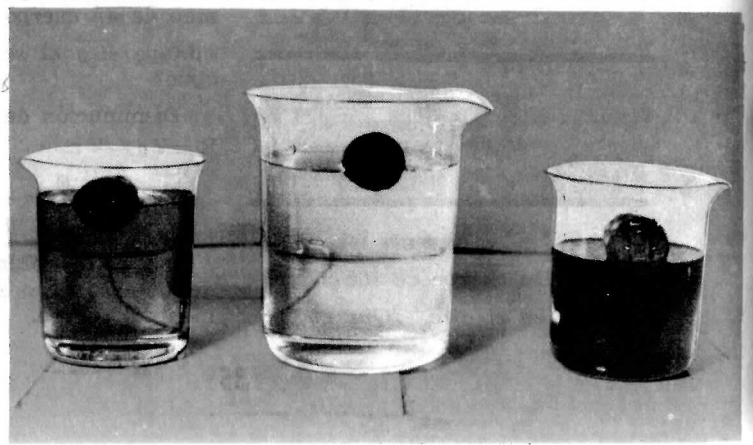
Como *Peso del cuerpo* $= V \varrho_c$ (*peso específico del* cuerpo), y como *empuje* $= V \varrho_e$ (*peso específico del* líquido), podemos establecer las siguientes relaciones:

1) Si $P > E$, lo que implica $\varrho_c > \varrho_e$, entonces el cuerpo se hunde:

Si el peso específico de un cuerpo es mayor que el del líquido en el cual se lo sumerge, entonces el cuerpo se hunde hasta el fondo.

2) Si $P = E$, lo que implica





Tres corchos iguales flotando (de izquierda a derecha): kerosene (0,8 g/cm³); agua (1 g/cm³), y ácido sulfúrico (2,4 g/cm³). Obsérvese que los volúmenes sumergidos son distintos.

Si el empuje es mayor que el peso, el cuerpo flota; si es igual, nada entre dos aguas; si es menor, se hunde.

$\varrho_c = \varrho_e$, entonces el cuerpo flota "entre dos aguas", es decir, ni se hunde ni emerge.

Si el peso específico del cuerpo es igual al del líquido, entonces el cuerpo flota entre dos aguas.

3) Si $P < E$, lo que implica $\varrho_c < \varrho_e$, entonces el cuerpo flota:

Si el peso específico del cuerpo es menor que el del líquido, entonces el cuerpo flota en ese líquido.

EJEMPLO: El hierro se hunde en el agua porque:

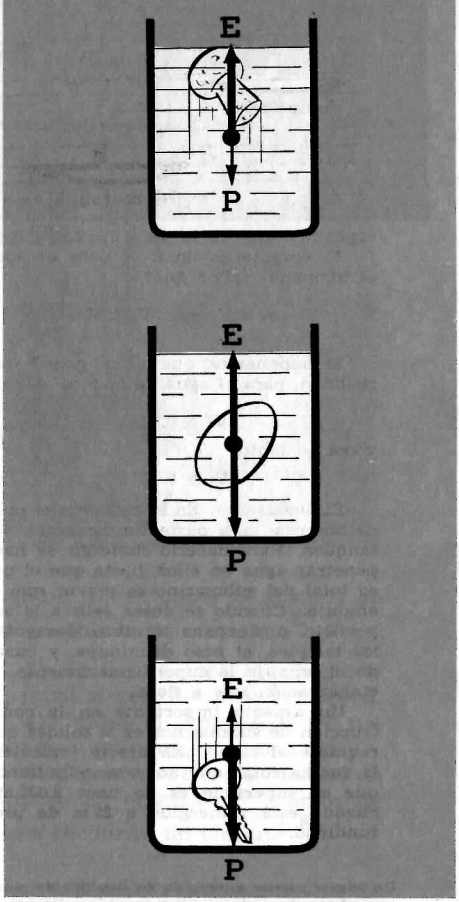
$$\varrho_{Fe} = 7{,}8\ \vec{g}/cm^3 > \varrho_a = 1\ \vec{g}/cm^3$$

pero flota en mercurio porque:

$$\varrho_{Fe} = 7{,}8\ \vec{g}/cm^3 < \varrho_{Hg} = 13{,}6\ \vec{g}/cm^3$$

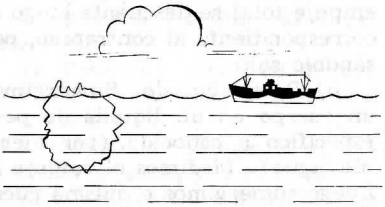
POR QUÉ FLOTA UN BARCO. El principal material de un barco es el hierro o el acero. ¿Cómo puede flotar, si el peso específico del hierro es mayor que el del agua? Damos la respuesta formulando otras preguntas: ¿Cómo puede flotar una botella vacía, si el peso específico del vidrio es mayor que el del agua? ¿Flota si se la llena de agua?

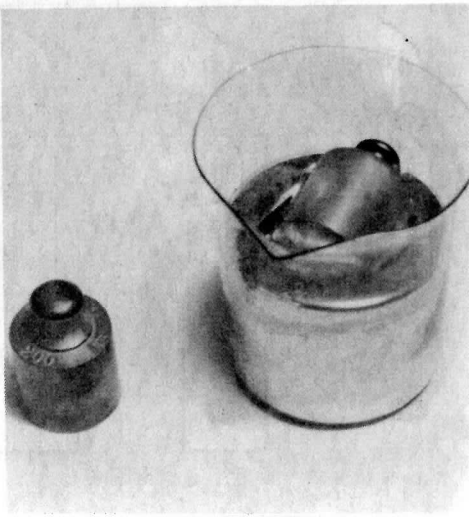
EL PELIGRO DE LOS TÉMPANOS. Los témpanos son grandes bloques de hielo que vagan por los mares en latitudes extremas, constituyendo un serio peligro para la navegación, sobre todo porque sólo emerge de ellos una pequeña parte del total. En efecto: sea V el volumen total del témpano; V_s el volumen sumergido, y V_e el emergente. El peso

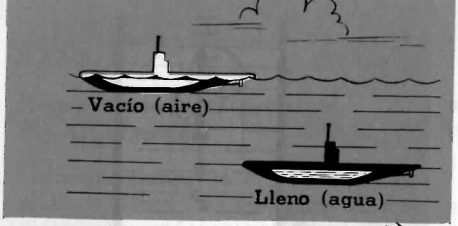


En el mercurio, una pesa flota.

De un témpano, sólo flota la décima parte debido a la relación entre peso y empuje.







específico del hielo es $\varrho_H = 0{,}92\ \vec{g}/cm^3$.

El empuje es igual al peso de todo el témpano. (¿Por qué?):

$$V_s \cdot \varrho_a = V \cdot \varrho_H \therefore V_s = V \cdot \frac{\varrho_H}{\varrho_a}$$

Si suponemos que $\varrho_a = 1\ \vec{g}/cm^3$ (en realidad, para el agua de mar es mayor)

$$V_s \cong 0{,}9\ V$$

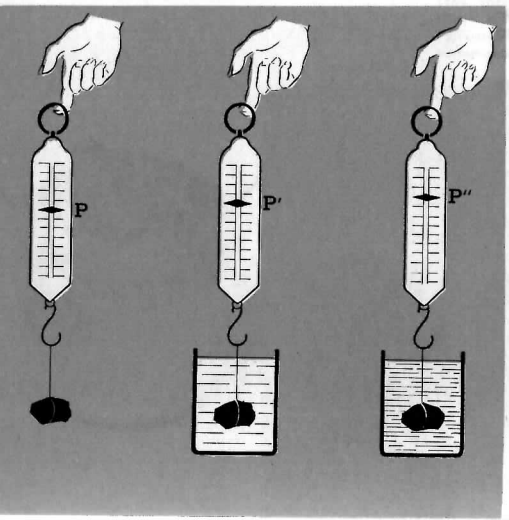
y por lo tanto:

$$V_e \cong 0{,}1\ V$$

El submarino. En el esquema se puede observar una parte fundamental: los tanques. Para hacerlo sumergir se hace penetrar agua en ellos, hasta que el peso total del submarino es mayor que el empuje. Cuando se desea salir a la superficie, poderosas bombas desagotan los tanques, el peso disminuye, y cuando el empuje lo supera nuevamente, la embarcación sale a flote.

Un aspecto importante en la construcción de submarinos es la solidez que requiere el casco. En efecto: calcúlese la fuerza total que soporta, admitiendo que su superficie es de unos 2 000 m², cuando está sumergido a 25 m de profundidad.

Un mismo cuerpo sumergido en líquidos de pesos específicos diferentes, recibe empujes distintos.



Pesos específicos

Por definición, el peso específico ϱ es el cociente entre el peso y el volumen. Para determinarlo hay que medir, pues, el peso y el volumen del cuerpo.

Determinación del peso específico

a) De un sólido. Con un dinamómetro o una balanza se puede medir el peso P del cuerpo en el aire, y el empuje E al sumergirlo en un líquido de peso específico ϱ' conocido, por ejemplo, agua. Como el empuje es:

$$E = V\varrho'$$

(ϱ', peso específico del líquido), y el volumen del cuerpo es igual al del líquido desalojado, se tienen los datos necesarios.

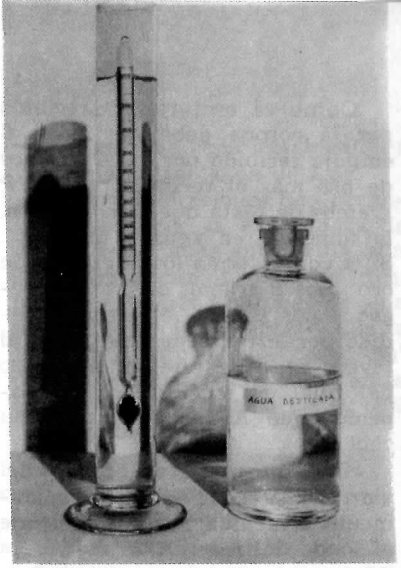
Ej.: *Un cuerpo pesa* $P = 200\ \vec{g}$ *en el aire y* $160\ \vec{g}$ *en alcohol. Calcular su peso específico* ϱ, *sabiendo que el del alcohol es* $\varrho' = 0{,}8\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$.

R.: $\varrho = 4\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$

Ej.: *El cuerpo del problema anterior pesa en el agua* $150\ \vec{g}$. *Comprobar que se obtiene el mismo valor* $\varrho = 4\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$.

Si el sólido flota, se lo hace hundir con un contrapeso; del empuje total se descuenta luego el correspondiente al contrapeso, pesándolo solo.

b) De un líquido. Sumergimos un cuerpo en un líquido de peso específico ϱ conocido (por ejemplo, agua). Medimos el empuje E. Luego sumergimos el mismo cuer-



Densímetro flotando en agua destilada.

po en el líquido cuyo peso específico ϱ' queremos conocer; el empuje es ahora E'. Tenemos:

$$E = V\varrho$$
$$E' = V\varrho'$$

Haciendo el cociente:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\varrho}{\varrho'} \therefore \varrho' = \varrho \frac{E'}{E}.$$

EJEMPLO: *Calcular el peso específico de un líquido, sabiendo que un cuerpo sumergido en agua experimenta un empuje de* $20\,\vec{g}$, *y en dicho líquido,* $25{,}6\,\vec{g}$. Peso específico del agua: $\varrho = 1\,\frac{\vec{g}}{cm^3}$

$$\varrho' = \varrho \frac{E'}{E} =$$

$$= 1\,\frac{\vec{g}}{cm^3} \cdot \frac{25{,}6}{20} = 1{,}28\,\frac{\vec{g}}{cm^3}$$

El problema de la corona. Hierón de Siracusa había entregado a su joyero un peso O de oro y un peso P de plata para que construyera la corona que preocupó a Arquímedes. El artífice construyó una cuyo peso C era igual a la suma de O y P. Hierón quería saber si, a pesar de que el peso total de la corona era igual al peso total del oro y plata entregados, el joyero había o no empleado todo el oro recibido.

El problema consiste en: ¿Qué cantidad de oro y qué cantidad de plata hay en una corona de oro y plata que pesa C?

Se cree que Arquímedes lo resolvió así:

1) Pesó una cantidad de oro cuyo peso C era igual al peso total de la corona.

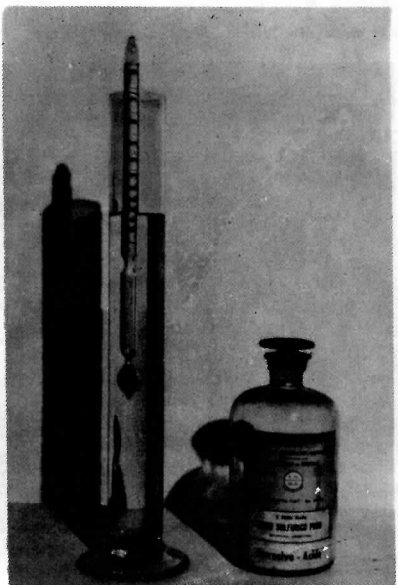
2) Midió el empuje E al sumergirla en agua, y razonó así:

Si C gramos de oro reciben un empuje E', entonces O gramos de oro recibirán un empuje $\frac{E \cdot O}{C}$.

3) Pesó una cantidad de plata C, igual al peso total de la corona.

4) Midió el empuje E' al sumergirla en agua, y razonó así:

Si C gramos de plata reciben un empuje E', entonces P gramos de plata recibirán un empuje $\frac{E' \cdot P}{C}$.



El mismo densímetro flotando en ácido sulfúrico.

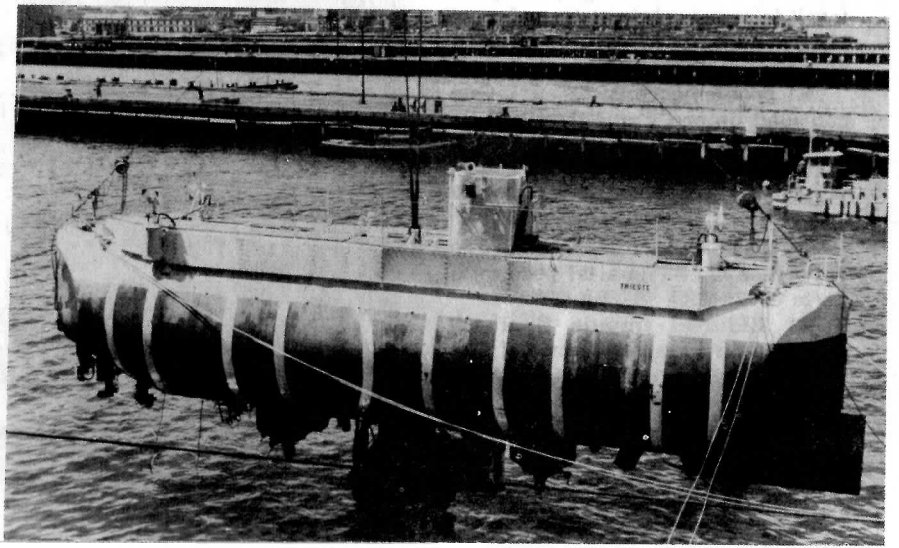
Como el empuje E'' recibido por la corona debe ser igual al empuje recibido por los O gramos de oro más el recibido por los P gramos de plata que la componen, la sumergió en agua y midió E''. Si la corona tenía los O gramos de oro y los P gramos de plata entregados por Hierón, el empuje medido por Arquímedes fue E''; si el joyero fue deshonesto, no. Pero del final del cuento... ¡sólo sabemos que Arquímedes salvó su cabeza!

La conquista del fondo del mar. La presión aumenta rápidamente a medida que se desciende al fondo del mar. A 25 metros es de aproximadamente 2,5 $\vec{kg}/cm^2$; a 50 m es de 5 $\vec{kg}/cm^2$; a 100 m es de 10 $\vec{kg}/cm^2$.

Con los sistemas actuales, los buzos pueden descender hasta unos 100 m, pero más allá es imposible con escafandras flexibles. Este hecho tiene gran importancia en el salvamento de submarinos. Lo más peligroso es la vuelta a la superficie, pues el buzo debe volver a la presión atmosférica, de 1 $\vec{kg}/cm^2$, después de haber soportado las grandes presiones submarinas. Para evitar trastornos físicos, debe hacerlo poco a poco.

Desde hace muchos años que se ha trabajado en proyectos para explorar el fondo del mar. Se han construido aparatos que han extraído peces desde profundidades de 6 000 m, pero quien debe ser considerado como el precursor de la exploración del mar a grandes profundidades es William Beebe, de la Sociedad Zoológica de Nueva York, quien en 1934 descendió con la batisfera diseñada por él, a 906 m de profundidad. Posteriormente Augusto Piccard, científico suizo, descendió el 23 de enero de 1960 hasta 10 916 m, en la fosa del archipiélago de Las Marianas, en el Pacífico, en el "Trieste", batiscafo diseñado por él y construido en Italia. El "Trieste" tiene el aspecto de un submarino que lleva en su parte inferior una esfera de aluminio, de paredes de 10 cm de espesor, con ventanas de lucite para poder observar a través de

El batiscafo Trieste, diseñado por Piccard.



ellas, con la ayuda de potentes reflectores. Para controlar el movimiento vertical lleva toneladas de esferas de acero, sujetas al casco por electroimanes: basta cortar la corriente para que las esferas se suelten y el batiscafo suba, o al menos disminuya la velocidad del descenso. Por el contrario, si se quiere aumentar la velocidad, se abren los grifos de los tanques donde lleva nafta (que se usa como lastre y no como combustible) y se deja entrar agua de mar.

Estas exploraciones han permitido comprobar la existencia de una extraña fauna submarina, aun a tan extremas profundidades, incluso enormes tiburones de una nueva especie. Piénsese que a 10 000 m de profundidad, cada cm^2 de la superficie es apretado hacia adentro con una fuerza de... ¡100 toneladas!

Tabla de Pesos Específicos Sólidos (en $\vec{g}/cm^3$) y de Líquidos (en $\vec{g}$/litro)

Aceite de oliva	0,92	Cuarzo	2,65
Agua	1	Estaño	7,3
Agua de mar	1,025	Granito	2,7
Alcohol	0,79	Hielo	0,917
Aluminio	2,7	Hierro	7,85
Ámbar	1,01	Leche	1,028
Azúcar	1,6	Mercurio	13,6
Azufre	2,1	Nafta	0,7
Caucho	0,9	Níquel	8,6
Celuloide	1,4	Oro	19,3
Cinc	7,15	Petróleo	0,75
Cloruro de sodio (sal común)	2,1	Plata	10,5
Cobre	8,5	Platino	21,4
Corcho	0,22	Plomo	11,3
Cristal	3,3	Tiza	2,5
		Vidrio	2,5

Vapores y Gases (en $\vec{g}$/litro, a 0°C, y 1 at)

Ácido carbónico	1,98	Éter sulfúrico	2,59
Agua	0,62	Hidrógeno	0,09
Alcohol	1,61	Mercurio	6,97
Amoníaco	0,76	Nitrógeno	1,26
Cloro	3,18	óxido carbónico	1,25
Cloroformo	4,20	Oxígeno	1,43

Preguntas

1. ¿Qué ocurre con la línea de flotación de un barco cuando pasa del río de la Plata al océano Atlántico?
2. La leche aguada, ¿es de mayor o de menor peso específico que la pura?
3. ¿Flota el oro en el mercurio?

4. ¿Por qué es difícil ahogarse en la laguna de Carhué?

5. ¿Cómo se determinará el peso específico de un sólido como el azúcar, que se disuelve en el agua?

6. ¿Por qué son tan grandes los flotadores de un hidroavión?

7. Un submarino sumergido dispara un torpedo de 2 toneladas. ¿Le afectará de alguna manera esa pérdida de peso?

8. Un cilindro de madera se apoya cuidadosamente en el fondo de un recipiente vacío; luego se va echando agua suavemente, por las paredes del recipiente, hasta cubrir el cilindro, cuya base inferior, en contacto con el recipiente, *sigue sin mojarse*. ¿Flotará el cilindro?

Problemas

1. Un cubo de 10 cm de arista está sumergido en agua. Su cara superior está horizontal, y a 20 cm por debajo del nivel libre del líquido. ¿Cuál es la fuerza total que actúa sobre la cara superior? ¿Cuál es la fuerza total que actúa sobre la cara inferior?

R.: 2 000 $\vec{g}$ y 3 000 $\vec{g}$, respectivamente

2. ¿Qué relación hay entre la diferencia de las fuerzas del problema anterior, y el peso de un volumen de agua igual al volumen de aquel cubo? Como consecuencia, enunciar el principio de Arquímedes.

3. ¿Qué empuje recibe un cubo de 3 cm de arista, sumergido en alcohol y su cara superior a una profundidad de 10 cm? ¿Y a 15 cm?

R.: 21,3 $\vec{g}$

4. ¿Qué fuerza es necesaria para mantener suspendido en el aire un bloque de granito de 10 cm de arista? ¿Cuál sería la fuerza, si el bloque estuviera sumergido en agua?

R.: 2,700 $\vec{kg}$; 1,700 $\vec{kg}$

5. Una caja de madera de 40 cm de largo y 20 cm de ancho, abierta por su parte superior, flota en el agua. Se coloca en la caja un cuerpo que pesa 2 $\vec{kg}$, y se observa que se hunde hasta 14 cm. ¿Cuánto pesa la caja?

R.: 9,200 $\vec{kg}$

6. Supongamos que un cubo de hierro de 10 cm de arista flota en mercurio con una cara horizontal. ¿Qué porción del cubo emerge?

R.: 423 cm^3

7. ¿Qué habrá que hacerle a una esfera hueca, de 10 cm de diámetro y que pesa 80 $\vec{g}$, para que flote entre dos aguas, si se la sumerge en alcohol?

R.: Agregarle 333,5 $\vec{g}$

8. ¿Cuál es el peso específico del hierro, si una llave de ese metal pesa en el aire 24,2 $\vec{g}$ y en el agua 21,1 $\vec{g}$?

R.: 7,8 $\vec{g}/cm^3$

9. ¿Cuánto pesa 1 $\vec{kg}$ de hierro sumergido en agua?

R.: 872 $\vec{g}$

10. Si se sumergen 22,6 $\vec{g}$ de sulfato de cobre en nafta de peso específico 0,66 $\vec{g}/cm^3$, reciben un empuje de 6,6 $\vec{g}$. ¿Cuál es el peso específico del sulfato de cobre?

R.: 2,26 $\vec{g}/cm^3$

11. Si un trozo de vidrio pesa 25 $\vec{g}$ en el aire, 14 $\vec{g}$ en el agua y 17 $\vec{g}$ en alcohol, ¿cuál es el peso específico del vidrio, y cuál el del alcohol?

R.: 2,27 $\vec{g}/cm^3$; 0,73 $\vec{g}/cm^3$

12. Un trozo de metal se coloca en un vaso lleno de mercurio hasta los bordes. Se derraman 78 $\vec{g}$ de mercurio. El mismo cuerpo pesa, sumergido en el agua, 68 $\vec{g}$. ¿Cuál es el peso específico del metal?

R.: 12,9 $\vec{g}/cm^3$

13. Un anillo de oro pesa 9 $\vec{g}$ en el aire y 8,47 $\vec{g}$ en el agua. El anillo, ¿puede ser de oro puro?

14. ¿Cuál es el peso específico de una medalla hecha con partes iguales de oro y cobre? ¿Y si estuviera compuesta de 1/3 y 2/3, respectivamente?

R.: 13,9 $\vec{g}/cm^3$ y 12,1 $\vec{g}/cm^3$, respectivamente

15. Un densímetro tiene 60 cm de longitud y 1 cm^2 de sección. Colocado en agua pura se sumergen 54 cm, y en ácido sulfúrico sólo 30 cm. ¿Cuál es el peso específico del ácido sulfúrico? ¿Qué peso de agua y qué peso de ácido desplazó?

R.: 1,8 $\vec{g}/cm^3$; 54 $\vec{g}$ y 54 $\vec{g}$

16. En un recipiente se colocan mercurio y agua. Un cilindro de hierro de 20 cm de altura flota en la superficie de separación de los dos líquidos, sumergido 10,7 cm en el mercurio. ¿Cuál es el peso específico del hierro?

R.: 7,7 $\vec{g}/cm^3$

17. ¿Cuál debe ser la relación entre los radios interior y exterior de una esfera de hierro hueca, para que en alcohol flote totalmente sumergida, si el cociente entre el peso específico del alcohol y el del hierro es de 0,1006?

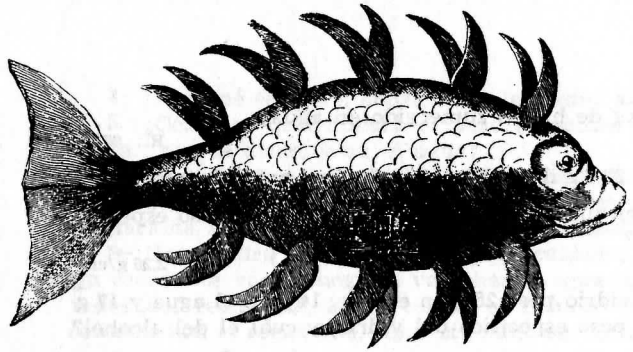
R.: 0,965

18. Para construir un densímetro se ha tomado una varilla de madera que pesa 100 $\vec{g}$. Colocada en agua, y convenientemente tarada, se hunde hasta una cierta marca. Colocada en otro líquido, y para que se sumerja hasta la misma marca, hay que agregar 20 $\vec{g}$ de tara. ¿Cuál es el peso específico de este líquido?

R.: 1,2 $\vec{g}/cm^3$

19. ¿Qué volumen de agua pura debe agregarse a 100 $\vec{g}$ de agua salada de peso específico 1,07 $\vec{g}/cm^3$, para que la mezcla tenga un peso específico de 1,02 $\vec{g}/cm^3$.

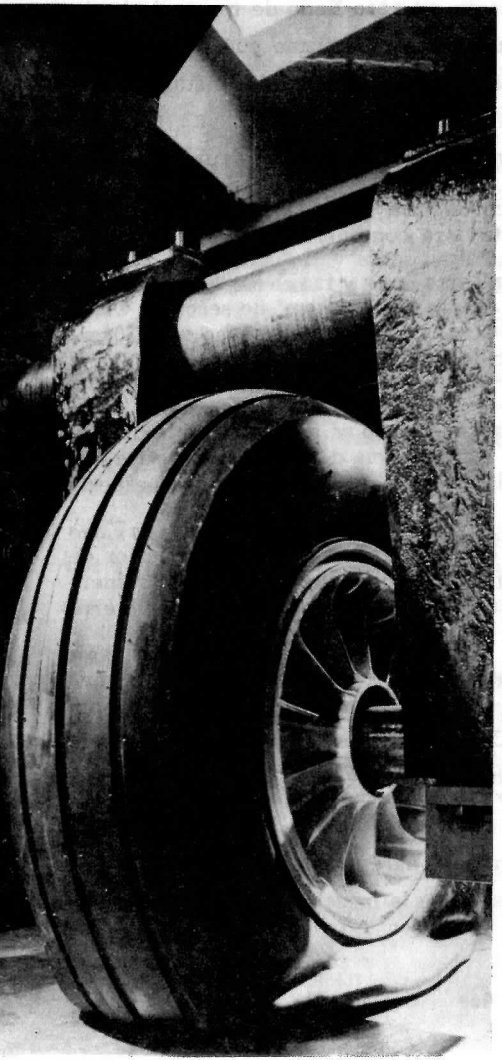
R.: 231,5 cm^3

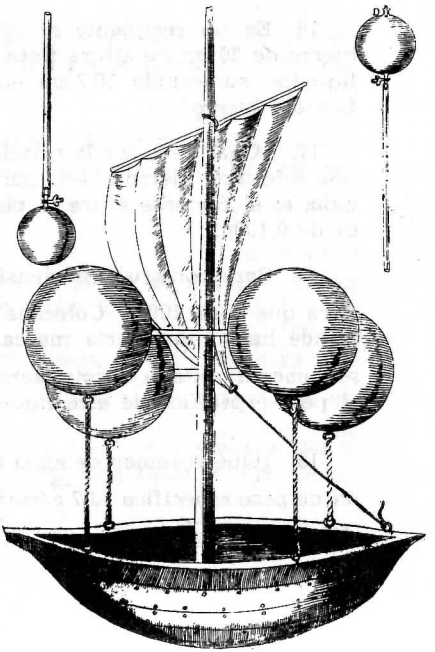


II

NEUMOSTÁTICA

Los gases en reposo





Los gases pesan. Esto lo demostró Galileo. El peso del aire que compone la atmósfera, distribuido por la superficie de la Tierra, debe ejercer una presión, pensó su discípulo Torricelli. Lo comprobó invirtiendo un tubo lleno de mercurio, en un recipiente que también contenía mercurio: el tubo no se vació totalmente. La única explicación era que algo sostenía al mercurio, y ese algo sólo podía ser la presión de la atmósfera. Pascal repitió las experiencias de Torricelli, pero usando agua. Previamente había calculado que necesitaría un tubo de unos 10 metros. Sus cálculos fueron confirmados por la experiencia, pues la altura del agua mantenida por la presión atmosférica fue de 10,33 m. El buen humor de Pascal le hizo repetir la experiencia hasta con vino, para convencer a sus adversarios.

5 LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA

¿Pesan los gases?

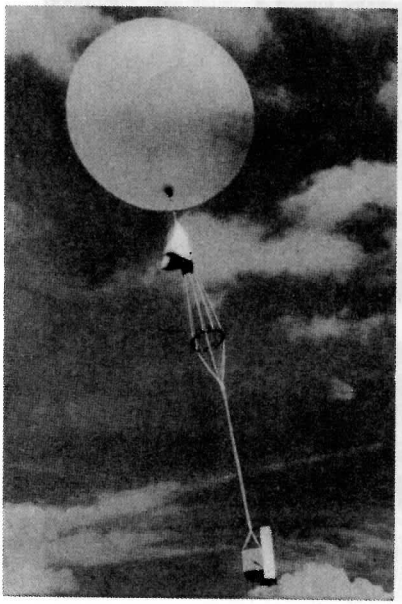
Antiguamente se creía que los gases no pesaban. Este error persistió hasta la época de Galileo (siglo XVII), quien demostró que los gases pesan. Para ello, hizo más o menos lo siguiente:

1) Pesó un recipiente con aire.

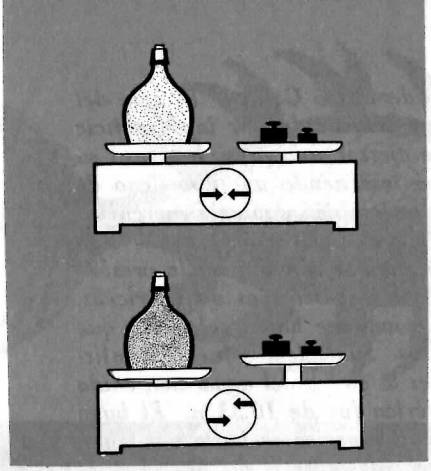
2) Pesó el mismo recipiente con aire comprimido.

En esta segunda prueba había más aire dentro del recipiente, y como la balanza indicó mayor peso, comprobó que el aire pesa.

Peso específico del aire. Puesto que el aire pesa, debe tener un



Lanzamiento de un globo-sonda.



peso específico. ¿Cómo podríamos medirlo?

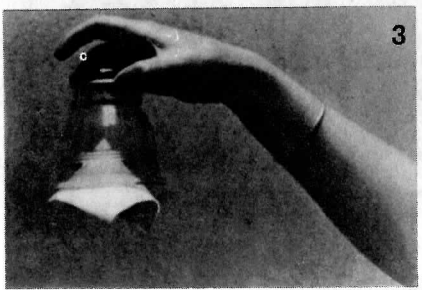
1) Pesamos un balón de 1 litro lleno de aire.

2) Practicamos el vacío dentro del balón, y lo pesamos vacío.

La diferencia es el peso de 1 litro de aire. Encontraremos que

1 litro de aire pesa 1,3 gramos.

Su peso específico es, pues, 1,3 $\vec{g}/dm^3$, o sea 0,0013 $\vec{g}/cm^3$.



Presión atmosférica

La atmósfera, capa de aire que rodea a la Tierra, y cuyo espesor se calcula en unos 500 km, *pesa*, y por lo tanto ejerce una presión sobre las cosas y personas que están en la Tierra, sumergidas en dicha atmósfera, tal como los peces lo están en el agua. Esa presión se llama *presión atmosférica.*

La presión atmosférica se ejerce en todas direcciones, con igual intensidad. Así lo prueban algunas experiencias muy sencillas:

1) Se llena un vaso de agua. Se tapa con un papel y luego se lo invierte. A pesar de que soporta la presión del agua, el papel no cae, pues esa presión es menor que la que ejerce la atmósfera hacia arriba.

Demostración de la presión atmosférica: 1), el aire ejerce hacia arriba una presión mayor que la ejercida hacia abajo por el agua, y el papel no cae; 2), el papel se mojó, entró aire y, al aumentar la presión hacia abajo, el agua cae. Obsérvese cómo el papel es empujado hacia arriba; 3), la posición del papel indica cómo el aire empujaba hacia arriba.

2) Se llena con agua un tubito de los de vainilla, o más delgado; se lo pone boca abajo y el agua no cae: está sostenida por la presión atmosférica.

Toque el agua con el dedo, y observe lo que ocurre.

3) Si se chupa el aire de una bolsa de papel, ésta se contrae en todo sentido.

4) La misma experiencia puede hacerse con una lata. Estando abierta se la calienta fuertemente: sale aire. Se la cierra herméticamente y se la deja enfriar: al poco rato las paredes de la lata se hunden, por la presión de la atmósfera.

5) Si se chupa un líquido con un tubo, aquél sube hasta la boca (como cuando se toma mate, o refrescos con pajita).

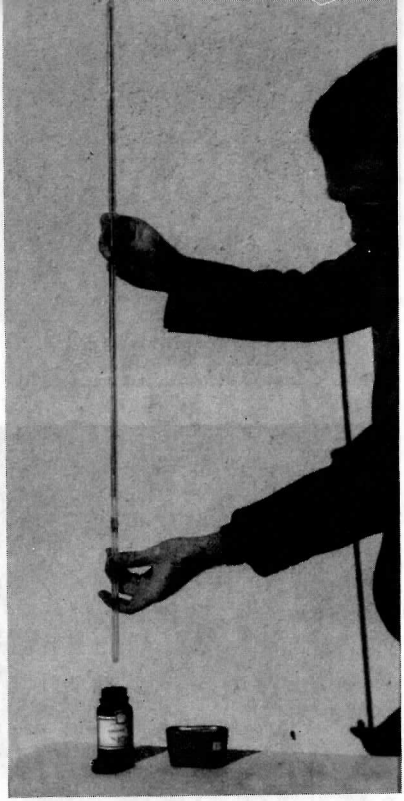
¿Por qué sube? Al chupar extraemos el aire del tubo o la bombilla, y entre las dos superficies del líquido (dentro y fuera) se produce una diferencia de presión. El líquido se mueve hacia donde la presión es menor. En ello se basan las bombas para extraer agua.

UNA "FALLA" MISTERIOSA. Fue justamente algo relacionado con las bombas lo que produjo uno de los principales descubrimientos de la física. En el año 1644, *Galileo*, gran físico italiano de quien hablaremos muchas veces, fue consultado por emisarios del gran duque de Toscana respecto de un hecho extraño. Con el fin de ampliar el sistema de riego, se habían practicado grandes pozos en los jardines del palacio de aquél, y las bombas tenían que extraer agua desde una profundidad de 15 metros. Los ingenieros, con gran asombro, veían que por más que las máquinas trabajaban, no hacían subir el agua más de unos 8 metros.

Galileo estudió el problema, pero no dio con la solución. Fue Evangelista *Torricelli*, uno de sus discípulos, quien dio con la clave.

Al quitar el aire de adentro, el de afuera aplasta la bolsa de papel.

El agua que llena este tubo sin "corcho" es sostenida por la presión atmosférica.



Al invertir el tubo, que estaba lleno de mercurio, unos 76 cm del mismo quedan dentro, sostenidos por la presión atmosférica, que hace una fuerza hacia arriba mayor que el peso del mercurio.

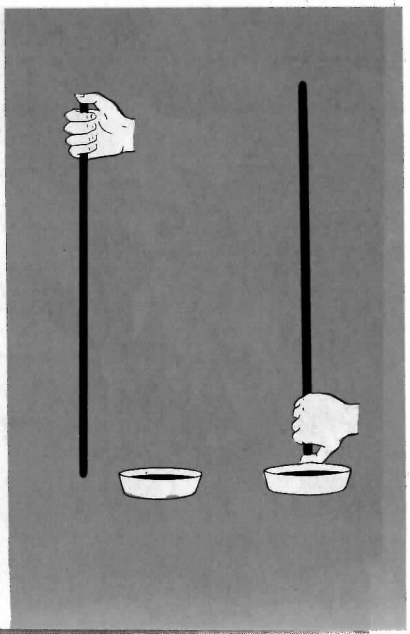
Los antiguos sabios griegos sostenían que el agua subía "por horror al vacío". Según ellos, la materia no podía soportar que se hiciese el vacío: en cuanto se producía, corría horrorizada a llenarlo. Esta fantástica teoría hacía pensar que la materia, agua en nuestro caso, estaba dotada de una especie de sabiduría y hasta de voluntad . . .

Torricelli pensó que todo eso era falso, y que el agua subía por la presión de la atmósfera. En efecto, pensaba, sabemos que el aire pesa; la atmósfera, por alta que sea, debe tener un límite, y el total de la atmósfera debe tener un peso, que ejerce presión sobre la Tierra. Esta presión podrá levantar el agua hasta un cierto nivel, pero no más, y ese nivel sería de diez metros, de acuerdo con lo que sucedía en los pozos de Florencia. Todavía reflexionó más:

¿Qué pasaría si en lugar de bombear agua hubiera que bombear mercurio? Su peso específico es 14 veces mayor que el del agua, de modo que con mercurio sólo se llegaría a una altura 14 veces menor, aproximadamente 76 cm.

Torricelli comunicó sus ideas a Viviani, otro discípulo de Galileo, quien inmediatamente realizó la experiencia que hoy conocemos con el nombre de "experiencia de Torricelli".

EXPERIENCIA DE TORRICELLI. Se llena totalmente de mercurio un tubo de aproximadamente 1 m de largo. Se lo tapa con un dedo, se lo invierte, y se retira el dedo: el mercurio comienza a caer, pero cuando uno cree que todo el mercurio caerá, observa que una gran parte del mismo retrocede violentamente hacia arriba y choca contra la parte superior del tubo, produciendo un ruido metálico, y ya no cae más. ¿Qué lo sostiene? ¿Qué es lo que hace fuerza para equilibrar todo su peso? Y sobre todo, ¿qué lo empujó tan violentamente hacia arriba y por qué? La



El tubo se llena con mercurio, se lo tapa con un dedo y se lo invierte.

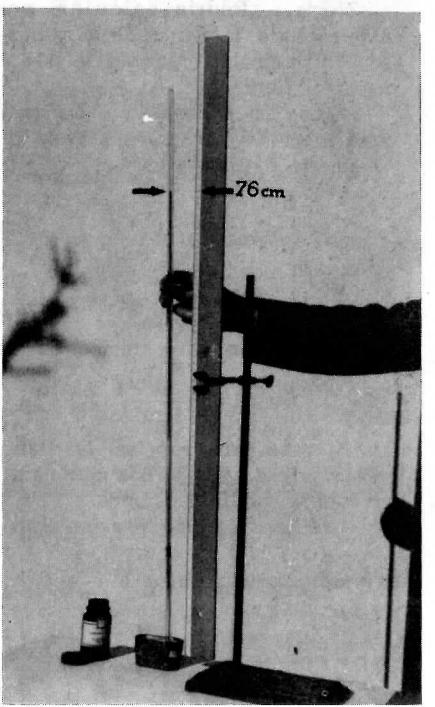
respuesta es una sola: la presión de la atmósfera. Pero..., ¿cómo ha sucedido todo esto? Es muy sencillo: la presión que ejerce una columna de 1 metro de mercurio es mayor que la presión atmosférica (la prueba está en que al apartar el dedo, una parte del mercurio cae). Pero aun cuando el mercurio sale, llega un momento en que la altura del líquido es tal que produce una presión menor que la de la atmósfera, de manera que ésta "vence" al resto de la columna de mercurio y lo empuja violentamente hacia arriba, no dejándolo salir más. La cantidad de mercurio que queda depende, entre otras cosas, del diámetro interior del tubo y del cuidado con que se realice la experiencia. A veces la columna queda cortada en fracciones, y entre una y otra hay aire. Si pudiéramos impedir que entrara aire, quedaría una columna de mercurio sin cortes, y la altura del mercurio dentro del tubo equivaldría exactamente a la atmósfera entera. Esto fue lo que logró Torricelli, de una manera muy ingeniosa, por cierto.

Se llena totalmente de mercurio un tubo de aproximadamente 1 m de largo. Se tapa con un dedo, se invierte y se introduce, siempre tapado, en un recipiente con mercurio. Se retira el dedo, y del tubo sale parte del mercurio, hasta que el nivel alcanza unos 76 cm, donde queda detenido. No sale más mercurio, a pesar de que el extremo inferior, comunicado con el mercurio del recipiente, está abierto. (*Atención*: el mercurio a temperatura ambiente es muy ligeramente tóxico; caliente, es muy tóxico.)

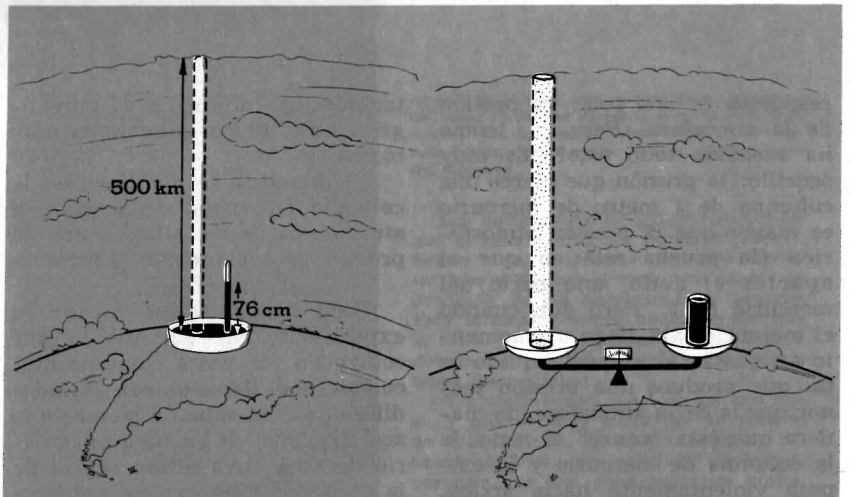
El mercurio se mantiene en la columna en virtud de la presión atmosférica, y su altura mide la presión, de acuerdo con la fórmula

$$p = h\,\varrho$$

Para comprender mejor la experiencia, recordemos lo que ocurre en los vasos comunicantes cuando son llenados con líquidos diferentes. Al tubo de mercurio lo acompañamos de un tubo imaginario de aire, cuya altura sea la de la atmósfera. Se explica entonces que la presión ejercida por la columna de mercurio deba ser equilibrada por la ejercida por la columna de aire. Como el peso específico del aire es pequeño, su columna es muy alta ($H \cong 500$ km); el peso específico del mercurio es muy grande, y su columna muy pequeña ($h \cong 76$ cm); pero las



Se introduce el tubo en una cubeta con mercurio, se quita el dedo, y del tubo sale mercurio, quedando una columna de 76 cm dentro del tubo.



Si las bases son iguales, la columna de aire pesa lo mismo que la columna de 76 cm de mercurio.

presiones de las dos se equilibran.

Si se pudieran pesar las dos columnas, con bases de igual superficie, sus pesos serían iguales, e iguales, por lo tanto, las presiones que ejercen.

NOTA: ¿Podría calcular, por este método, la altura de la atmósfera? Haga las cuentas y no se asuste: piense.

VALOR DE LA PRESIÓN. La presión ejercida por una columna de 76 cm de mercurio es:

$$P = h\varrho = 76\ cm \cdot 13{,}6\ \frac{\vec{g}}{cm^2} =$$

$$= 1\,033\ \frac{\vec{g}}{cm^3}$$

La presión atmosférica es de

$$1\,033\ \frac{\vec{g}}{cm^2}$$

A esta presión se la llama *1 atmósfera*, y se la usa como unidad para medir presiones.

1 atmósfera es una presión aproximadamente igual a $1\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$.

Variaciones de la presión atmosférica. En un mismo lugar, la presión atmosférica varía de un día a otro, y aun dentro de un mismo día.

También varía con la altura del lugar: cuanto mayor es ésta, menor es la presión. En Buenos Aires, la presión media anual es del orden de los 76 cm de mercurio; en cambio en Córdoba es del orden de los 72 cm (Córdoba está a unos 400 metros sobre el nivel del mar).

Otra unidad de presión: los milibares. Todos los días el servicio meteorológico transmite por radio los datos meteorológicos, que incluyen la presión atmosférica, expresada en milibares.

1 milibar equivale a 0,75 mm de mercurio.

EJ.: *Expresar en milibares la presión de 760 mm de mercurio.* Basta dividir por 0,75.

R.: 1 013,3 milibares

EJ.: *El servicio meteorológico informa que la presión atmosférica a una hora determinada es de 1 005 milibares. ¿Cuál es esa pre-*

sión expresada en milímetros de mercurio? R.: 753,75 mm Hg

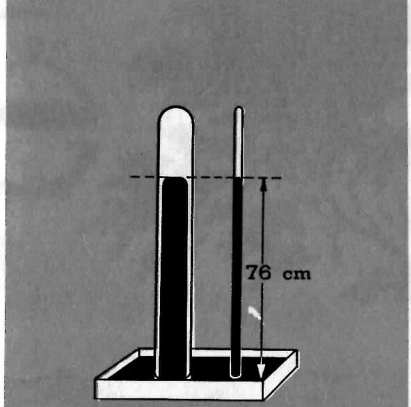
Fuerza que actúa sobre el cuerpo humano. Término medio la superficie de nuestro cuerpo es de unos 15 000 cm²; la fuerza total con que lo comprime la presión atmosférica es de unas 15 toneladas. ¿Cómo es posible? Piénsese que una de las consecuencias del apunamiento (por disminución de la presión atmosférica por la altura) es que suelen sangrar nariz y oídos.

La experiencia del físico Alcalde. En 1654, Otto de *Guericke*, alcalde de Magdeburgo (Alemania), inventor de la primera bomba para hacer el vacío, realizó en presencia del emperador un experimento que causó enorme sensación en su época. Utilizó dos semiesferas (por eso se llama experiencia de los *hemisferios* de Magdeburgo) de metal, huecas, que podían unirse perfectamente. Su diámetro era de 55 cm. Estando llenas de aire, no había ninguna dificultad en separarlas. Luego hacía el vacío y enganchaba caballos que tiraban de cada hemisferio. Se necesitaron dieciséis caballos, ocho de cada lado, para poder separarlas.

Las experiencias de Pascal. Las experiencias de Torricelli llegaron a oídos de Blas Pascal, que en la misma época vivía en la ciudad de Ruan. Entusiasmado con las ideas del físico italiano, repitió las experiencias y se convenció de que aquél tenía razón. Además, aprovechando que en su villa se construían excelentes tubos de vidrio, hizo construir uno de alrededor de once metros de largo, y realizó la experiencia de Torricelli, *pero con agua*, comprobando que alcanzaba una altura de 10,33 metros.

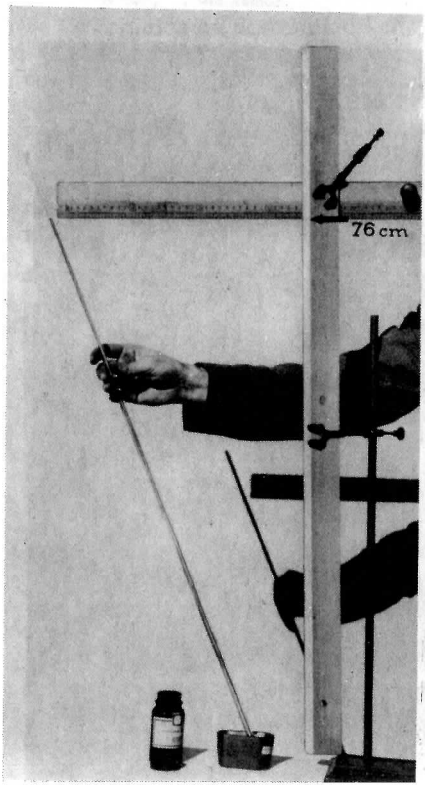
Debido a una disputa con físicos que sostenían todavía la vieja doctrina del horror al vacío, Pascal hizo esta experiencia hasta con vino, aplastando los argumentos de los adversarios.

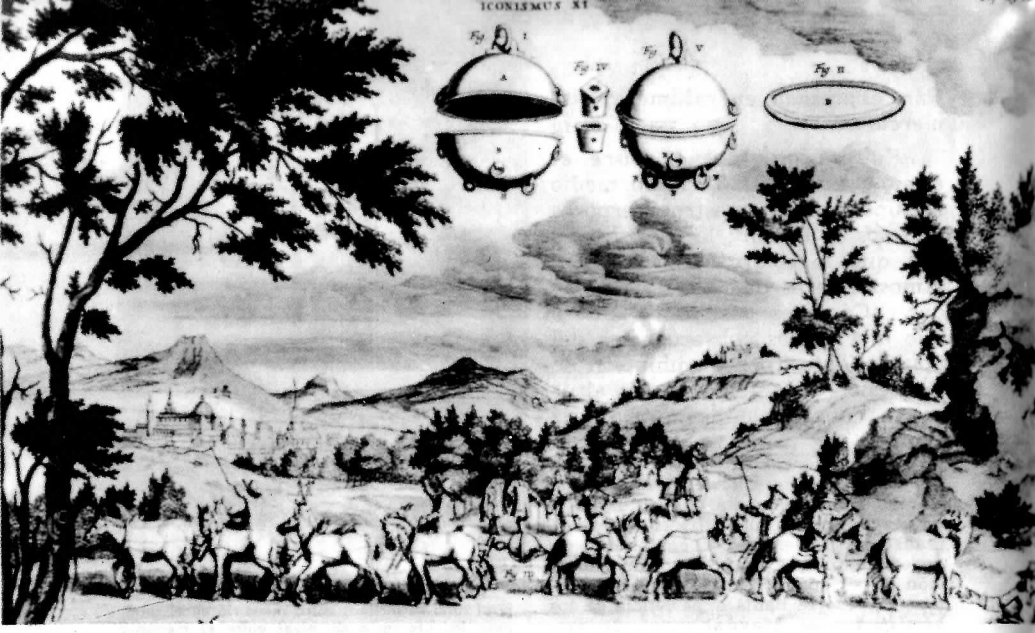
Si la teoría de Torricelli es correcta, pensó Pascal, ¿qué debe ocurrir cuando se hace la experiencia de Torricelli a distintas alturas, subiendo una montaña, por ejemplo? La presión atmosférica debe ir disminuyendo, y por lo tanto la columna de mercurio, que al nivel del



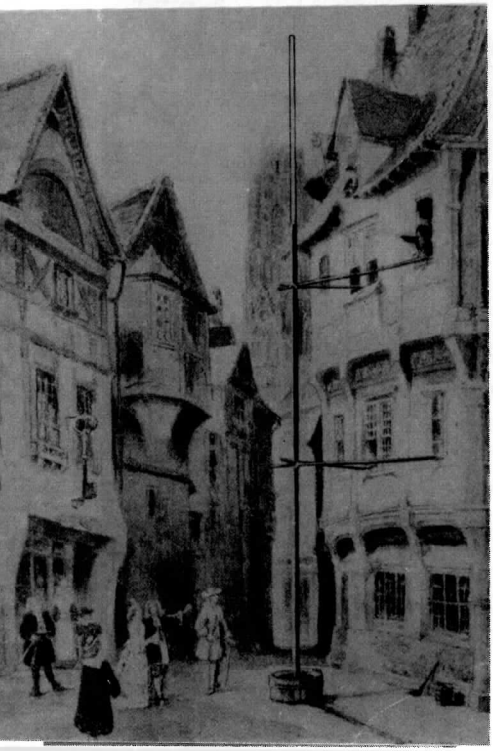
La altura de la columna equilibrada por la presión atmosférica no depende de la cantidad de mercurio.

Si el tubo se inclina, entra mercurio en el tubo, pero la diferencia de nivel entre el mercurio del tubo y el de la cubeta sigue siendo 76 cm.





Ocho caballos de cada lado se necesitaron para separar los hemisferios que contenían . . . ¡vacío!



suelo tiene una altura de unos 76 cm, debe ir disminuyendo también.

Pascal decidió realizar el experimento, pero por su salud no pudo hacerlo personalmente. Envió a unos amigos, quienes ascendieron el Puy de Dôme, en la Auvernia, en 1649. Con gran emoción, los expedicionarios comprobaron que a medida que ascendían por la montaña, el nivel del mercurio bajaba. El descenso alcanzó unos 8 cm al llegar a la cima.

Algunos "misterios". La presión de la atmósfera es capaz de sostener una columna de agua de unos 10 metros de altura y de cualquier sección. Pues bien, llene un vaso e inviértalo rápidamente. ¿Impedirá la presión atmosférica que se vuelque el agua? Todos sabemos que no. ¿Por qué? Recuerde la experiencia del vaso citada al comienzo: colocábamos un papel. ¿Cuál es la función del papel? En el tubo de vainilla, el papel no era necesario . . .

Y a propósito . . . Si decimos que la presión atmosférica sostiene una columna de mercurio de 76 cm de altura, ¿para qué se usa la cubeta con mercurio en

Pascal reprodujo la experiencia de Torricelli; en lugar de emplear mercurio utilizó agua y vino.

la experiencia de Torricelli? ¿Por qué no invierte el tubo lleno de mercurio tranquilamente en el aire? Si se usa un tubo suficientemente delgado, ¿sucederá con el mercurio lo mismo que con el agua del tubo de vainilla?

EJ.: *Calcular qué altura alcanza el agua si se hace con ella la experiencia de Torricelli.* Datos: presión atmosférica $p = 1\,033\ \vec{g}/cm^2$; peso específico del agua $\varrho = 1\ \vec{g}/cm^3$.

Se necesita una columna de agua que produzca esa presión. Su altura h será tal que:

$$p = h\varrho \therefore h = \frac{p}{\varrho} =$$

$$= \frac{1\,033\ \vec{g}/cm^2}{1\ \vec{g}/cm^3} = 1\,033\ cm.$$

$$h = 1\,033\ cm = 10{,}33\ m.$$

EJ.: *Admitiendo que el peso específico del aire es de 1,3 $\vec{g}/dm^3$, calcular cuál es la presión atmosférica a 100 m de altura, si al nivel del suelo es de 1 033 $\vec{g}/cm^2$.*

A $1\,033\ \vec{g}/cm^2$ hay que restarle la presión ejercida por una columna de aire de 100 m de altura:

$$h\varrho = 100\ m \times 1{,}3\ \vec{g}/dm^3 =$$

$$= 10\,000\ cm \times 0{,}0013\ \vec{g}/cm^3 =$$

$$= 13\ \vec{g}/cm^2$$

Luego, a 100 m de altura:

$$p' = 1\,033\ \vec{g}/cm^2 - 13\ \vec{g}/cm^2 =$$

$$= 1\,020\ \vec{g}/cm^2$$

EJ.: *Calcular cuánto desciende la columna de mercurio del tubo de Torricelli cuando se lo eleva 100 m.*

Blas Pascal (1623-1662).

El nivel del mercurio baja a medida que se asciende en la atmósfera.

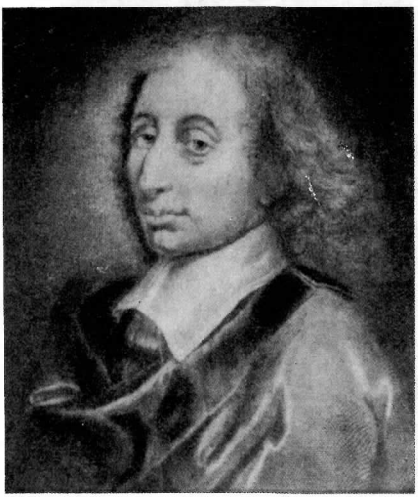
A 100 m la presión es de $1\,020\ \vec{g}/cm^2$. El mercurio llegará a una altura h tal que:

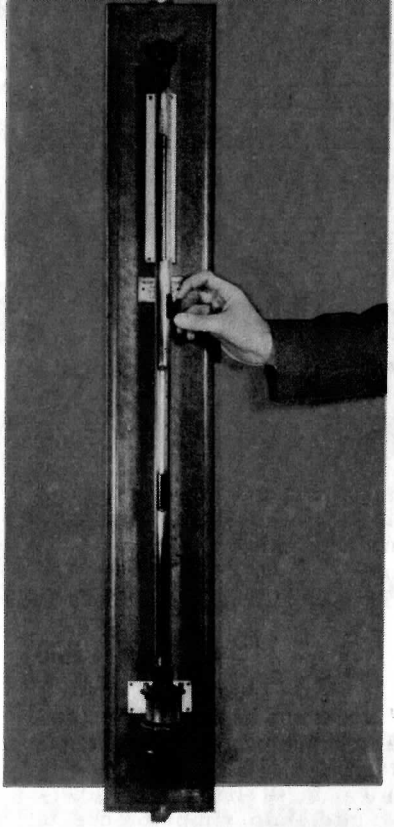
$$h\varrho = p \therefore h = \frac{p}{\varrho} =$$

$$= \frac{1\,020\ \vec{g}/cm^2}{13{,}6\ \vec{g}/cm^3} \cong 75\ cm.$$

La columna ha descendido 1 cm.

Estos problemas sugieren inmediatamente la idea de averiguar la altura a que se encuentra una persona midiendo simplemente la presión atmosférica a esa altura. Es el principio que se usa para medir la altura a que vuela un avión.





Barómetro de Fortin.

Barómetros, altímetro y barógrafo

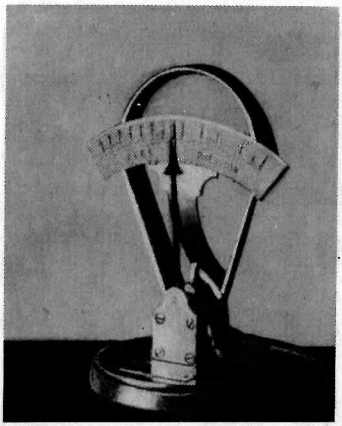
Los barómetros son aparatos para medir la presión atmosférica.

Barómetro de cubeta. Es el tubo de la experiencia de Torricelli, al que se le agrega una regla para medir el nivel alcanzado por el líquido.

Barómetro de Fortin. Es un barómetro de cubeta mejorado, para hacerlo más preciso y más manuable. La cubeta está reemplazada por un recipiente con fondo de gamuza, que se puede subir o bajar mediante un tornillo; así se consigue que siempre, al hacer la lectura, el nivel del mercurio exterior coincida con el cero de la regla.

Barómetro de Bourdon. Funciona como ese juguete de carnaval que consiste en un tubo de papel, enrollado, que se estira al soplar dentro. El barómetro consiste en un tubo hueco. Cuando la presión atmosférica aumenta, el tubo se "enrolla"; cuando disminuye, se "desenrolla": Una aguja señala el valor de la presión atmosférica.

Barógrafo. Es un barómetro cuya aguja tiene en su extremo una pluma mojada en tinta, que se apoya sobre un papel. El papel está enrollado sobre un cilindro, al que un mecanismo de relojería le hace dar una vuelta en un día, o en una semana. Los valores de la presión atmosférica quedan así registrados en cada instante.



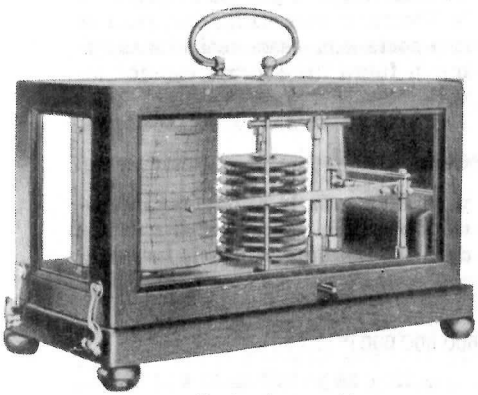
Barómetro de Bourdon.

La atmósfera

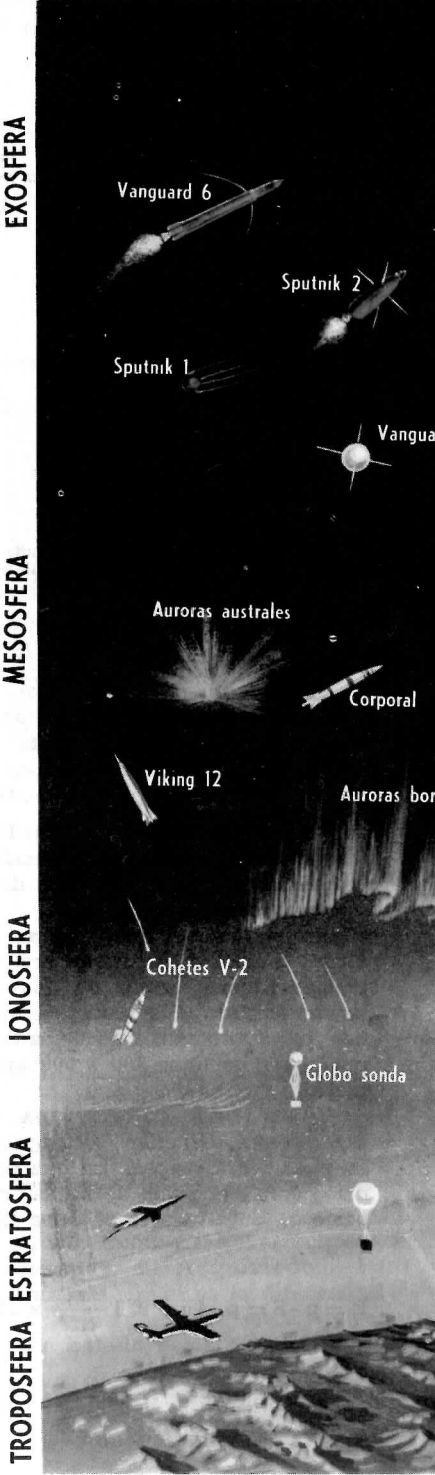
¿QUÉ ES EL VIENTO? Simplemente, aire en movimiento. Pero, ¿por qué se mueve el aire? Si en todos los puntos de un plano horizontal las presiones fueran iguales, el aire estaría en reposo. Pero por distintos factores, se producen diferencias de presión entre una zona y otra, y entonces el aire se pone en movimiento desde la zona de mayor presión hacia la de menor presión. La velocidad del viento será tanto mayor cuanto mayor sea la diferencia de las presiones.

En los observatorios meteorológicos se reúnen los datos obtenidos en las estaciones distribuidas por toda una zona, y la anotación de los valores de la presión sobre un mapa (además de otros factores) permite pronosticar el estado del tiempo hasta dentro de varias horas.

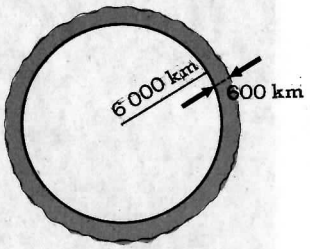
¿QUÉ ALTURA TIENE LA ATMÓSFERA? El peso específico del aire es de 1,3 $\vec{g}/dm^3$; calculemos la altura de una columna de aire que produzca una presión de 1 033 $\vec{g}/cm^2$.



Barógrafo aneroide.



$$h = \frac{p}{\varrho} = \frac{1\,033\ \vec{g}/cm^2}{1{,}3\ \vec{g}/dm^3} = \frac{1\,033\ \vec{g}/cm^2}{0{,}0013\ \vec{g}/cm^3} = 795\,000\ cm \sim 8\ km.$$



Dimensiones comparadas del radio de la Tierra y la altura de la atmósfera.

Pero todos sabemos que la altura de la atmósfera es mucho mayor. ¿Dónde está la falla de nuestro cálculo? En que si bien al nivel del suelo el peso específico del aire es de $1{,}3\ \vec{g}/dm^3$, a medida que se asciende ese peso específico va disminuyendo: la atmósfera se va *enrareciendo*.

No se puede determinar la altura exacta de la atmósfera, en primer lugar, porque no hay un límite definido. Pero existen razones para suponer que la altura puede ser de unos 300 a 600 kilómetros.

CÓMO ESTÁ CONSTITUIDA LA ATMÓSFERA. Pueden distinguirse en ellas varias capas. La que está más cerca del suelo se llama *troposfera*. Su altura es de unos 12 a 15 000 m (esta altura varía según la latitud: en los polos es menor, y mayor en el ecuador). Esta capa es muy importante, pues en ella ocurren todos los fenómenos atmosféricos, como vientos, lluvias, tormentas eléctricas, etc.

Por encima de la troposfera está la *estratosfera*. Todos hemos oído hablar de "vuelos estratosféricos". ¿Qué ventajas presentan? Que en la estratosfera no se producen los fenómenos citados anteriormente, de modo que el avión no encuentra inconvenientes en su vuelo. Por otra parte, como el peso específico del aire es en ella menor, la resistencia al avance del avión es también menor, de modo que pueden alcanzarse grandes velocidades.

La altura de la estratosfera se calcula en unos 80 kilómetros. Por encima de ella está la *ionosfera*. Esta capa es la que permite que las ondas electromagnéticas producidas por una estación de radio puedan llegar a puntos alejados de la Tierra, y aun antípodas, pues se comporta con esas radiaciones como si fuera un enorme espejo: las refleja.

CUÁNTO PESA LA ATMÓSFERA. Como $p = \frac{F}{S}$, se puede calcular el peso F de toda la atmósfera; admitiendo que la Tierra es una esfera de 6 000 km de radio:

$$F = p \cdot S = p \cdot 4\pi r^2 \cong 1\ \frac{\vec{kg}}{cm^2} \times 12 \times (600\,000\,000)^2\ cm^2 =$$
$$= 12 \times 36 \times 10^{16}\ \vec{kg} \cong 4 \times 10^{18}\ \vec{kg}$$

Los fluidos

LOS GASES Y EL PRINCIPIO DE PASCAL. Si sobre una masa de gas se aplica una fuerza, ¿transmite el gas la fuerza o la presión? ¿O tiene una manera propia de comportarse?

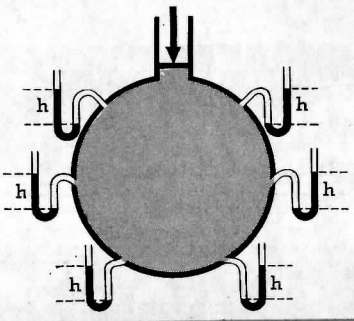
Si se infla un globo de goma, su volumen aumenta en todas direcciones, de modo que el gas, sea lo que fuere lo que transmite, lo hace *en todas direcciones*. El aparato de la figura nos da la respuesta. Cuando se aplica una fuerza en el émbolo, el agua sube *en todos los tubitos*, y *en todos sube lo mismo*. Como el desnivel mide la presión, y en todos es el mismo, *los gases transmiten la presión*. Si se mide la ejercida con el émbolo, se comprueba, además, que *es igual al aumento de presión señalado por cada tubito*.

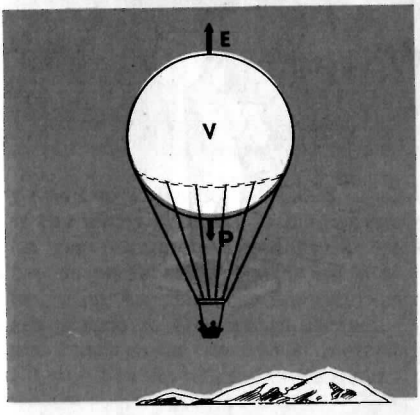
En consecuencia: *los gases obedecen al principio de Pascal*.

Ésta es una de las razones de que a los líquidos y a los gases se los considera miembros de una misma familia: la de los *fluidos*. Podemos, pues, enunciar el principio de Pascal en forma más general:

Toda presión ejercida sobre un fluido se transmite íntegramente y en todas direcciones.

LOS GASES Y EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES. También a los gases se les aplica el principio de Arquímedes, y es ésta otra razón por la cual se los agrupa con los líquidos bajo el nombre de fluidos. No hay más que ver cómo sube un globo inflado con hidrógeno u otro gas





El principio de Arquímedes vale también para los gases (P, peso; V, volumen; E, empuje).

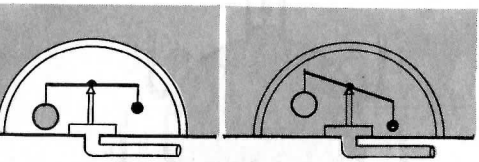
menos denso que el aire, o pensar en los aeróstatos o los dirigibles. ¿Cómo, si no hubiera un empuje de abajo hacia arriba, podrían subir, a pesar del peso tanto del gas como de la envoltura?

Y así como el de Pascal, podemos generalizar el principio de Arquímedes, diciendo:

Todo cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.

DIFERENCIA ENTRE LÍQUIDO Y GAS. Ambos cumplen los principios de Pascal y de Arquímedes. Pero entonces, ¿cuál es la diferencia?

La respuesta es sencilla. Tome una botella vacía (es decir: llena



Izq.: equilibrio en el vacío; der.: al entrar aire, el empuje es mayor en la esfera grande.

de aire) y tápela con un corcho: no hay la menor dificultad. Llene de agua la misma botella y trate de taparla: o bien se derrama parte del agua, hasta que queda lugar para el corcho, o bien no la puede tapar. En este último caso, si hace una presión demasiado intensa, la botella se rompe.

CONCLUSIÓN:

Un gas es fácilmente COMPRESIBLE. *Un líquido es prácticamente* INCOMPRESIBLE.

POR QUÉ LOS GRIEGOS CREÍAN QUE EL AIRE NO PESABA. Aristóteles sospechó que el aire pesaba, e intentó pesarlo, o por lo menos resolver la cuestión por la afirmativa o por la negativa. Procedió de una manera muy semejante a la de Galileo, aunque sin éxito, pues llegó a una conclusión errónea. Su portentosa autoridad intelectual hizo que su error se mantuviera durante más de mil años. Procedió así:

1) Pesó una vejiga llena de aire,

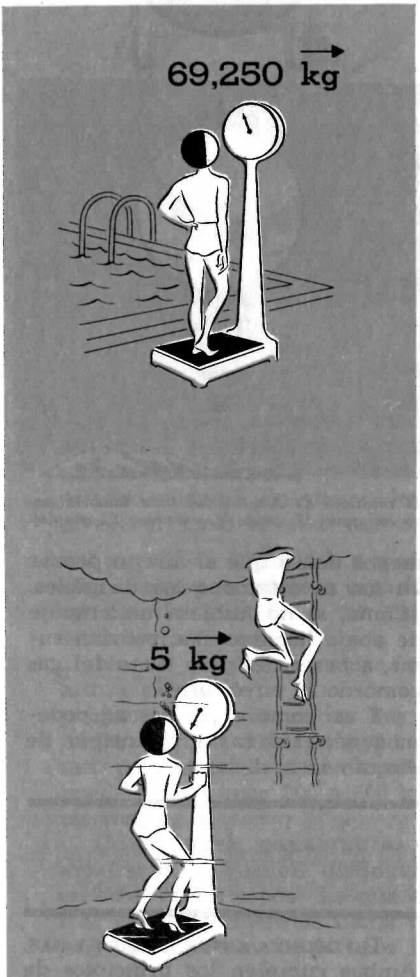
2) La desinfló cuidadosamente, apretándola para sacarle todo el aire, y la volvió a pesar.

Antes y después, la vejiga pesaba lo mismo: en consecuencia, se dijo Aristóteles, el aire no pesa nada.

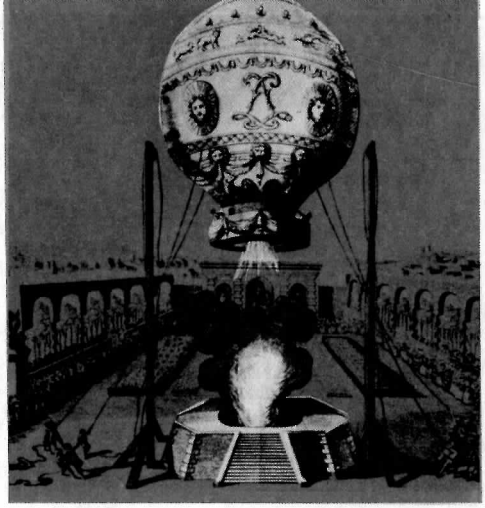
¿Dónde está la falla? No se trata de imprecisiones en las mediciones, pues si repitiéramos cuidadosamente la experiencia, y pesáramos con la balanza más precisa, obtendríamos el mismo resultado. Dejamos a cargo del lector la solución del misterio. Sólo le diremos, como guía, que cuando Arquímedes nació, ya Aristóteles había muerto hacía muchos años . . .

UNO NO PESA LO QUE CREE. Si una persona se pesa, la balanza señalará, por ejemplo, 69,250 $\overrightarrow{\text{kg}}$. Y se siente muy satisfecho porque ha medido su peso. Sin embargo, no es así. Claro que no hay que asustarse, porque lo que marca la balanza difiere muy poco del peso verdadero, como vamos a ver.

Si ese mismo señor colocara la balanza en el fondo de una pileta de natación llena de agua, y volviera a pesarse, no sentiría la menor inquietud al comprobar que la balanza sólo señala, por ejemplo, 5 $\overrightarrow{\text{kg}}$. Cuando mucho (so-



Así como este hombre en el agua, nosotros estamos sumergidos en la atmósfera, y recibimos un empuje hacia arriba.



En las primeras ascensiones se empleó aire caliente.

bre todo si conoce el principio de Arquímedes), le hará gracia ver que su cuerpo, estando de pie sobre la balanza, sólo ejerce una fuerza de 5 $\vec{kg}$. Sabe que esos 5 $\vec{kg}$ es la diferencia entre su verdadero peso y el empuje que recibe por estar sumergido en el agua.

Pero cuando se pesó en la farmacia, ¿no estaba sumergido en el aire? ¿Acaso el aire no ejerce sobre su cuerpo una fuerza hacia arriba igual al peso del aire que desaloja su cuerpo? Por lo tanto, nadie debe asombrarse cuando le digan que lo que marca la balanza cuando se pesa no es su peso, sino solamente la diferencia entre él y el empuje que ejerce el aire.

Claro está que como el aire tiene un peso específico pequeño, también es pequeño el empuje. Si suponemos que el volumen del señor anterior es de unos 70 litros, en números redondos, el empuje es igual a lo que pesan 70 litros de aire, es decir:

$$E = V\varrho = 70\,l \cdot 1{,}3\,\vec{g}/l \cong 90\,\vec{g}.$$

Por lo tanto, el verdadero peso del señor de que se trata es 69,340 $\vec{kg}$, y no 69,250 $\vec{kg}$. Pero, como se ve, no es para alarmarse.

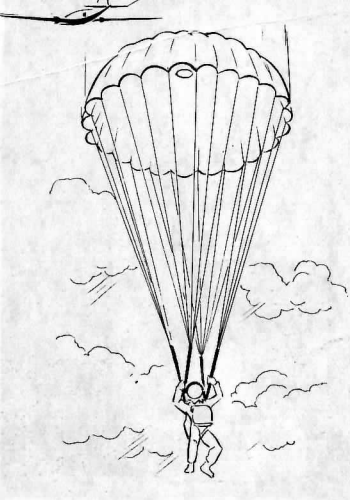
La conquista de la atmósfera

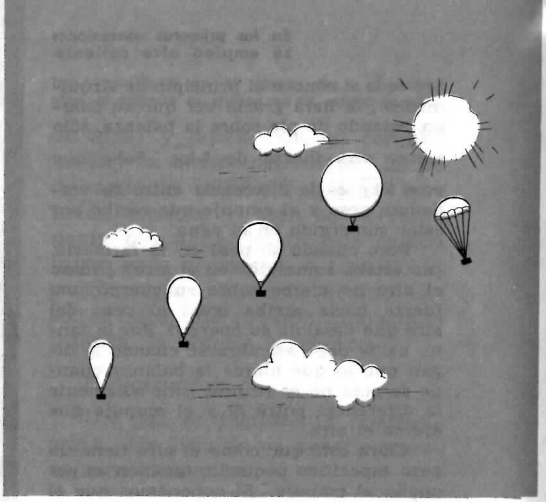
Los hermanos Montgolfier inventaron en 1782 el primer globo que ascendió por los aires. El sistema fue el mismo que hoy se emplea en épocas de Navidad y Año Nuevo: hacer un fuego en una barquilla, y calentar el aire que va dentro del globo. El aire se dilata y parte sale al exterior, quedando en el interior una cantidad menor. El globo de los hermanos Montgolfier alcanzó una altura de 500 metros, causando gran admiración en las gentes que presenciaban el sensacional experimento.

Al año siguiente se hizo la primera ascensión con seres vivientes, que eran ... un gallo, un pato y una oveja. En noviembre de 1783 se realizó la primera ascensión con un ser humano. Rápidamente se fueron perfeccionando los aeróstatos, y en los primeros años del siglo pasado se efectuaron ascensiones hasta cerca de 10 000 metros. En algunas de ellas, los navegantes murieron por asfixia.

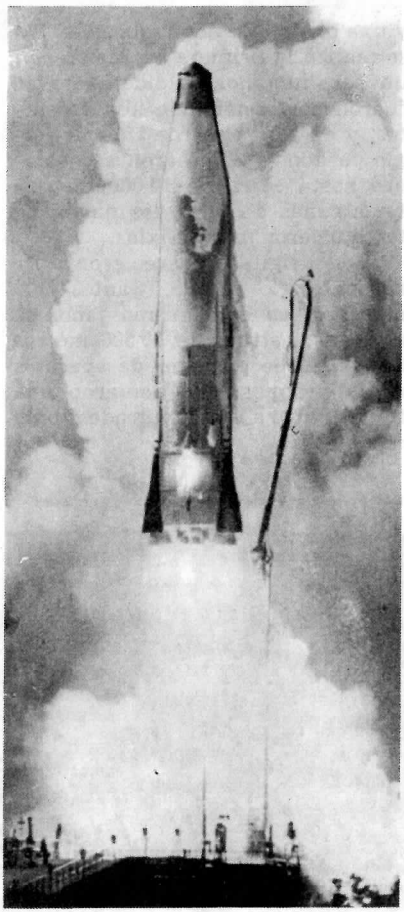
Los dirigibles aparecieron a fines del siglo pasado (Santos Dumont), y en esos mismos años se alcanza la altura de 18 500 metros con un globo portador de aparatos registradores, que anotaron una temperatura de 60 grados bajo cero.

Dos aplicaciones del principio de Arquímedes.





Por qué el globo se lanza poco inflado.



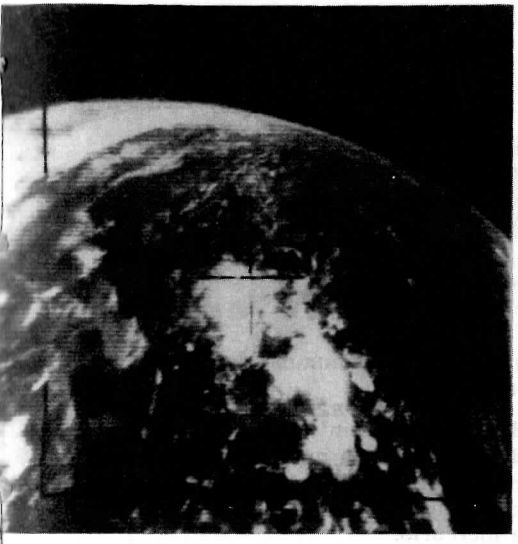
Un cohete Atlas, explorador de la alta atmósfera instantes después de su lanzamiento.

Todos esos aparatos se basan en el principio de Arquímedes, y, por lo tanto, se los infla con gases menos densos que el aire (si se los inflase con aire, ninguno subiría un solo metro).

Los observatorios meteorológicos sueltan diariamente varios globos, para sondear la atmósfera y determinar la dirección y velocidad de los vientos a distintas alturas. Una de las finalidades de esta operación es informar a los aviones sobre las condiciones del tiempo que deben afrontar.

También se envían los llamados *radiosondas*, que son globos portadores de instrumental para explorar las altas capas de la atmósfera.

Como a medida que el globo asciende, la presión exterior es cada vez menor, el volumen del globo se hace cada vez mayor, al dilatarse el gas interior. Llega un momento en que la dilatación es mayor que la que puede soportar el material, y el globo estalla. Los



Fotografías tomadas desde un satélite, que muestran la curvatura de la Tierra y las masas de nubes que cubren distintas regiones. El análisis del mosaico tomado en sucesivas vueltas del satélite proporcionó una preciosa información meteorológica.

aparatos caen con paracaídas, y así es posible recuperar el instrumental (aunque a veces cae en lugares despoblados).

Últimamente se ha desarrollado una nueva técnica en la exploración de las más altas capas de la atmósfera, a las que hasta hace unos pocos años ni se soñaba en llegar. Se hace mediante cohetes. El instrumental, que se acondiciona cuidadosamente en su interior, recoge datos valiosísimos sobre las condiciones del aire en tal altas regiones.

EQUIVALENCIAS ENTRE LAS DISTINTAS UNIDADES DE PRESIÓN

	$\frac{\vec{kg}}{cm^2}$	*atmósferas*	*mm Hg*	*milibares*
1 $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$	1	0,968	736	980
1 atmósfera	1,033	1	760	1 013,3
1 mm Hg	0,00136	0,00132	1	1,33
1 milibar	0,00102	0,00099	0,75	1

Preguntas

1. ¿Por qué se practican dos orificios en las latas de aceite? Las botellas de leche tienen una sola boca...
2. ¿Por qué el agua sale a borbotones cuando se invierte una botella, y no en forma de un chorro?

3. ¿Por qué no se usa un gas en las prensas hidráulicas?

4. Usted está dentro de una habitación. La presión que soporta debido al aire, ¿es provocada solamente por la altura del aire que hay en la habitación? Sin embargo, nos parece que el techo sostiene el resto . . .

Problemas

1. ¿Qué presión atmosférica equilibra una columna de 12 m de alcohol? Expresarla en mm Hg y en milibares.

R.: 697 mm Hg; 929 mb

2. Un vaso cilíndrico tiene 8 cm de altura y 25 cm^2 de base. Se llena de agua, se tapa con un papel y se da vuelta. ¿Con qué fuerza empuja el aire al papel? ¿Con qué fuerza empuja el agua? En el momento de la experiencia, la presión atmosférica es de 755 mm Hg. Repítanse los cálculos suponiendo el vaso lleno de mercurio.

R.: 25,67 $\vec{kg}$; 0,2 $\vec{kg}$; 22,9 $\vec{kg}$; 2,72 $\overleftarrow{kg}$

3. ¿Qué altura alcanzaría la nafta, si se repitiera con ella la experiencia de Torricelli?

R.: 14,75 m

4. El barómetro de un avión en vuelo indica p = 720 mm Hg. ¿A qué altura está sobre el nivel del mar, suponiendo que el peso específico del aire es constante e igual a 1,3 $\vec{g}$/litro?

R.: 419 m

5. ¿Cuánto pesa el aire contenido en una habitación de 4 m por 5 m por 3 m?

R.: 78 $\vec{kg}$

6. Expresar en $\vec{kg}/cm^2$, en atmósferas y en milibares, una presión de 752 mm Hg.

R.: 1,022 7 $\vec{kg}$/cm; 0,997 at; 1 022,7 mb

7. Calcular la fuerza que la atmósfera ejerce sobre una página de este libro.

8. ¿Cuál es la fuerza ascensional de un globo de 1 000 m^3 de volumen, si su peso es de 900 $\vec{kg}$?

R.: 400 $\vec{kg}$, aproximadamente

9. Una esfera metálica hueca pesa 150 $\vec{g}$ en el vacío, 148 $\vec{g}$ en el aire y 147,75 $\vec{g}$ en oxígeno. Calcular su volumen, su peso específico y el peso específico del oxígeno.

R.: 1,538 dm^3; 0,097 $\vec{g}/cm^3$; 1,46 $\vec{g}/dm^3$

10. Los gases cumplen con el principio de Pascal. ¿Por qué no se los emplea en prensas hidráulicas?

* Para resolverlos, empléense las tablas.

6 COMPRESIÓN Y EXPANSIÓN DE LOS GASES

Presión y volumen

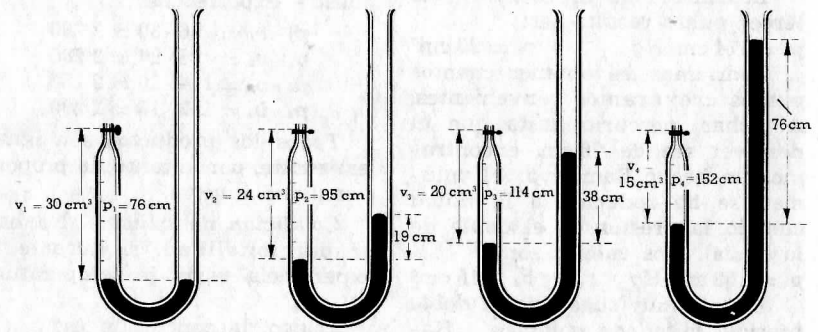
Cuando el volumen de un gas disminuye, aumenta su presión; y cuando el volumen aumenta, la presión disminuye. Por ejemplo: 1,3 gramos de aire ocupan, a la presión atmosférica, un volumen de 1 litro; si se lo comprime hasta que la presión sea de 3 atmósferas, el volumen será menor, pero... *¿a cuánto alcanza?*

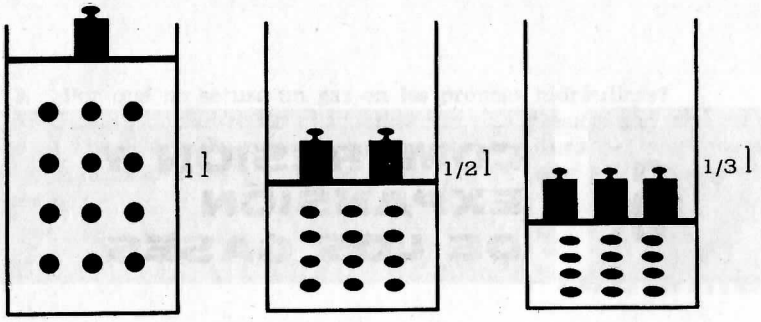
El problema es, pues: *conocidos el volumen y la presión de una cantidad de gas, saber qué volumen ocupará a otra presión, o qué presión soporta cuando ocupa un determinado volumen.*

Ley de Boyle-Mariotte

Si en un tubo como el de la figura echamos mercurio, en ambas ramas tendrá el mismo nivel, porque están abiertas y soportan la misma presión: la atmosférica.

Cerramos la rama de la izquierda, y ya no la abriremos más; dentro queda encerrada cierta cantidad de aire (en física se dice cierta *masa* de aire), que no cambiará en toda la experiencia, y que ahora está a la presión de 1 atmósfera. Sólo hablaremos de esa masa de aire, que, repetimos, será la misma durante toda la experiencia, pues no la dejaremos salir ni permitiremos que entre más aire.





Vamos a dar valores numéricos: la masa de aire encerrada a la presión de 76 cm de *Hg* ocupa un volumen de 30 cm³. Nuestro punto de partida es, pues:

$p_1 = 76$ cm de *Hg* $\qquad v_1 = 30$ cm³

Agregamos más mercurio por la rama de la derecha, y observamos que el mercurio no sube lo mismo en las dos ramas: *en la izquierda sube menos.* El volumen del aire encerrado ha disminuido; su presión ha aumentado, y el desnivel mide el aumento de presión (ley fundamental de la hidrostática). La diferencia de niveles es de 19 cm: la masa de aire encerrada soporta ahora una presión de $76 + 19 = 95$ cm *Hg*; su volumen (el tubo está graduado) es de 24 cm³.

$p_2 = 95$ cm *Hg* $\qquad v_2 = 24$ cm³

Echamos más mercurio, y el tercer punto resulta ser:

$p_3 = 114$ cm *Hg* $\qquad v_3 = 20$ cm³

Podríamos así obtener cuantos puntos creyéramos convenientes. Al echar mercurio hasta que el desnivel sea de 76 cm, encontramos un hecho llamativo: el volumen se ha reducido a la *mitad* cuando la presión es el *doble* de la inicial. Los valores son:

$p_4 = 152$ cm *Hg* $\qquad v_4 = 15$ cm³

Esto es muy sugestivo: *a doble presión, mitad de volumen.* ¿Habrá una proporcionalidad inversa entre el volumen de la masa de aire y su presión? Ensayemos con los valores obtenidos, a ver si la hay. Pero, ¿qué se quiere expresar al decir que el volumen es inversamente proporcional a la presión? Recordemos: dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, dadas dos cantidades de una de ellas (por ejemplo, p_1 y p_2) y las correspondientes de la otra (v_1 y v_2), se verifica la siguiente proporción:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

o sea:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2$$

Con *todos* los pares de valores deberá cumplirse que:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3 = \ldots = p_n v_n$$

Con los valores obtenidos en nuestra experiencia:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot v_1 &= 76 \cdot 30 = 2\,280 \\ p_2 \cdot v_2 &= 95 \cdot 24 = 2\,280 \\ p_3 \cdot v_3 &= 114 \cdot 20 = 2\,280 \\ p_4 \cdot v_4 &= 152 \cdot 15 = 2\,280 \end{aligned}$$

Todos los productos son iguales: existe, por lo tanto, la proporcionalidad inversa.

Condición de validez. No hay proporcionalidad, si durante la experiencia varía la temperatura del gas.

Luego, la conclusión es:

Ley de Boyle-Mariotte: los volúmenes que ocupa una misma masa de gas, a temperatura constante, son inversamente proporcionales a sus presiones.

Roberto Boyle, noble irlandés, nació en 1626 y murió en 1691. Fue un gran propulsor del método experimental de Galileo. En su época había causado sensación la máquina de vacío de Guericke, y muchos estudiosos realizaban experiencias con ella; así fue como Boyle descubrió su ley, en 1661. En otros campos de la física, perfeccionó el densímetro y observó la influencia de la presión sobre la temperatura de ebullición del agua.

Edmundo Mariotte, sacerdote francés, nació en 1620 y murió en 1684. También fue un entusiasta del método experimental, y descubrió la ley dieciséis años después que Boyle, sin conocer los trabajos de éste. Trabajó en hacer aplicable la medición de alturas, aprovechando la variación de la presión atmosférica; estudió el comportamiento del agua entre los 0 y 4 grados, aunque se equivocó al tratar de explicarlo; descubrió la existencia del punto ciego en la retina, lo que provocó la explicable admiración de su época.

EJ.: *Se tienen 100 litros de aire a una presión de 2 atmósferas; calcular su volumen, a la misma temperatura, a la presión de ½ atmósfera.*

Como la presión *disminuyó 4 veces*, el volumen habrá *aumentado 4 veces*, y será de 400 litros. En efecto:

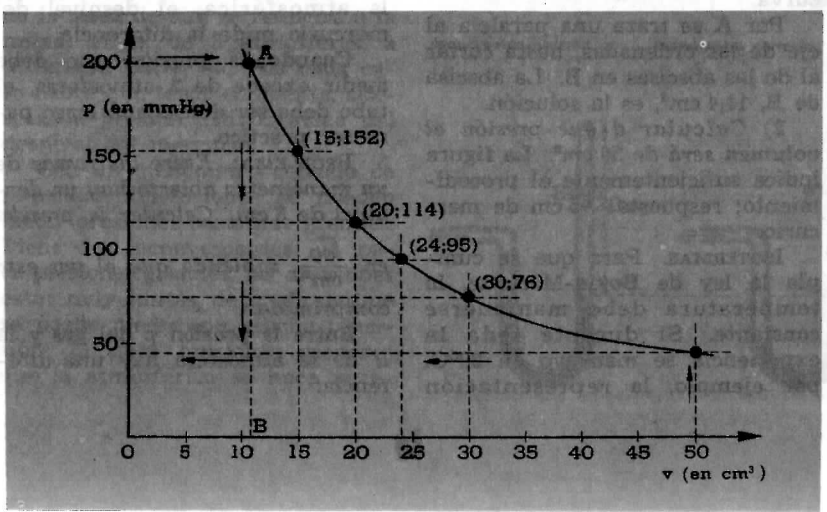
$$p\,v = p'\,v' \therefore v' = \frac{p\,v}{p'} = \frac{2\text{ at} \cdot 100\text{ l}}{\frac{1}{2}\text{ at}} = 400\text{ l}$$

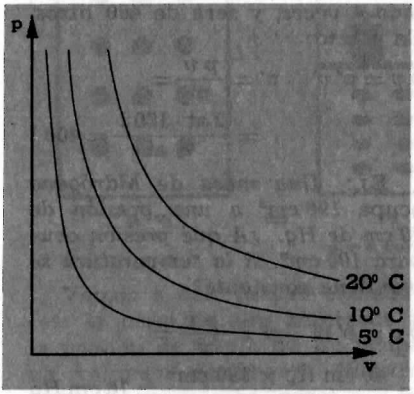
EJ.: *Una masa de hidrógeno ocupa 190 cm³ a una presión de 40 cm de Hg. ¿A qué presión ocupará 100 cm³, si la temperatura se mantiene constante?*

$$p\,v = p'\,v' \therefore p' = \frac{p\,v}{v'} = \frac{40\text{ cm } Hg \times 190\text{ cm}^3}{100\text{ cm}^3} = 76\text{ cm } Hg$$

Un ejemplo sospechoso. Se infla un globo de goma: la presión aumenta... ¡y el volumen también! Si aplicáramos la ley de Boyle, la conclusión sería que el volumen debería disminuir. ¿Dónde está la falla?

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA LEY DE BOYLE-MARIOTTE. Marquemos las presiones en las abscisas, y los volúmenes en las ordenadas. Los puntos obtenidos en nuestra experiencia, se encuentran todos sobre una curva llamada *hipérbola*





equilátera, que muestra gráficamente el comportamiento de esa masa de gas.

La representación gráfica permite resolver rápidamente problemas como éstos:

1) *Calcular qué volumen ocupará una masa de gas a una presión de 200 cm de mercurio, si a 76 cm Hg ocupa 30 cm³ (son los datos de la experiencia anterior).*

Por el punto de ordenada 200 se traza una paralela al eje de abscisas, hasta cortar en A la curva.

Por A se traza una paralela al eje de las ordenadas, hasta cortar al de las abscisas en B. La abscisa de B, 11,4 cm³, es la solución.

2) *Calcular a qué presión el volumen será de 50 cm³.* La figura indica suficientemente el procedimiento; respuesta: 45 cm de mercurio.

ISOTERMAS. Para que se cumpla la ley de Boyle-Mariotte, la temperatura debe mantenerse constante. Si durante toda la experiencia se mantuvo en 20°C, por ejemplo, la representación gráfica será una hipérbola equilátera. Pero también puede efectuarse la experiencia manteniendo una temperatura constante de 10°C: se obtiene una hipérbola equilátera, pero distinta de la anterior; y si se mantiene la temperatura igual a 5°C, por ejemplo, se obtiene una tercera hipérbola equilátera. Cada una de esas hipérbolas es una *isoterma* (de *isos*, igual, y *termos*, temperatura).

Cómo se mide una presión

Ya conocemos un aparato para medir una presión: el barómetro; para medir la presión de un gas cualquiera se usan los *manómetros*.

MANÓMETRO ABIERTO. Es un tubo en U, con sus dos ramas abiertas: una comunica con el recipiente que contiene el gas cuya presión se quiere medir; la otra, con la atmósfera. El tubo contiene mercurio (¿por qué no otro líquido?).

Cuando la presión del gas es igual a la atmosférica, los dos niveles son iguales; cuando la presión del gas es distinta de la atmosférica, el desnivel del mercurio mide la diferencia.

Cuando la presión que debe medir excede de 2 atmósferas, el tubo debe ser demasiado largo para ser práctico.

PROBLEMA: *Entre las ramas de un manómetro abierto hay un desnivel de 8 cm. Calcular la presión en* $\frac{\vec{kg}}{cm^2}$, *sabiendo que el gas está comprimido.*

Entre la presión p del gas y la H de la atmósfera hay una diferencia:

Luego:

$$p - H = h\varrho$$

$$p = H + h\varrho$$

$$p = 1{,}033\ \frac{\vec{kg}}{cm^2} + 8\ cm \cdot 13{,}6\ \frac{\vec{g}}{cm^2} =$$

$$= 1{,}033\ \frac{\vec{kg}}{cm^2} + 108{,}8\ \frac{\vec{g}}{cm^2} = 1\ 141{,}8\ \frac{\vec{g}}{cm^2} \cong 1{,}142\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$$

PROBLEMA: *Calcular el desnivel entre las dos ramas de un manómetro abierto, cuando la presión del gas es* $p = 1{,}5\ \frac{\vec{kg}}{cm^2}$

$$h\varrho = p - H \therefore h = \frac{p - H}{\varrho}$$

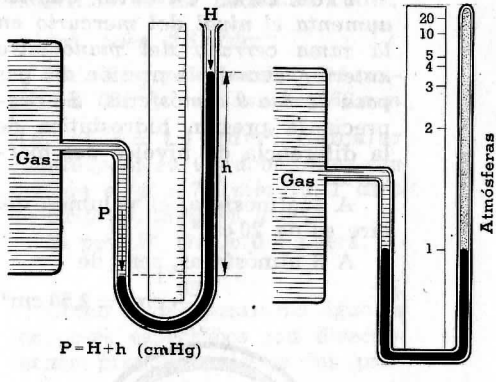
$$h = \frac{1{,}5 - 1{,}033}{0{,}0136}\ cm = 34{,}3\ cm.$$

PROBLEMA: *Calcular qué desnivel habría en un manómetro abierto, si la presión del gas fuera de 3 atmósferas.* Respuesta: 1,52 m.

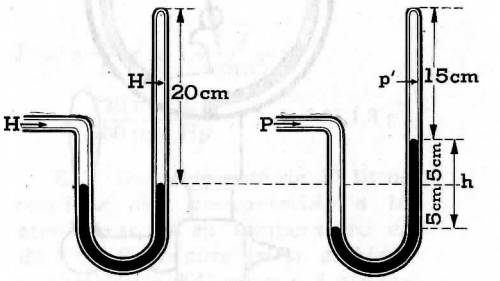
MANÓMETRO CERRADO. También es un tubo en U, pero con un extremo cerrado. Entre éste y el nivel del mercurio ha quedado encerrada una masa de aire que cumplirá con la ley de Boyle-Mariotte si la temperatura se mantiene constante. Si la presión del gas es de 2 atmósferas, el volumen de la masa de aire se reducirá a la mitad; si es de 3 atmósferas, a la tercera parte, etc. En cada caso habrá que tener en cuenta, además, la presión hidrostática del desnivel del mercurio.

Con un manómetro cerrado de reducidas dimensiones se pueden medir presiones bastantes grandes. Tiene dos inconvenientes: 1) para presiones grandes, las divisiones están muy juntas, de modo que no se puede medir con mucha precisión; 2) para presiones menores que la atmosférica se hace necesario un tubo demasiado largo. ¿Por qué?

PROBLEMA: *En la rama cerrada de un manómetro, cuya sección mide 1 cm², el aire ocupa* $v = 20\ cm^3$ *cuando la presión es la atmosférica. Calcular la presión del gas cuando en la rama cerrada el mercurio sube 5 cm.* (Ver últi-



Manómetro abierto. Manómetro cerrado.



mo dibujo pág. 67.)

El aire ocupa ahora un volumen $v' = 15\ \text{cm}^3$, de modo que su presión es p', tal que

$$p'\,v' = \text{H}\,v \;\therefore\; p' = \frac{\text{H}\,v}{v'} = \frac{1\ \text{at} \times 20\ \text{cm}^3}{15\ \text{cm}^3} = \frac{4}{3}\ \text{at}.$$

Entre el gas y el aire encerrado hay una diferencia de presiones:

$$p - p' = h\varrho = 10\ \text{cm} \cdot 13{,}6\ \frac{\vec{g}}{\text{cm}^3} = 136\ \frac{\vec{g}}{\text{cm}^3}$$

Para expresarla en atmósferas dividimos por 1 033:

$$p - p' = \frac{136}{1\,033}\ \text{at} = 0{,}13\ \text{at}.$$

Luego,

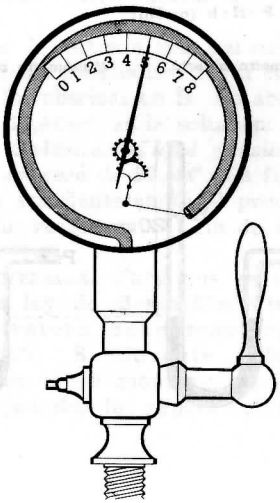
$$p = \frac{4}{3}\ \text{at} + 0{,}13\ \text{at} = 1{,}33\ \text{at} + 0{,}13\ \text{at} = 1{,}46\ \text{at}.$$

PROBLEMA: *Calcular cuánto aumenta el nivel del mercurio en la rama cerrada del manómetro anterior, cuando la presión del gas pasa de 8 a 9 atmósferas.* Se desprecia la presión hidrostática de la diferencia de niveles del mercurio.

A 1 atmósfera, el volumen del aire es de 20 cm³.

A 8 atmósferas, será de

$$\frac{20}{8}\ \text{cm}^3 = 2{,}50\ \text{cm}^3.$$



A 9 atmósferas, será de

$$\frac{20}{9}\ \text{cm}^3 = 2{,}22\ \text{cm}^3.$$

Como la sección del tubo es de 1 cm², el mercurio habrá ascendido solamente 0,28 cm.

Si se considera la presión hidrostática del mercurio, ¿aumentará o disminuirá la diferencia?

PROBLEMA: *Calcular cuánto descendería el nivel del mercurio de la rama cerrada, a partir de la presión atmosférica, si la presión del gas pasara a ser de 0,2 atmósferas.* (R.: 80 cm.)

MANÓMETROS METÁLICOS. Son muy comunes los manómetros metálicos, cuyo funcionamiento es análogo al de los barómetros. Es bien conocido el que se usa en las estaciones de servicio para medir la presión de los neumáticos. Los mecánicos y automovilistas expresan las presiones en "libras". Es incorrecto, pues la libra es la unidad inglesa de fuerza. La unidad correcta es "libras por pulgada cuadrada" (fuerza sobre superficie), y en ella vienen calibrados

esos aparatos. Teniendo en cuenta que 1 atmósfera son 15 libras/pulgada², resulta que un neumático común, cuya presión es del orden de 30 libras/pulgada², está a una presión de aproximadamente 2 atmósferas, por encima de la atmosférica; total: 3 atmósferas.

El peso específico varía con la presión

Como el cociente entre el peso del gas y el volumen que ocupa es el peso específico, éste variará de acuerdo con la presión.

Supongamos que encerramos un peso P de gas, y que a la presión p ocupa un volumen v; si manteniendo constante la temperatura hacemos variar la presión hasta que alcance el valor p', el volumen será v'. En el primer caso, el peso específico del gas es:

$$\varrho = \frac{P}{v} \qquad (1)$$

y en el segundo:

$$\varrho' = \frac{P}{v'} \qquad (2)$$

De acuerdo con la ley de Boyle-Mariotte,

$$\frac{v'}{v} = \frac{p}{p'} \qquad (3)$$

de modo que, por (1), (2) y (3):

$$\boxed{\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{p}{p'}}$$

A una misma temperatura, el peso específico de un gas es directamente proporcional a su presión.

Es decir: si la presión aumenta, el peso específico también aumenta; si la presión disminuye, lo mismo sucede con el peso específico. Pero no sólo eso: si la presión pasa de un valor al *doble*, el peso específico pasa a valer también el *doble*; si la presión se hace *triple*, *triple* se hace el peso específico, etc.

EJ.: *El peso específico del aire, a una temperatura de 0°C y una presión de 1 atmósfera, vale 1,3 $\vec{g}$/dm³. Calcular el peso específico a 0°C y presión de 2 atmósferas.*

Como la temperatura ha permanecido constante y la presión se ha *duplicado*, también el peso específico se ha hecho el *doble*: valdrá, pues, 2,6 $\vec{g}$/dm³.

EJ.: *El peso específico del oxígeno a 0°C y presión $p = 760$ mm Hg, es $\varrho = 1{,}4\ \vec{g}$/dm³. Calcular cuánto pesa en Córdoba, donde la presión es $p' = 720$ mm Hg, 1 litro de oxígeno, también a 0°C.*

El peso P', en Córdoba será:

$$P' = \varrho' v.$$

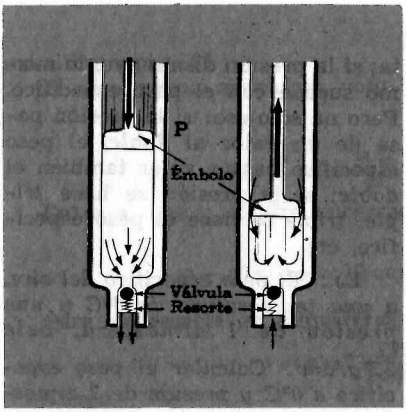
Como a temperaturas iguales los pesos específicos son directamente proporcionales a las presiones,

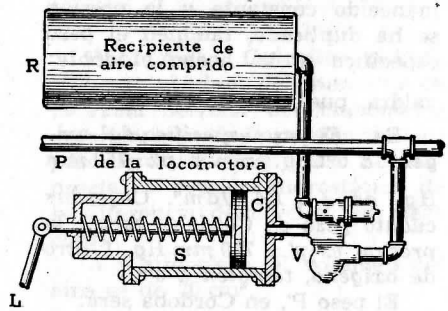
$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{p'}{p} \therefore \varrho' = \varrho \frac{p'}{p}; \text{ luego,}$$

$$P' = \varrho \frac{p'}{p} v = 1{,}4 \frac{\vec{g}}{\text{dm}^3} \times$$

$$\times \frac{720 \text{ mm } Hg}{760 \text{ mm } Hg} \times 1 \text{ dm}^3 \cong 1{,}3\ \vec{g}.$$

EJ.: *Un recipiente de 50 litros contiene aire comprimido a 10 atmósferas, y su temperatura es de 0°C. Se lo abre en un ambiente también a 0°C y a $p = 1$ atmós-*





Freno de aire de un tren. El aire comprimido proveniente de la locomotora, llega por el caño P al depósito auxiliar R. La válvula automática V funciona de modo que el aire pase a C, donde mueve el pistón, aplicando los frenos a la rueda por el brazo L. Cuando el maquinista deja el freno, el resorte S vuelve el pistón a su posición inicial; R y P vuelven a comunicarse, y el aire de C escapa al exterior, produciendo el típico chistido.

fera. Calcular cuánto pesa el aire que se escapa.

Antes de abrirlo contiene aire a una presión $p' = 10$ atmósferas, cuyo peso específico llamamos ϱ'. Calculemos cuánto pesa esta cantidad de aire, sabiendo que a la presión $p = 1$ atmósfera, el peso específico es $\varrho = 1{,}3\ \vec{g}/\mathrm{dm}^3$.

$$P' = v\varrho' = v\varrho\,\frac{p'}{p} = 50\ \mathrm{l} \times$$

$$\times\ 1{,}3\,\frac{\vec{g}}{\mathrm{dm}^3} \times \frac{10\ \mathrm{at}}{1\ \mathrm{at}} = 650\,\vec{g}.$$

Luego de abierto, el aire que queda dentro, a presión $p = 1$ at, y temperatura 0°C, pesa

$$P = v\varrho = 50\ \mathrm{l} \times 1{,}3\,\frac{\vec{g}}{\mathrm{dm}^3} = 65\,\vec{g}.$$

De modo que el aire escapado pesa $P' - P = 585\,\vec{g}$.

Compresores

Son aparatos destinados a comprimir gases. Su aplicación está muy difundida: el oxígeno, el hidrógeno, el supergás, el acetileno para soldaduras autógenas, se venden comprimidos en tubos especiales de paredes metálicas. La soda y las "bebidas sin alcohol" se fabrican comprimiendo anhídrido carbónico en agua. Los neumáticos se inflan mediante aire suministrado por un compresor, etc.

El más sencillo de todos los compresores es el inflador de bicicleta. Cuando se baja el pistón, el aire pasa desde el cilindro a la cámara, de donde no puede volver, por impedírselo la válvula. Cuando el pistón sube, en el cilindro entra aire del exterior. Las bombas de las estufas y cocinas de querosene funcionan en forma exactamente igual.

El vacío

Podemos decir que un recipiente está vacío cuando no contiene nada, absolutamente nada, ni siquiera una sola molécula de ningún gas. Nunca se ha obtenido un recipiente totalmente *vacío*, ni, probablemente, se lo obtendrá.

Cuando en la vida diaria se habla de producir vacío, significa extraer la mayor parte posible del gas que haya dentro de un recipiente.

La técnica moderna exige vacíos cada vez más elevados, razón por la que se ha llegado a un orden que hace unos años hubiera parecido inalcanzable. ¿Para qué interesa producir vacío? Las lámparas de radio, los tubos de rayos X, los termos, para no citar más que ejem-

plos que todo el mundo conoce, funcionan merced al vacío.

¿Para qué sirve el vacío?

Cómo se hace el vacío. La primera bomba de vacío fue hecha por Otto de Guericke, y la idea era muy sencilla: esencialmente, un inflador con la válvula al revés.

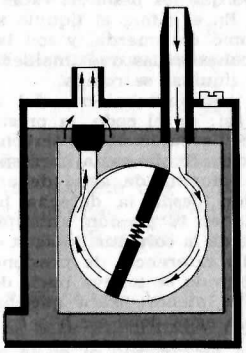
Actualmente puede decirse que hay dos tipos principales de bombas de vacío: mecánicas y difusoras. Las primeras permiten alcanzar vacíos de hasta 0,001 mm Hg, y las segundas de hasta 0,000 000 1 mm Hg en ambos casos con bombas de tipo comercial común. Con bombas diseñadas especialmente, es posible alcanzar vacíos de hasta 0,000 01 mm Hg con mecánicas, y 0,000 000 000 01 mm Hg con difusoras.

En esencia, una bomba de vacío mecánica consiste en un cuerpo metálico con un hueco cilíndrico con el que comunican dos tubos, uno para la extracción del aire, y el otro para la expulsión del mismo al exterior. Dentro del hueco cilíndrico va alojado otro cilindro, el cual tiene dos ranuras laterales donde se alojan dos aletas que están apretadas contra las paredes laterales de la cavidad cilíndrica por un resorte. De esta manera la cavidad cilíndrica del cuerpo de la bomba está permanentemente dividida en dos. El cuerpo cilíndrico y la cavidad cilíndrica son excéntricos, y cuando aquél gira movido por un motor, las paletas, que siempre están firmemente apretadas contra las paredes por el resorte, arrastran el aire como lo indican las flechas. En la zona de la izquierda el aire es comprimido por la paleta hasta que la presión abre la válvula que le permite salir al exterior.

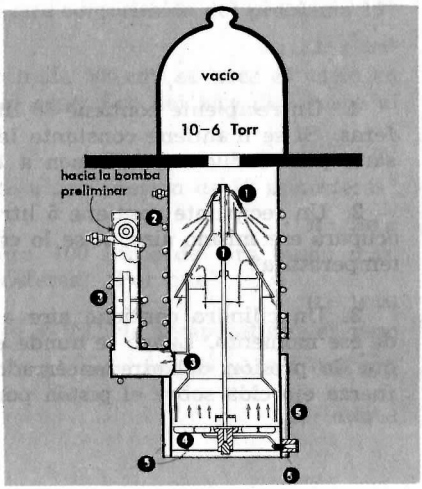
Todo el cuerpo de la bomba está sumergido en aceite, que simultáneamente lubrica las partes móviles y contribuye a un buen contacto entre las mismas.

Las bombas difusoras más comunes usan mercurio o bien aceites especiales. El principio del funcionamiento es el siguiente: se calienta el líquido hasta que hierva, con lo cual se obtiene abundante evaporación. El vapor sube por los tubos representados en la figura, y es obligado a salir violentamente hacia abajo, como indican las flechas. Las moléculas de aceite arrastran consigo a las moléculas de aire, que pasan hacia abajo y de ahí a la bomba mecánica que las expele a la atmósfera. Una bomba difusora siempre necesita, para funcionar, que previamente se le haga vacío a ella misma mediante una bomba mecánica preliminar. El mecanismo de la difusora sólo comienza a actuar cuando las moléculas de aceite, o de mercurio, forman una verdadera cortina; y ésta se forma a presiones inferiores a 0,1 mm Hg.

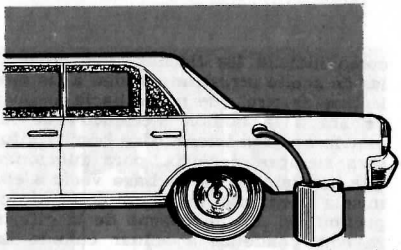
Sifón. Es un tubo acodado, que se usa para trasvasar líquidos. Succionando por el extremo inferior del tubo, el líquido asciende. Cuando ya ha llenado la parte superior y gran parte de la rama más larga, se produce una corriente continua desde el recipiente más elevado al



Bomba mecánica.



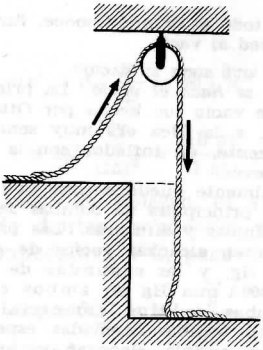
Bomba difusora de aceite: 1) capuchones de la chimenea, que orientan la salida del violento chorro de vapor desde arriba hacia abajo, dándole el aspecto de una cortina de forma cónica; 2) cañería de agua de refrigeración de la pared metálica de la bomba. En ella se condensa el vapor que forma la cortina de aceite que, ya líquido, cae al fondo del recipiente para reiniciar el ciclo; 3) hacia la bomba mecánica preliminar; 4) calentador; 5) aislación térmica; 6) tubo de salida para cambiar el aceite. (Basado en un esquema de Edwards High Vacuum Ltd., England.)

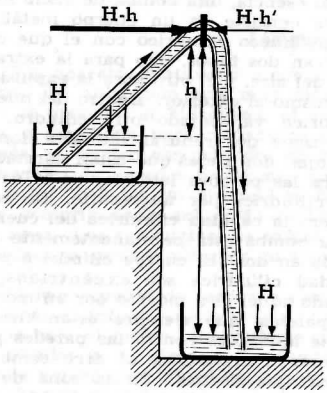


más bajo, sin necesidad de seguir succionando. Es condición esencial que el extremo del tubo por donde el líquido sale, esté más bajo que el nivel del líquido en el recipiente más elevado.

Para comprender el funcionamiento del sifón, veamos lo que sucede con una cuerda que pasa por la garganta de una polea: si la rama de la derecha es más larga, la cuerda se moverá hacia la derecha, porque los pesos no están equilibrados. En el sifón, el líquido se comporta como esa cuerda, y son las fuerzas de cohesión las que impiden que la "cuerda líquida" se rompa.

Este comportamiento del agua se explica así: en el codo, la presión desde la izquierda hacia la derecha es la atmosférica H menos la correspondiente a la columna de agua de altura h; la presión desde la derecha hacia la izquierda es la presión atmosférica H, menos la de la columna de agua de altura h'. La diferencia de presiones hace que el líquido se mueva hacia donde la presión es menor. Para que haya corriente de agua debe ser $h' > h$.





Problemas

1. Un recipiente contiene 80 litros de gas a la presión de 20 atmósferas. Si se mantiene constante la temperatura, ¿qué presión es necesaria para reducir el volumen a 16 litros?

R.: 100 atmósferas

2. Un recipiente contiene 5 litros de aire a $p = 1$ at. ¿Qué volumen ocupará ese mismo aire, si se lo comprime a 10 atmósferas a la misma temperatura?

R.: 0,5 litros

3. Un cilindro contiene aire a una presión igual a la atmosférica de ese momento. Luego se hunde el pistón, cuyo radio mide 5 cm, hasta que la presión del aire encerrado es de 120 cm Hg. ¿Cuánto vale la fuerza ejercida sobre el pistón por el aire comprimido?

R.: 128 $\overrightarrow{kg}$

4. ¿Cuánto vale la fuerza ejercida por la presión atmosférica (760 mm Hg) sobre el pistón del problema anterior?

R.: 81 $\vec{kg}$, aproximadamente

5. ¿Cuánto vale la fuerza aplicada para hundir el pistón de los dos problemas anteriores?

R.: 47 $\vec{kg}$

6. Un tubo cilíndrico vertical se tapa, a la presión atmosférica de H = 750 mm Hg, con un disco perfectamente ajustado, que se desliza hacia adentro, hasta que la presión del aire encerrado lo detiene. La tapa, cuya superficie mide 200 cm^2, pesa 10 $\vec{kg}$. ¿Cuánto vale la presión del gas encerrado?

R.: 786,8 mm Hg

7. En una pistola de aire se comprimen 100 cm^3 de aire a la presión de 1 atmósfera, hasta que sólo ocupan 20 cm^3. ¿Qué fuerza ejerce el aire comprimido sobre el proyectil, cuya sección mide 5 mm^2?

R.: 0,258 $\vec{kg}$

8. ¿Cuál es la fuerza con que la presión atmosférica se opone a la salida del proyectil del problema anterior?

R.: 0,052 $\vec{kg}$

9. Un recipiente de 1 340 cm^3 se cierra en Buenos Aires, donde la presión es en ese momento de 760 mm Hg. Se lo lleva a Córdoba, donde la presión es de 720 mm Hg, y se lo abre (se supone que a la misma temperatura que en Buenos Aires). ¿Entra o sale aire? ¿Cuánto? ¿Cuál es el peso específico del aire en Córdoba, si en Buenos Aires es de 1,3 $\vec{g}/dm^3$?

R.: Salen 74,4 cm de aire; 1,23 $\vec{g}/dm^3$

10. A la presión de 765 mm Hg se llena de aire un cilindro de 15 litros. ¿Qué volumen ocupará ese mismo aire si se lo comprime a 2,5 at, a la misma temperatura?

R.: 6 litros

11. ¿Cuál es el peso específico del aire comprimido del problema 10?

R.: 3,25 $\vec{g}/dm^3$

12. Con una bomba cuyo cilindro mide 500 cm^3 se hace el vacío en un frasco de 1 litro. ¿Cuál es el peso específico del aire del frasco al final del tercer golpe de émbolo?

R.: 0,385 $\vec{g}/m^3$

13. ¿Cuánto pesan 16 litros de aire a una presión de 10 atmósferas?

R.: 208 $\vec{g}$

14. ¿A una presión de 1 atmósfera, 100 litros de aire pesan más, menos o igual que 1 litro a 100 atmósferas? ¿Por qué?

R.: Igual

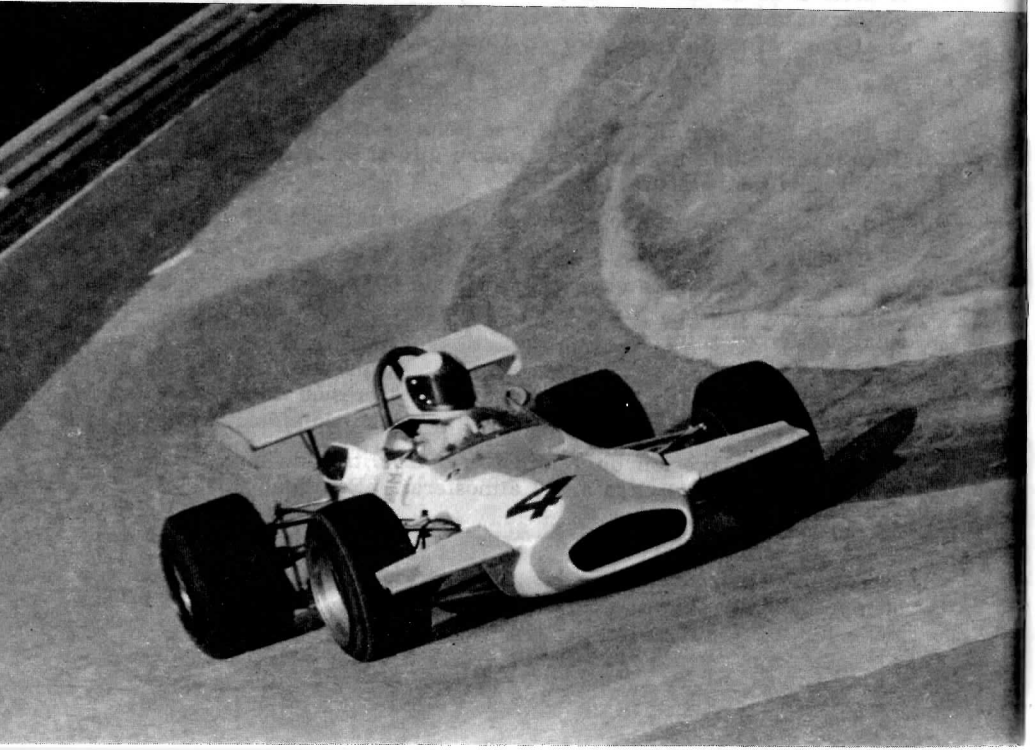
15. A una presión de 1 atmósfera y 0°C de temperatura, el peso específico del oxígeno es de 1,4 $\vec{g}/dm^3$. ¿A qué presión valdrá 0,08 $\vec{g}/l$, siempre a 0°C?

R.: 0,057 at

III

CINEMÁTICA

Cómo se mueven los cuerpos



Es muy fácil decir que un cuerpo está quieto o en movimiento. Más difícil es explicar lo que se quiere indicar con eso. Podemos representar el movimiento si elegimos un sistema de coordenadas fijo, y éste está fijo solamente porque postulamos que es así.

Cuando viajamos en tren, ¿qué derecho se tiene a decir que es el tren el que se mueve? ¿No es la estación la que se aleja?...

7 EL CONCEPTO DE MOVIMIENTO

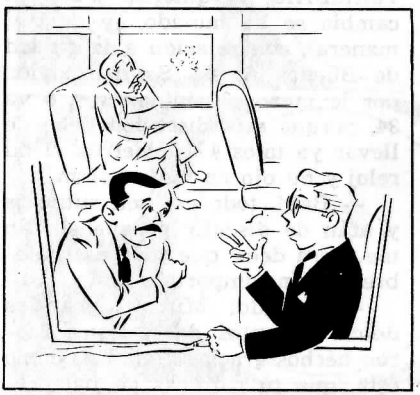
DIÁLOGO EN UN TREN. Dos amigos viajan en el rápido de Buenos Aires a Rosario. Uno de ellos dice:

—¿En qué estará pensando ese señor, que desde que salimos de Buenos Aires mira por la ventanilla y no se ha movido para nada?

El otro es un físico. Siente gusto por la discusión, por las definiciones precisas, y un poco también por las bromas. Le responde:

—¿Cómo que no se ha movido? ¡Lleva recorridos unos 30 km a razón de 100 kilómetros por hora...!

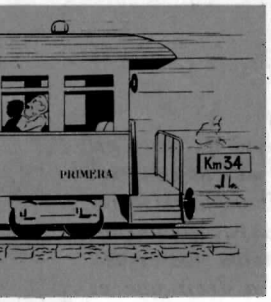
—¡Vamos...! Quiero decir que *él* no se ha movido, que desde que empezó el viaje ha estado clavado en su asiento, mirando por la ventanilla, sin moverse una sola vez para nada. ¿Está claro?

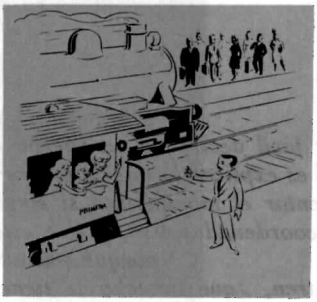


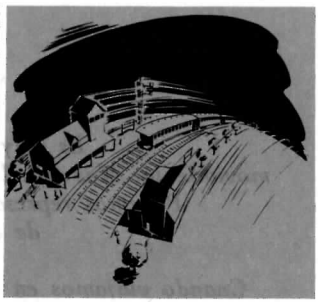
...no se ha movido para nada.

—No te excites. Más bien deberías avergonzarte de emplear las palabras tan a la ligera.

—No entiendo...







. . . ¡pero se está moviendo! ¿Cómo sabes que el tren se mueve? ¿Se mueve el tren o la estación?

—Esto de hablar de moverse o no moverse es cosa peligrosa; las palabras deben emplearse con sumo cuidado. En primer lugar, fíjate que la discusión empezó porque olvidaste decir algo muy, pero muy importante . . .

—¿De qué me olvidé?

—Te olvidaste de aclarar con *respecto a qué*, oye bien, con *respecto a qué* ese señor no se había movido. Reflexiona, que ese detalle es de importancia decisiva. En efecto: el señor no se ha movido respecto del vagón, en relación al vagón, a su asiento, a la ventanilla, si quieres. Pero en cambio se ha movido, ¡y de qué manera!, con relación a la ciudad de Buenos Aires. Se ha movido por lo menos 30 kilómetros, o ya 34, porque esta discusión debe de llevar ya unos 4 kilómetros, si mi reloj y mi ojo no me engañan.

—¡Bah!, todo eso son sutilezas y afán de discutir porque sí. No me vas a decir que toda esa palabrería tiene importancia.

—¡Cuidado! Muchos grandes descubrimientos de la física fueron hechos gracias a análisis como éste, que tú calificas de palabrería. ¡Si supieras lo que Galileo y Newton y Einstein aprovecharon de discusiones así . . . !

—Bien, señor profesor, gracias por la lección. ¿Quiere decirme, entonces, de qué manera hay que expresarse para no suscitar las iras de físicos o ingenieros o astrónomos?

—No tengo ningún inconveniente. Más, todavía: estoy dispuesto a confesar que experimentaré un gran placer, pero con la condición de que respondas cada vez que te haga una pregunta. Te quiero probar que tú mismo eres capaz de sacar consecuencias interesantes.

—A ver . . .

—Primero, supongamos que estás en el andén de una estación, adonde has ido para despedir a tu familia. ¿Cómo sabes que el tren se pone en movimiento?

—Pues, porque veo que las ruedas empiezan a moverse.

—No hay necesidad de ver las ruedas. Eso no es lo importante. Además, las ruedas podrían girar y patinar en el mismo lugar, de modo que el tren quedaría todavía en reposo.

—Pues . . . simplemente, porque se aleja.

—Estamos de acuerdo, pero si agregas un detalle. ¿Se aleja de quién? ¿Respecto a qué? ¿Con relación a qué?

—Pues, porque se aleja de mí, con respecto a mí, con relación a mí.

—Muy bien; progresas. Veamos si eres capaz, ahora, de decirme cuándo un cuerpo cualquiera

... Ni una hoja se mueve ... salvo la Tierra respecto de su eje ... ¡y la traslación respecto del Sol! ... ¡y Sol y planetas hacia un punto de la Vía Láctea! ... ¡y la Vía Láctea respecto de otros universos-islas!

está en movimiento.

—Muy sencillo. Un cuerpo está en movimiento cuando aumenta su distancia respecto a un hombre que está en un lugar.

—Bastante bien, pero con dos defectos.

—¿Cuáles son?

—Primer defecto: según tu definición, el tren se movería cuando se *va*, pero no cuando *viene*.

—Me olvidé, claro. Habría que decir "cuando *aumenta* o *disminuye* su distancia".

—Sí. Pero, ahora viene el segundo defecto. Según tu definición, el tren sólo se mueve si hay un hombre parado en la estación. ¿Y si no hubiera nadie, el tren no se movería lo mismo?

—Bueno, claro que no es necesario que haya ningún hombre allí.

—Entonces, ¿cómo te parece que sería correcto decir?

—Un cuerpo está en movimiento, cuando aumenta o disminuye su distancia respecto a un punto fijo.

—Muy bien, bastante bien para un aficionado. Fíjate, sin embargo, que el problema no queda todavía resuelto. Hay mucho que hablar.

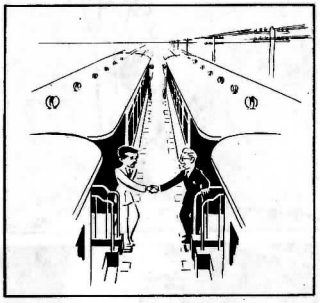
—¡Cómo! ¿Todavía?

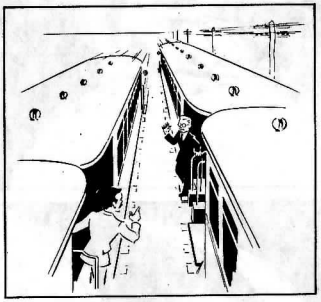
—Ya lo creo. Queda algo muy importante, de enorme importancia. ¿Quién se mueve, el tren o la estación?

—¡Estás bromeando ... !

—Hablo en serio.

—No sé adónde quieres ir a parar con esa pregunta de locos, pero te responderé como si fuera una pregunta cuerda. Es el tren el que se mueve.





—Así que la estación está en reposo, ¿no?

—Por supuesto.

—¿Y no se te ha ocurrido pensar que la estación está instalada en un planeta que se mueve vertiginosamente por los espacios siderales?

Aquí el amigo del físico se llevó la mano derecha al mentón, frunció el entrecejo, reflexionó, y finalmente dijo, casi con pavor:

—¡Caramba! Me parece que lo mejor en la vida sería no pronunciar una sola palabra. Creo que todo es terriblemente difícil. Me acabas de hacer ver algo increíble... En efecto... Claro... Entonces, si la estación está sobre la Tierra, y si la Tierra gira y se traslada vertiginosamente en el espacio... Diablos... Es la misma cosa de hoy, con el señor ése y la ventanilla y la estación... Estamos como al comienzo... ¡Por el amor de Dios! ¿me puedes decir qué es lo verdadero y qué es lo falso? ¿Quién se mueve? ¿Quién está en reposo? Ya no entiendo nada.

—Ahora tienes verdadero interés; ahora no estás fastidiado por la palabrería, ¿no es así?

—Lo confieso. Me muero de curiosidad.

—Muy bien. Como decía un filósofo griego, el asombro es la madre de la sabiduría. Hay que empezar por asombrarse y preguntar, como los chicos, ¿por qué?, ¿por qué?

—Bueno; responde de una buena vez.

—Pues, en cierto modo, la respuesta es muy simple. Todos los movimientos son relativos, es decir, con *relación* a algo, a un punto. Por ejemplo, para empezar con nuestro señor, el que originó la discusión, ese señor está *en reposo con relación al vagón*, pero también podemos invertir la frase diciendo que *el vagón está en reposo con relación al señor*. Pero ese señor está *en movimiento con respecto a la estación*...

—¿De modo que alguien o algo puede estar *a la vez en reposo y en movimiento*?

—Exacto. Todo depende del punto de referencia que se elija como fijo. Como decía ese señor *se mueve respecto a la estación*, considerándola fija, pero también es lícito decir lo inverso: que *la estación se mueve respecto a ese señor*, considerándolo a él como fijo. No hay más derecho a decir lo primero que lo segundo, pues la estación no es ningún ente privilegiado, ya que pierde inmediatamente su jerarquía o su importancia en cuanto pensamos en el Sol o las estrellas. ¿Acaso la estación está en reposo respecto al Sol? De ningún modo.

—¿Entonces?

—Entonces, si queremos ser verídicos y no decir más que lo que debemos decir, habrá que definir el movimiento de esta manera...

—Un momento, intentaré hacerlo yo.

—Veamos...

—Yo diría que "un cuerpo está en movimiento *con relación a un punto elegido como fijo*, cuando aumenta o disminuye su distancia respecto a ese punto".

—¡Magnífico! Se puede todavía hacer una simplificación. En física hay que emplear siempre el mínimo de palabras, y acá sobran dos.

—A ver... ¡Ya sé!: "*Un cuerpo está en movimiento con relación* a un punto elegido como fijo, cuando varía su distancia a ese punto".

—Muy bien. Ahora, tú mismo puedes extraer algunas conclusiones bastante curiosas sobre fenómenos que son bien conocidos. ¿Qué me podrías decir sobre dos trenes expresos que corren el uno al lado del otro, en la misma dirección, en el mismo sentido, y con la misma velocidad?

—Que un tren está en reposo con respecto al otro.

—Perfecto. ¿Qué me podrías decir si uno de esos trenes se mueve a 100 kilómetros por hora y el otro a 90?

—Que el primero se mueve a 10 kilómetros por hora con relación al segundo.

—¡Magnífico! Creo que la lección ha sido provechosa. Puede sentarse, joven. Le pondré diez puntos.

—¡Un momento, señor profesor! Me parece que la definición que usted acepta tiene un defecto.

—¡Esto sí que está bueno! Así es, tiene un defecto. Si has dado en el clavo, resultarás mejor alumno de lo que yo esperaba. ¿Cuál es el defecto?

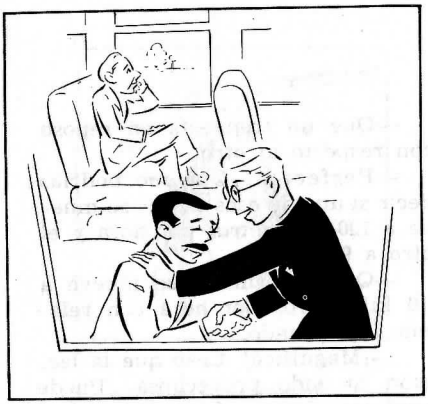
—¿Qué pasa si revoleo una piedra y elijo como punto fijo mi hombro? La piedra recorre una circunferencia cuyo centro es mi hombro. La distancia de la piedra a mi hombro no varía, y sin embargo, la piedra se mueve...

—Ése es el defecto. Para definir el movimiento con toda precisión, debes elegir, no un *punto de referencia* sino un *sistema de coordenadas*. Pero, ¿recuerdas lo que es un sistema de coordenadas?

—Sí... tres rectas que se cortan en un mismo punto.

—Y cada una perpendicular a las otras dos. Como las aristas de las paredes de una habitación que concurren a un mismo rincón. Y ahora, en lugar de decir: "Un cuerpo está en movimiento con relación a un punto cuando varía su distancia respecto a ese punto".

—Déjamelo decir a mí: "Un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema de coordenadas, elegido como fijo, cuando



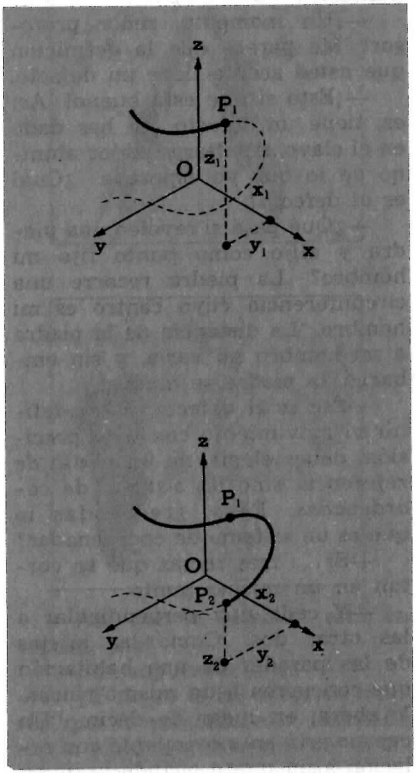
. . . ¡no era palabrerío!

varían . . . ¡sus coordenadas!"

—Bueno, hombre, ahora tendría que ponerte diez y felicitarte . . .

Definición de movimiento

Un cuerpo está en movimiento con respecto a un sistema de coordenadas elegido como fijo, cuando sus coordenadas varían a medida que transcurre el tiempo.

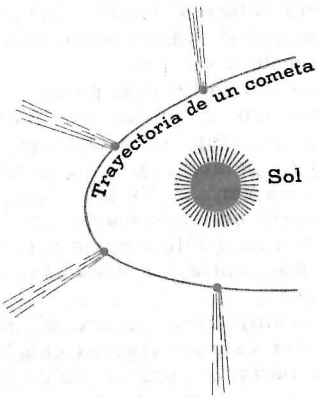


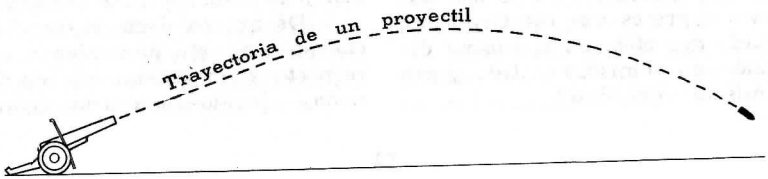
Trayectoria

¿Qué es la *trayectoria* de una bala? El camino seguido por ella en su movimiento.

Si imaginamos un móvil cualquiera, a medida que transcurre el tiempo va ocupando distintos puntos del espacio.

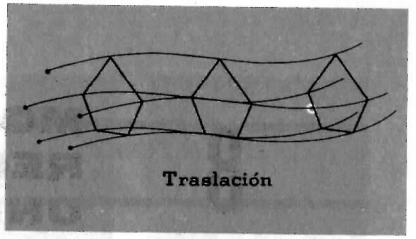
DEFINICIÓN: *Trayectoria de un móvil*





es la figura formada por los distintos puntos que va ocupando a medida que transcurre el tiempo.

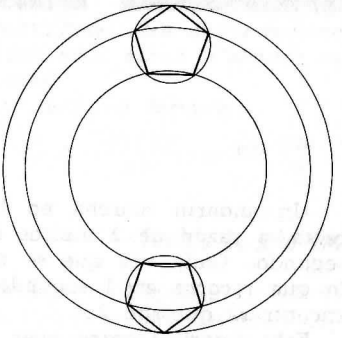
Si la trayectoria es una *recta*, el movimiento es *rectilíneo*. Si es una *curva*, *curvilíneo*. En este último caso, el movimiento toma el nombre de la curva que describe: si es una *circunferencia*, *movimiento circular*; si es una *parábola*, ***parabólico***, etc.



Traslación

Movimiento de traslación

Un cuerpo tiene un movimiento de traslación, cuando un segmento de él se mantiene paralelo a sí mismo durante todo el movimiento.



Rotación

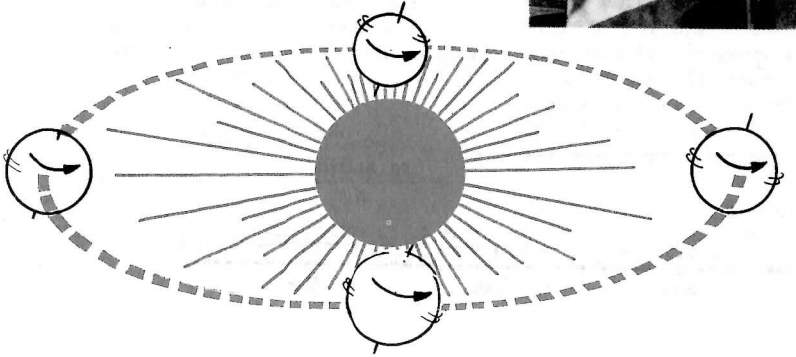
Movimiento de rotación

Un cuerpo tiene un movimiento de rotación cuando: *a)* sus puntos describen *circunferencias*; *b)* las circunferencias tienen sus centros *sobre una misma recta*; *c)* esta recta, llamada *eje de rotación*, es *perpendicular* a los planos de las circunferencias.

Si se trata de una figura plana que gira en su propio plano, las circunferencias son concéntricas.

Los asientos se **trasladan**, porque siempre están paralelos a sí mismos.

La Tierra está en rotación alrededor de su eje, y en traslación respecto del Sol.



8 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Un andarín marcha en línea recta, a razón de 2 metros cada segundo. Cada vez que se mida lo que recorre en 1 segundo, se encontrará que son 2 m.

Este andarín recorre, pues, *distancias iguales* en *tiempos iguales*. Un movimiento que tenga esta característica se llama *uniforme*.

DEFINICIÓN: *Un movimiento es uniforme cuando el móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales.*

Velocidad

Se llama velocidad al cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla:

$$v = \frac{d}{t}$$

En el caso de nuestro andarín, en 1 segundo recorre 2 m, de modo que:

$$v = \frac{2\ \text{m}}{1\ \text{s}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

UNIDADES DE VELOCIDAD. Las unidades para medir velocidades se obtendrán como cociente entre la unidad que se use para medir la distancia y la que se use para medir el tiempo.

En el caso del andarín, hemos usado *metros* y *segundos*, y resultó como unidad de velocidad: *m/s*.

Otras unidades muy comunes son: kilómetros por hora (*km/h*), kilómetros por segundo (*km/s*), y en los países de habla inglesa, millas por hora (*millas/h*), y cuando se trata de velocidades de buques, el *nudo*.

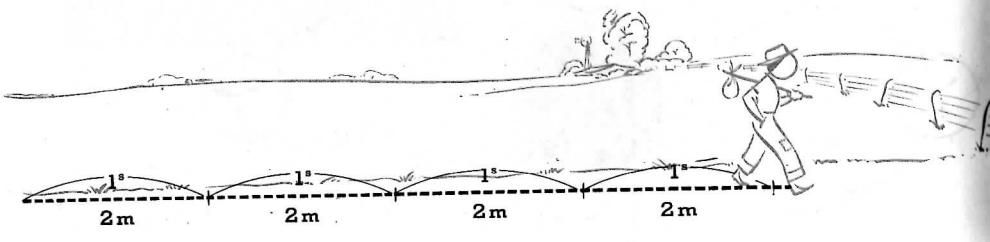


TABLA DE VELOCIDADES

Avión supersónico	2 400 km/h
Avión subsónico	900 km/h
Avión X-15	6 400 km/h
Récord tren eléctrico	270 km/h
Récord mundial automóvil	863 km/h
Motocicleta	243 km/h
Halcón	2 670 m/min
León	1 830 m/min
Caballo de carrera	1 136 m/min
Galgo	938 m/min
Hombre corriendo	583 m/min
Tortuga	11,8 m/min
Caracol	0,06 m/min
Pelota de fútbol	30 m/s
Tiro de rifle	825 m/s
Tiro de fusil	1 190 m/s
Cohete para escapar de la órbita terrestre	27 000 km/h
Mercurio	47,9 km/s
Venus	35 km/s
Tierra	29,8 km/s
Marte	24,1 km/s
Júpiter	13,1 km/s
Saturno	9,6 km/s
Aerolito	unos 60 km/s

La mayor velocidad, la de la luz, es de 300 000 km/s.

PROBLEMA: *Un avión recorre 2 940 km en 3 horas. Calcular su velocidad.*

Aplicando la fórmula:

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2\,940 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 980 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Cambio de unidades

PROBLEMA: *Expresar la velocidad del avión anterior en m/s.* Sólo es preciso tener en cuenta que:

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} ;$$
$$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s} .$$

Luego

$$v = 980 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 980 \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{980 \times 1\,000}{3\,600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 272 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

PROBLEMA: *Expresar la misma velocidad en millas por hora.*

Sabemos que 1 milla = 1,609 km, de modo que $1 \text{ km} = \frac{1}{1{,}609}$ millas. Luego:

$$v = 980 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 980 \frac{\frac{1}{1{,}609} \text{ millas}}{\text{h}} = \frac{980}{1{,}609} \frac{\text{millas}}{\text{h}} \cong 609 \frac{\text{millas}}{\text{h}}$$

PROBLEMA: *Un destructor navega a 35 nudos. Expresar su velocidad en km/h.*

Un barco tiene una velocidad de 1 nudo cuando recorre 1 milla marina por hora; y 1 milla marina tiene 1 852 metros.

$$v = 35 \text{ nudos} = 35 \frac{\text{millas m.}}{\text{h}} =$$

$$= 35 \frac{1{,}852 \text{ km}}{\text{h}} \cong 64 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Significado físico de la velocidad

Cuando decimos que un automóvil corre a 60 km/h, queremos decir que se mueve de manera tal, que *cada hora recorre una distancia de 60 km.* De modo que la velocidad *representa* la distancia recorrida en cada unidad de tiempo (en este caso, 1 hora). Si decimos que un corredor corre a una velocidad de 10 m/s, significa que en cada segundo recorre una distancia de 10 m.

Cuando se dice, por ejemplo, "kilómetros *por* hora", se quiere significar kilómetros *por cada hora* y no la operación de multiplicar.

Características del movimiento rectilíneo uniforme

De la definición de movimiento rectilíneo uniforme resulta que:

a) La distancia recorrida es directamente proporcional al tiempo empleado en recorrerla.

Es decir, que si para recorrer una distancia d un móvil que se mueve con movimiento uniforme emplea un tiempo t, para recorrer una distancia distinta, d', empleará otro tiempo, t'; para otra distancia d'', otro tiempo, t''. Pero esas distancias y tiempos están en proporción, y sus razones son iguales:

$$\frac{d}{t} = \frac{d'}{t'} = \frac{d''}{t''} = \text{constante} = v.$$

Y sea cual fuere la distancia que recorra el móvil, empleará un tiempo tal, que el cociente entre esa distancia y ese tiempo es siempre el mismo. Ese cociente es la velocidad, de modo que también podemos decir:

b) En el movimiento rectilíneo uniforme, la velocidad es constante.

PROBLEMAS SOBRE EL MOVIMIENTO UNIFORME. De la definición de velocidad, que es

$$\boxed{v = \frac{d}{t}}$$ resultan: $$\boxed{d = v\,t}$$ y $$\boxed{t = \frac{d}{v}}$$

Con estas tres fórmulas se puede resolver cualquier problema de movimiento uniforme.

PROBLEMA: *Un automóvil corre a 80 km/h durante 4 horas. Calcular la distancia recorrida.*

$$d = v\,t = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4\ \text{h} = 320\ \text{km}.$$

PROBLEMA: *Luis Alberto Nicolao, campeón argentino de natación, recorrió 100 m en 58,5 s. Calcular su velocidad.*

$$v = \frac{d}{t} = \frac{100\ \text{m}}{58{,}5\ \text{s}} = 1{,}71\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \text{en}\ \frac{\text{km}}{\text{h}}:\ v = 1{,}71\ \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} =$$

$$= \frac{1{,}71 \times 3\,600}{1\,000}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 6{,}156\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

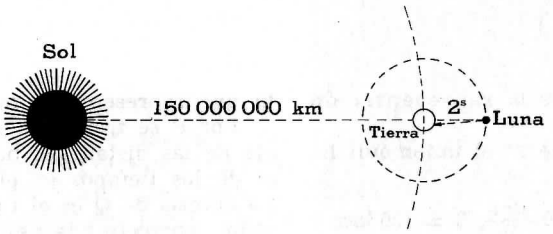
PROBLEMA: *Calcular qué tiempo emplearía Nicolao para los 200 m si pudiera conservar su velocidad durante todo el recorrido.*

$$t = \frac{d}{v} = \frac{200\ \text{m}}{1{,}71\ \text{m/s}} \cong$$

$$\cong 117\ \text{s} = 1\ \text{m}\ 57\ \text{s}$$

PROBLEMA: *Un automóvil viaja desde Buenos Aires hacia Córdoba, a una velocidad de 55 km/h, con movimiento que suponemos uniforme. A las 7 de la mañana pasa por Pergamino (que está a 220 km de Buenos Aires). Calcular: 1) a qué hora partió de Buenos Aires; 2) a qué distancia de Buenos Aires estará a mediodía.*

PRIMERA PARTE: Llamemos x a la hora de salida de Buenos Aires, y d a la distancia Buenos Aires - Pergamino; por lo tanto:



$$7 - x = \frac{d}{v} \therefore x = 7\,\text{h} - \frac{d}{v} = 7\,\text{h} - \frac{220\,\text{km}}{55\,\text{km/h}} = 7\,\text{h} - 4\,\text{h} = 3\,\text{h}.$$

SEGUNDA PARTE: Debemos calcular la distancia que recorre en el lapso transcurrido entre las 7 y mediodía (5 horas):

$$d' = v\,t = 55\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 5\,\text{h} = 275\,\text{km}.$$

Para calcular la distancia a Buenos Aires, a esos 275 km debemos sumarles los 220 iniciales:

$$d = 220\,\text{km} + 275\,\text{km} = 495\,\text{km}.$$

PROBLEMA: *La distancia Tierra-Sol es de 150 000 000 km. Estando alineados Sol-Tierra-Luna, un aparato de radar envía una señal hacia la Luna, y a los 2 segundos se "oye" el eco. La velocidad de la señal es de 300 000 km/s. Calcular la distancia Luna-Sol.*

R.: 150 300 000 km

PROBLEMA: *Calcular cuánto ha recorrido un atleta cuya velocidad es de 18 km/h, a los 3 minutos de la partida.*

R.: 0,9 km

Representación gráfica de la distancia en función del tiempo

Sobre el eje de abscisas llevamos los tiempos, y sobre el de ordenadas, las distancias.

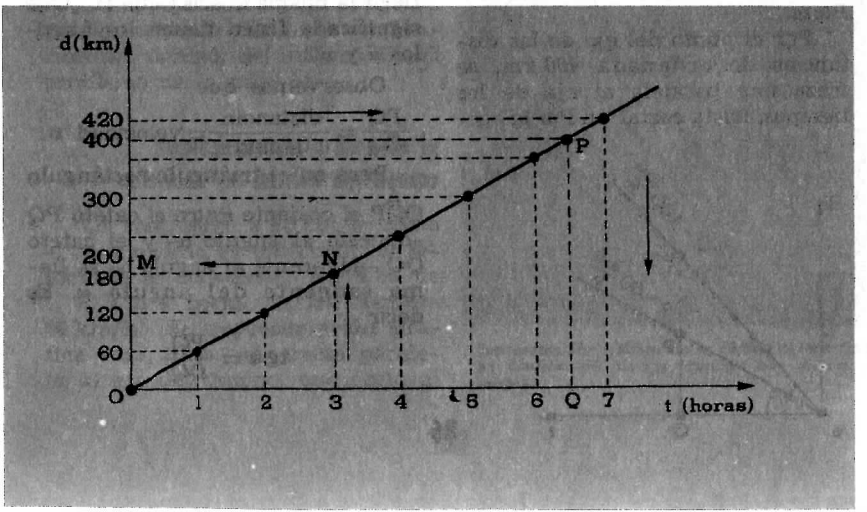
Representemos gráficamente la distancia recorrida por un automóvil que viaja hacia Mar del Plata a una velocidad $v = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ con movimiento uniforme.

En el instante "cero", la distancia recorrida es también "cero", de modo que el origen del sistema de coordenadas es un punto de la representación gráfica.

Al cabo de 1^h el automóvil ha recorrido:

$$d = v \cdot t = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1^h = 60\,\text{km}.$$

El punto que tiene como abscisa 1^h y como ordenada *60 km*, es



otro punto de la representación gráfica.

Al cabo de 2^h el automóvil ha recorrido:

$$d = v \cdot t = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2^h = 120 \text{ km}.$$

El punto que tiene como abscisa 2^h, y como ordenada *120 km*, es otro punto de la representación gráfica. Y así, sucesivamente, podemos encontrar cuantos puntos consideremos necesarios.

Observemos que todos los puntos están sobre una misma recta, de modo que:

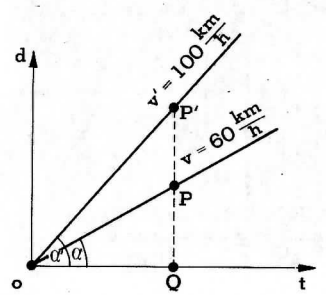
En el movimiento uniforme, la representación gráfica de la distancia en función del tiempo es una línea recta.

Como una recta queda determinada por dos de sus puntos, dos puntos son suficientes para construir esta representación gráfica. Los más sencillos de calcular son el origen y el que tiene como abscisa 1^h.

Con la representación gráfica se puede resolver cualquier problema sobre el movimiento de ese automóvil.

PROBLEMA: *Calcular cuánto tarda en recorrer los 400 km que separan a Buenos Aires de Mar del Plata.*

Por el punto del eje de las distancias de ordenada *400 km*, se traza una paralela al eje de los tiempos, hasta cortar en *P* a la recta que representa el movimiento.



Por *P* se traza una paralela al eje de las distancias, hasta cortar al de los tiempos en el punto *Q*. La abscisa de *Q* es el tiempo buscado: aproximadamente, $6^h\ 40^m$. El cálculo corrobora este resultado.

PROBLEMA: *Calcular cuánto habrá recorrido al cabo de 3^h de la partida.*

Por el punto de abscisa 3^h se traza una paralela al eje de las distancias, hasta cortar a la gráfica en el punto *N*.

Por *N* se traza una paralela al eje de los tiempos, hasta cortar al de las distancias en el punto *M*. La ordenada de *M* es la distancia recorrida en 3^h, es decir, *180 km*.

INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD. Representemos en un mismo sistema la gráfica de la distancia del automóvil anterior, y la de otro automóvil que parte al mismo tiempo, pero con velocidad $v' = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Al automóvil más veloz corresponde una recta que forma un ángulo mayor con el eje de los tiempos. Consideremos un punto *P* de la recta correspondiente al primer automóvil y el punto *P'* de la recta del segundo que tiene la misma abscisa que *P*. ¿Qué significado físico tienen los ángulos α y α'?

Observemos que

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad } v.$$

Pero en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{OQP}$ el cociente entre el cateto PQ –opuesto al ángulo α– y el cateto OQ –adyacente al ángulo α– se llama tangente del ángulo α. Es decir

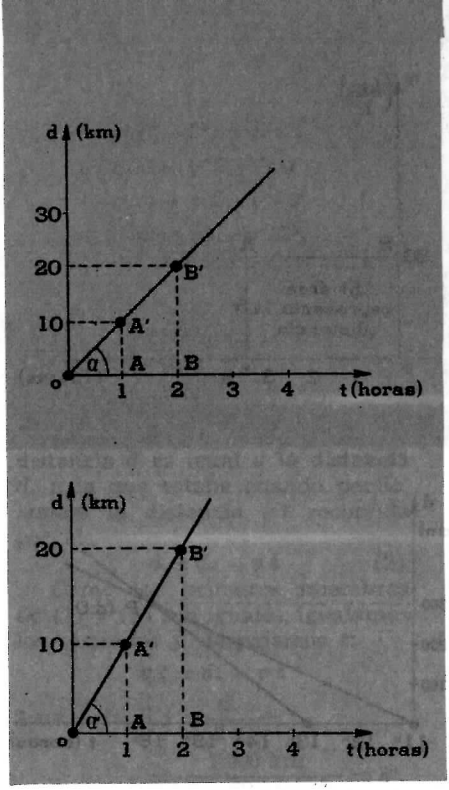
$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ}$$

Es decir: que en la representación gráfica de la distancia, *la velocidad está representada por la tangente del ángulo que forma la recta representativa con el eje de los tiempos.*

Para calcular esa tangente se debe medir una ordenada cualquiera, en la unidad que indique la escala, y el tiempo correspondiente a esa ordenada, también en la unidad que indique su escala; luego se obtiene el cociente entre ambas cantidades, que es la velocidad buscada. Se aplica este procedimiento, en lugar del procedimiento habitual –medir el ángulo con un transportador y buscar luego el valor de la tangente en las tablas–, porque no son las longitudes de los segmentos lo que interesa, sino las cantidades que ellos representan, como se ve en las figuras adjuntas.

REPRESENTACIÓN CUANDO HAY UN CAMINO INICIAL. En el instante inicial, el móvil ha recorrido ya una distancia d_o. El punto que tiene abscisa O y ordenada d_o es un punto de la recta. Está, por lo tanto, corta al eje de las distancias en el punto de ordenada d_o.

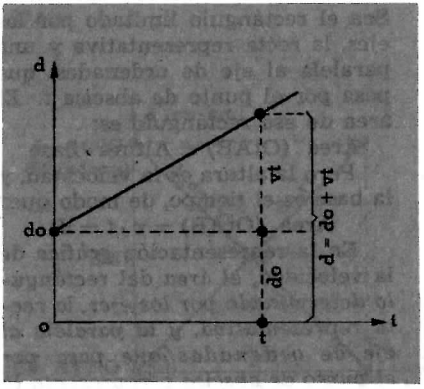
Como ejercicio, represéntese gráficamente la distancia en función del tiempo, del automóvil del problema de la pág. 84.



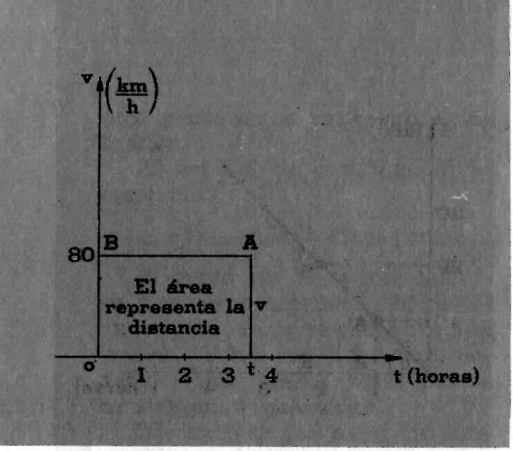
Las escalas de las longitudes son distintas, y los ángulos miden 45° y 60°, pero las tangentes, calculadas mediante las escalas, representan velocidades iguales: 10 km/h.

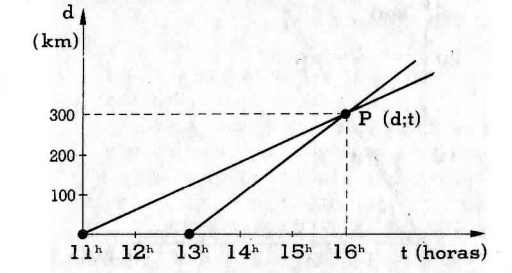
Representación gráfica de la velocidad en función del tiempo

Un tren corre a 80 km/h; como el movimiento es uniforme, la velocidad es constante. Al cabo de 1, 2, 3 ó 4 horas, valdrá siempre 80 km/h. Su representación gráfica será, pues, una recta paralela al eje del tiempo, que corta al



Representación gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo, cuando hay distancia inicial.





de las velocidades en el punto de ordenada 80 km/h.

SIGNIFICADO FÍSICO DEL ÁREA. Sea el rectángulo limitado por los ejes, la recta representativa y una paralela al eje de ordenadas, que pasa por el punto de abscisa t. El área de ese rectángulo es:

Área (OtAB) = Altura · Base

Pero la altura es la velocidad, y la base es el tiempo, de modo que:

$$\text{Área (OtAB)} = v \cdot t = d$$

En la representación gráfica de la velocidad, *el área del rectángulo determinado por los ejes, la recta representativa, y la paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa* t, *representa la distancia recorrida por el móvil hasta el instante* t.

EJ.: *Use la representación gráfica para calcular la distancia recorrida por el tren del ejemplo, al cabo de* $3^h\,30^m$ *de la partida.*

Se podría pensar que tomando una regla y midiendo la abscisa $Ot = 3{,}5$ cm; la ordenada OB = 2 cm; el área del rectángulo 3,5 cm × 2 cm = 7 cm²; y como el área representa la distancia recorrida, ésta sería de 7... Pero ya empiezan las dificultades: ¿7 qué? ¿7 cm²? Evidentemente, no, pues con centímetros cuadrados no se miden distancias.

El error está en haber tomado como abscisa 3,5 cm, pues si bien ésa es la longitud del segmento, no interesan los centímetros, sino lo que representan, es decir, las horas: son $3^h\,30^m$; y en las ordenadas, lo mismo: son, en efecto 2 cm, pero interesa lo que ellos representan: 80 km/h. Y ahora podemos multiplicar: $3{,}5^h \cdot 80$ km/h = 280 km.

PROBLEMAS DE ENCUENTRO. PROBLEMA: *A las 11 parte un automóvil con movimiento uniforme, a 60 km/h; a las 13 parte otro en su persecución, a 100 km/h. Calcular a qué hora y a qué distancia del punto de partida lo alcanza.*

SOLUCIÓN GRÁFICA: Se trazan las rectas representativas del movimiento de cada automóvil: el punto P de intersección tiene como abscisa la hora del encuentro, y como ordenada, la distancia a la partida.

SOLUCIÓN ALGEBRAICA: Llamemos d a la distancia al origen cuando se produce el encuentro, y t al tiempo transcurrido desde la partida del primero.

El primer automóvil recorre:

$$d = v\,t$$

El segundo recorrió la misma

distancia, pero marchó 2 horas menos:

$$d = v' \, (t - 2^h) .$$

Igualando los segundos miembros y despejando t:

$$v' \, (t - 2^h) = v \, t$$

$$v' \cdot t - v' \, 2^h = v \, t$$

$$v' \cdot t - v \, t = v' \cdot 2^h$$

$$t \, (v' - v) = v' \cdot 2^h$$

$$t = \frac{v' \cdot 2^h}{v' - v} = \frac{100 \, \frac{km}{h} \times 2^h}{100 \, \frac{km}{h} - 60 \, \frac{km}{h}} = \frac{200^h}{40} = 5^h$$

El primero marchó 5^h; hora del encuentro: $11^h + 5^h = 16^h$.

En 5^h recorrió:

$d = v \, t = 60 \text{ km/h} \cdot 5^h = 300 \text{ km}$.

PROBLEMA: *A las 7 de la mañana parten dos trenes "El Cuyano": uno desde Buenos Aires hacia Mendoza, y otro desde Mendoza hacia Buenos Aires. Recorren los 1 000 km en 16 horas. Calcular a qué hora y a qué distancia de Buenos Aires se encuentran.*

Claro está que a mitad del camino, pero será instructivo resolverlo tanto gráfica como analíticamente.

SOLUCIÓN GRÁFICA: Se trazan las dos rectas que representan los respectivos movimientos. La del que parte de Buenos Aires (si ése es nuestro punto de referencia) forma con el eje de los tiempos un ángulo agudo, y la del que parte de Mendoza, un ángulo obtuso Se cortan en un punto P, cuyas coordenadas son las soluciones buscadas.

SOLUCIÓN ALGEBRAICA: Llamemos d a la distancia de Buenos Aires al lugar del encuentro, y t al tiempo transcurrido desde la partida. Para el primer "Cuyano"

$$d = v \, t \qquad (1)$$

Para el segundo, en cambio, esa distancia d es igual a la distancia d_o a la que estaba cuando partió, MENOS la distancia $v \, t$ recorrida por él:

$$d = d_o - v \, t \qquad (2)$$

Como los primeros miembros de (1) y (2) son iguales, igualamos los segundos y despejamos t:

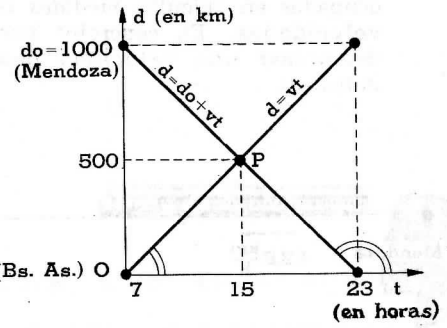
$$v \, t = d_o - v \, t$$

$$2 \, v \, t = d_o \quad \therefore \quad t = \frac{d_o}{2 \, v} =$$

$$= \frac{1\,000 \text{ km}}{2 \times 62{,}5 \text{ km/h}} = 8^h .$$

Se encuentran 8^h después de la partida, es decir, a las 15.

Están a una distancia $d = v \, t =$ $62{,}5 \text{ km/h} \cdot 8^h = 500 \text{ km}$ de Buenos Aires.



La velocidad es una magnitud vectorial

Observemos la representación gráfica del problema anterior. La recta de "El Cuyano" que parte desde Buenos Aires no presenta ninguna particularidad. Pero la del de Mendoza sí: FORMA CON EL EJE DE LOS TIEMPOS UN ÁNGULO OBTUSO. Recordemos que la tangente de ese ángulo representa la velocidad, y como la tangente de un ángulo *obtuso* es *negativa*, resulta que LA VELOCIDAD DEL SEGUNDO "CUYANO" ES NEGATIVA.

Nos vemos así en la necesidad de admitir que, a pesar de que las dos valen 62,5 km/h, NO SON IGUALES, pues SE DIFERENCIAN EN EL SIGNO.

Pero . . . , ¿tendrá algún sentido físico esa diferencia de signos? Lo tiene, y muy sencillo:

Los dos trenes marchan en la misma dirección, pero con SENTIDOS CONTRARIOS.

Es decir, que para determinar una velocidad, no basta indicar su medida: *es preciso señalar su dirección y su sentido.* Hasta ahora no habíamos sentido la necesidad de hacerlo porque sólo estábamos ocupados en calcular *medidas* de velocidades. En concreto: para determinar una velocidad debe indicarse:

1) Su medida;
2) Su dirección;
3) Su sentido.

No es la primera vez que nos encontramos con magnitudes como éstas; lo mismo nos sucedió con la fuerza, y convinimos en llamar vectoriales a todas esas magnitudes. Por esto decimos que:

La velocidad es una magnitud vectorial.

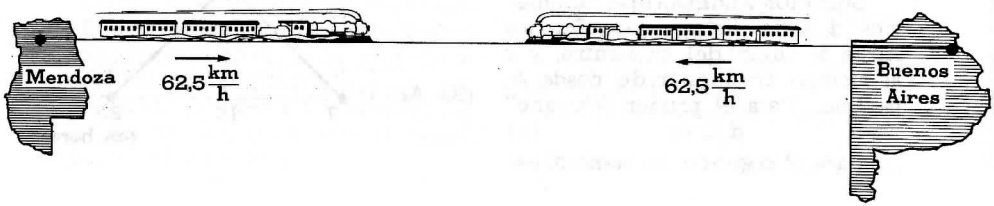
Esto sorprende un poco, porque en la vida diaria estamos acostumbrados a tratarla como si fuera una magnitud escalar.

PROBLEMA: *"El Serrano" parte desde Buenos Aires hacia Córdoba a las 7 de la mañana; a mediodía parte otro "Serrano" desde Córdoba. Recorren los 720 km en 12 horas. Calcular a qué hora y a qué distancia de Buenos Aires se produce el encuentro.*

SOLUCIÓN GRÁFICA: Se construyen las dos rectas, y como siempre, las coordenadas del punto de intersección son las respuestas.

SOLUCIÓN ALGEBRAICA: Llamemos d a la distancia de Buenos Aires al punto del encuentro; t, al tiempo transcurrido desde la partida del primer "Serrano":

$$d = v\,t \qquad (1)$$



Para el segundo "Serrano" hay que tener en cuenta que: 1) ha marchado durante $t - 5$ *horas*; 2) tiene una distancia inicial $d_o = 720$ *km*; 3) su velocidad es negativa: $(-v)$.

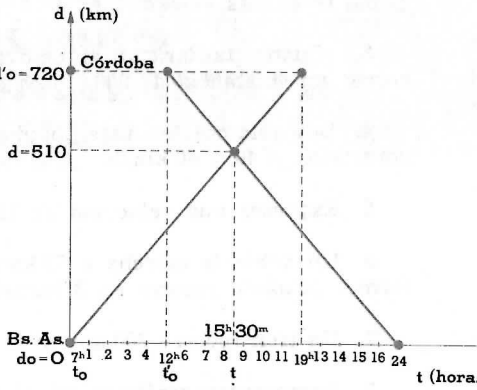
Teniendo presentes estos tres puntos, y recordando que cuando hay camino inicial la fórmula de la distancia es

$$d = d_o + v\,t\,,$$

resulta:

$$d = d_o + (-v) \cdot (t - 5^h) \quad (2)$$

Igualando los segundos miembros de (1) y (2):



$$v\,t = d_o + (-v) \quad (t - 5^h)$$
$$v\,t = d_o - v\,t + v \times 5^h$$
$$2\,v\,t = d_o + v \times 5^h$$

$$t = \frac{d_o + v \times 5^h}{2\,v} = \frac{720 \text{ km} + 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times 5^h}{2 \times 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} =$$

$$= \frac{720 + 300}{120} \text{ horas}$$

$$t = 8{,}5^h = 8^h\,30^m$$

Se encuentran *8,5 horas* después de la partida del primero, es decir, a las $15^h\,30^m$.

La distancia de Buenos Aires es: $d = v\,t = 60 \text{ km/h} \cdot 8{,}5^h = 510 \text{ km}$.

Problemas

1. Un corredor pedestre corre 200 m en 21,6 seg. Calcular su velocidad en m/s, km/h y m/min.

R.: 9,26 m/s; 33,336 km/h; 555,6 m/min

2. La velocidad de un avión es de 970 km/h; la de otro, de 300 m/s. ¿Cuál es el más veloz?

R.: El segundo

3. ¿Cuánto tardará un automóvil, con movimiento uniforme, en recorrer una distancia de 300 km, si su velocidad es de 30 m/s?

R.: 2 h 46 m 40s

4. Dos automóviles distan 5 km uno de otro, y marchan en sentidos contrarios, a 40 y 60 km/h. ¿Cuánto tardarán en cruzarse?

R.: 3 min

5. Expresar una velocidad de 72 km/h en m/s, km/min, cm/s.

R.: 20 m/s; 1,2 km/min; 2 000 cm/s

6. Un vehículo marcha a 72 km/h, con movimiento rectilíneo uniforme. ¿Cuánto recorre en 3 horas?

R.: 216 km

7. Un tren recorre 200 km en $3^h\ 25^m\ 15^s$. ¿Cuál es su velocidad?

R.: 58,5 km/h

8. Representar gráficamente el movimiento de un móvil que marcha a $v = 1$ m/s, con movimiento rectilíneo uniforme.

9. Representar gráficamente el movimiento de un móvil que marcha a $v = 20$ km/h, con M. R. U.

10. Representar gráficamente el movimiento de un móvil que en 2 horas recorre 120 km, con M. R. U.

11. Dos estaciones distan entre sí 100 km. De A sale un tren que tardará 2 horas en llegar a B; de B sale otro hacia A, donde llegará en 1 hora y media. Calcular a qué distancia de A se cruzan, y qué tiempo después de haber partido simultáneamente cada uno de su estación. (Solución gráfica y algebraica.)

R.: 42,8 km; 51 m 26 s

12. Dos móviles, M y M', parten simultáneamente desde A hacia B, y en ese mismo instante parte otro, M'', desde B hacia A. La distancia AB = 90 km, y las velocidades de los móviles son de 6 km/h, 5 km/h y 9 km/h, respectivamente. Determinar, gráfica y analíticamente, los tiempos en que: *a)* M equidista de M' y M''; *b)* M' equidista de M y M''; *c)* M'' equidista de M y M'; *d)* M se cruza con M''.

R.: *a)* 5 h 37 m 30 s; *b)* 6 h 55 m 23 s; *c)* 6 h 12 m 24,8 s; *d)* 6 h

13. Dos cuerpos se mueven siguiendo los lados de un ángulo recto. Partieron simultáneamente del vértice, con velocidades de 25 cm/s y de 32 cm/s, y han transcurrido 10 segundos. ¿A qué distancia están uno de otro? (Soluciones gráfica y algebraica.)

R.: 406 cm

14. Del origen de coordenadas parte un móvil siguiendo el eje y, a una velocidad de 6 km/h, y simultáneamente otro, siguiendo el eje x, a una velocidad de 8 km/h. Al cabo de 10 horas, los móviles dan vuelta, y marchan hacia el origen de las coordenadas, pero ahora la velocidad del primero es la que de ida tenía el segundo, y la del segundo, la que tenía el primero. ¿Cuántas veces, y en qué instantes, estarán separados entre sí por 35 km?

R.: 2 veces; 3 h 30 m y 17 h 30 m

9 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Movimiento variado

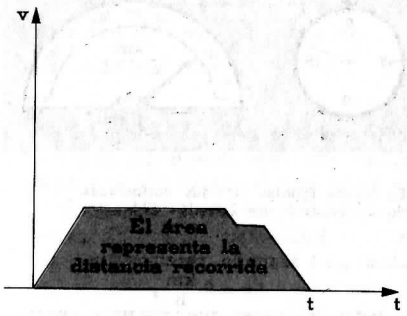
En la práctica, es raro que un móvil tenga movimiento uniforme. Un tren o un automóvil podrán ir en un tramo a 90 $\frac{km}{h}$ pero en otro deberán reducir su velocidad a 60 $\frac{km}{h}$. Por otra parte, al arrancar la velocidad va creciendo, y al contrario, cuando llegan a destino, disminuye progresivamente.

DEFINICIÓN: *Movimiento variado es aquél cuya velocidad no es constante.*

VELOCIDAD MEDIA. La distancia entre Buenos Aires y Mar del Plata es de unos 400 km. Un tren rápido la recorre en unas 4 horas. El movimiento del tren es, desde luego, variado: la velocidad es pequeña al partir, luego crece, habrá momentos en que alcanza a 120 $\frac{km}{h}$, luego decrece, etc. Por ello no podemos hablar de *la velocidad* del rápido, porque no tiene *una sola*. Pero podemos hablar de una *velocidad promedio*, o *velocidad media*. Se la calcula así:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{400 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Como se ve, la fórmula es la misma que utilizamos para el movimiento uniforme. Si el tren hubiera recorrido todo el camino a 100 $\frac{km}{h}$, también hubiera llegado en 4 horas. De modo que podemos decir que: *velocidad media es la velocidad que debería tener el móvil para recorrer la misma distancia, en el mismo tiempo, pero con movimiento uniforme.*

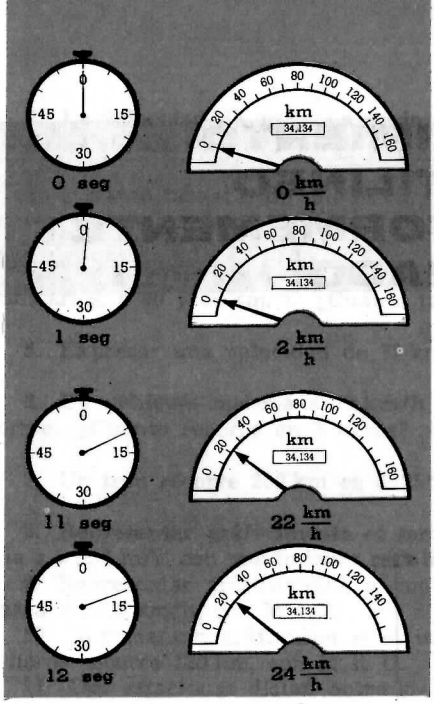


Representación gráfica de la velocidad en el movimiento variado

La curva que la representa es irregular. El área limitada por esa curva con el eje de las abscisas representa, como en el movimiento uniforme, la distancia recorrida por el móvil entre los instantes considerados.

Movimiento uniformemente variado

Un automóvil parte, y va aumentando su velocidad a razón de 2 $\frac{km}{h}$ *en cada segundo*. Si en un momento cualquiera medimos lo que ha *aumentado* la velo-



En lapsos iguales (1ˢ) las variaciones de velocidad son iguales (2 km/h).

cidad en 1 segundo, veremos que

$$\Delta v = 2\,\frac{\text{km}}{\text{h}},$$

y todas las veces que midamos encontraremos el mismo resultado[1].

El movimiento del automóvil del ejemplo está caracterizado por el hecho de que en *lapsos iguales* (siempre de 1 segundo), *la velocidad experimenta variaciones iguales* (siempre de $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

DEFINICIÓN: *Movimiento uniformemente variado es aquel cuya velocidad experimenta variaciones iguales en lapsos iguales.*

En el mismo ejemplo, si medimos el aumento de velocidad en 2ˢ, encontraremos $\Delta v = 4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; en 3ˢ serán $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; en 4ˢ serán $8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$; y así sucesivamente. Es decir, que *los aumentos de velocidad están en proporción con los tiempos*:

$$\frac{2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{1^{\text{s}}} = \frac{4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{2^{\text{s}}} = \frac{6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{3^{\text{s}}} = \frac{8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{4^{\text{s}}}$$

DEFINICIÓN: *Se llama aceleración al cociente entre una variación Δv de velocidad y el tiempo t en que se produce.*

En fórmula:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{t}}$$

En el ejemplo, como todos los cocientes son iguales, tomamos uno cualquiera:

$$a = \frac{6\ \text{km/h}}{3^{\text{s}}} = 2\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$$

De la fórmula resultan:

$$\boxed{\Delta v = a\,t} \quad \text{y} \quad \boxed{t = \frac{\Delta v}{a}}$$

UNIDADES PARA MEDIR ACELERACIONES. Como la aceleración es el cociente entre una variación de velocidad y el tiempo en que se realiza, la unidad para medirla se obtiene como cociente entre las unidades en que se midan las velocidades y los tiempos.

En el ejemplo del auto, la aceleración es

$$a = 2\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}},$$

[1] Con la letra griega Δ (delta mayúscula) se indican *variaciones* de una magnitud.

y la unidad de aceleración es $\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$. Otra de las unidades más comunes es $\frac{\text{m/s}}{\text{s}}$.

SIGNIFICADO FÍSICO DE LA ACELERACIÓN. ¿Qué significa que la aceleración es de $2\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$? Simplemente que la velocidad del auto va aumentando a razón de $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *en cada segundo.*

En general, podemos decir que *la aceleración representa la variación de la velocidad en cada unidad de tiempo.* Es la *rapidez* con que cambia la velocidad.

PROBLEMA: *A las* $9^h\,30^m\,45^s$, *la velocidad de un tren es de* $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ *y a las* $9^h\,30^m\,51^s$ *es de* $78\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. *Calcular la aceleración.*

De acuerdo con la definición:

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{78\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{6^s} = \frac{18\,\text{km/h}}{6^s} = 3\,\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$$

PROBLEMA: *Un auto va a una velocidad de 20 m/s, y* 5^s *después, a 30 m/s. Calcular la aceleración.*

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{10\ \text{m/s}}{5^s} = 2\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como con las unidades se opera como si fueran números, el cociente $\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ se indica siempre así: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, pero no hay que olvidar nunca que $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ significa "m/s en *cada* segundo".

PROBLEMA: *Una bicicleta entra en una pendiente con una velocidad* $v_i = 36$ *km/h, y adquiere una aceleración de* $0{,}5\ m/s^2$. *La bajada dura* 8^s. *¿Qué velocidad* v_f *tiene al final?*

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{\Delta v}{t} \therefore \Delta v = a\,t \\ \Delta v = v_f - v_i \end{array}\right\} \therefore v_f = v_i + a\,t$$

$$v_f = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 8^s = 36\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_f = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 14\,\frac{3\,600}{1\,000}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 50{,}4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

PROBLEMA: *Un móvil tiene un M. R. U. V., de aceleración* $a = 3\ m/s^2$. *¿Qué velocidad ha alcanzado a los* 15^s *de la partida?*

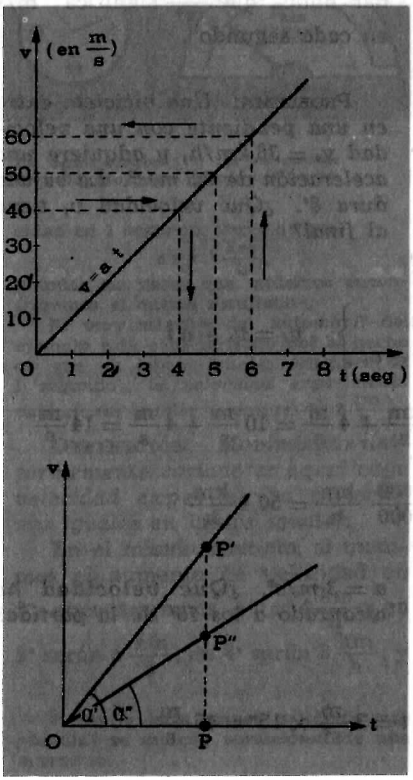
$$\left.\begin{array}{l} \Delta v = a\,t \\ \Delta v = v_f - v_i \\ v_i = 0 \end{array}\right\} v_f = a\,t = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 15^s = 45\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

PROBLEMA: *¿Cuánto tarda un móvil que parte del reposo y se mueve con M. R. U. V., de aceleración $a = 9{,}8\ m/s^2$, en alcanzar una velocidad de 100 km/h?*

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{\Delta v}{t} \therefore t = \dfrac{\Delta v}{a} \\ \text{y como} \quad v_i = 0 \end{array}\right\} t = \frac{v}{a} = \frac{100\ \text{km/h}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \frac{100 \times 1\,000}{9{,}8 \times 3\,600}\ \text{seg} \cong 2{,}8^s$$

PROBLEMA: *Un tren entra en la estación con M. R. U. V. En determinado instante, su velocidad es de 10 m/s, y 15" después es de 1 m/s. Calcular su aceleración.*

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{15^s} = \frac{-9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{15^s} = -0{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Aquí aparece un signo negativo: ¿qué significado físico tiene? Muy sencillo: que la velocidad *disminuye* a medida que pasa el tiempo. En este caso disminuye a razón de 0,6 m/s en cada segundo.

Cuando la aceleración es negativa, el movimiento se llama uniformemente *retardado*; cuando es positiva, uniformemente *acelerado*.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA VELOCIDAD. Representemos gráficamente la velocidad de un M.R.U.V. con aceleración $a = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. El móvil parte del reposo $(v_o = 0) \therefore \Delta v = v - v_o = v$, de modo que $\Delta v = a\,t$ se transforma en $v = a\,t$.

Como para $t = 0$ es $v = 0$ el origen de las coordenadas es un punto de la representación gráfica. Podríamos calcular otros, pero con lo aprendido antes sabemos que *cuando una magnitud es directamente proporcional a otra, su representación gráfica es una recta.*

Como éste es el caso, la representación gráfica de la velocidad es una recta. Tenemos uno de sus puntos; para hallar el otro damos a t un valor cualquiera, por ejemplo, $t = 5^s$:

$$v = a\,t = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5^s = 50\ \text{m/s}.$$

El punto que tiene como abscisa $t = 5^s$, y como ordenada 50 m/s, determina con el origen la recta buscada.

Con la representación gráfica se puede resolver rápidamente cualquiera de los siguientes

PROBLEMAS: 1. *¿Cuál es la velocidad al cabo de 6"?* El dibujo indica suficientemente que es $v = 60\ m/s$.

2. *¿Cuánto tarda en alcanzar una velocidad de 40 m/s?* El dibujo muestra cómo se obtiene el resultado: 4".

INFLUENCIA DE LA ACELERACIÓN. En un mismo sistema representemos nuevamente la recta anterior, y la velocidad de otro móvil cuya aceleración es de $5\ \frac{m}{s^2}$.

Inmediatamente se advierte que a menor aceleración corresponde una recta con menor inclinación sobre el eje de las abscisas. En efecto:

Para $a' = 10\ \frac{m}{s^2}$

$$\frac{PP'}{OP} = \frac{\text{aumento de } v}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta v}{t} = a'$$

$$\frac{PP'}{OP} = \text{tg } \alpha'.$$

Luego, $\text{tg } \alpha' = a'$.

Para $a'' = 5\ \frac{m}{s^2}$

$$\frac{PP''}{OP} = \frac{\text{aumento de } v}{\text{tiempo}} = \frac{\Delta v}{t} = a''$$

$$\frac{PP''}{OP} = \text{tg } \alpha''.$$

Luego, $\text{tg } \alpha'' = a''$.

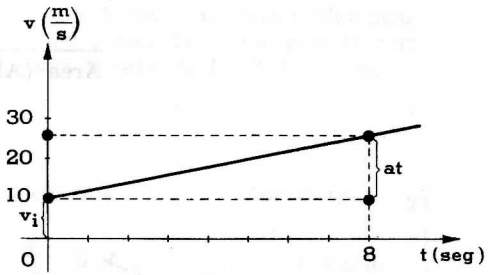
En la gráfica de la velocidad, la aceleración está representada por la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de los tiempos.

PROBLEMA: *Un auto marcha a 10 m/s cuando entra en una pendiente. Al cabo de 8", su velocidad es de 26 m/s. Representar la velocidad gráficamente.*

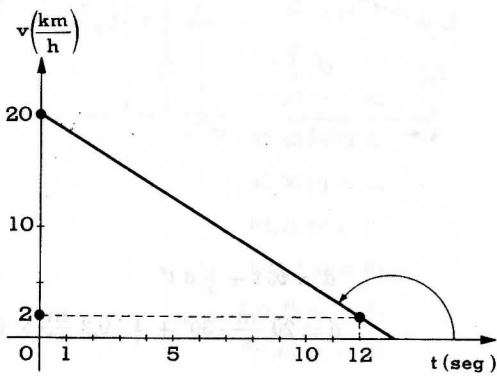
Sabemos que será una recta: necesitamos dos puntos. Pero ya los tenemos, pues en el instante en que entra en la pendiente ($t = 0$), su velocidad es de *10 m/s*; y en el instante $t = 8"$, es $v = 26\ m/s$.

Uniéndolos se tiene la recta. Observemos que no pasa por el origen, sino que corta el eje de las velocidades en el punto que corresponde a la velocidad inicial.

De la gráfica se puede obtener el valor de la aceleración. Compruébese que $a = 2\ \frac{m}{s^2}$.



PROBLEMA: *Representar gráficamente la velocidad de un tren que se mueve con M.U.V. En de-*



terminado instante se mueve con una velocidad de 20 km/h, y 12" después, a 2 km/h.

Observemos que la recta forma con el eje de los tiempos un ángulo obtuso. Como la tangente de ese ángulo, que representa a la aceleración, es negativa, la aceleración será negativa. En efecto, es un movimiento uniformemente retardado. Compruébese que

$$a = -1{,}5\ \frac{\text{km/h}}{\text{s}}.$$

Distancia "d" recorrida en un tiempo "t"

Hemos visto que en el movimiento uniforme y en el variado, el área de la figura limitada por los ejes y la representación gráfica de la velocidad, hasta un instante t, representa la distancia recorrida hasta ese instante. Aquí sucede lo mismo. Pero esta figura puede descomponerse en un rectángulo y un triángulo:

$$d = \text{Área (ABED)} = \text{Área (ABCD)} + \text{Área (DCE)}$$

$$\text{Área (ABCD)} = v_o\, t$$

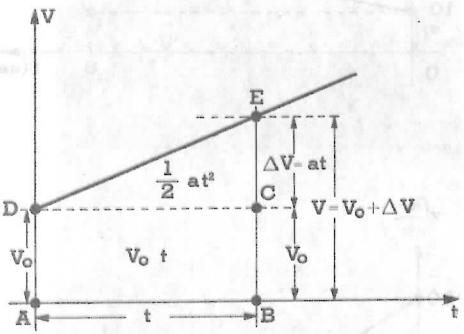
$$\text{Área (DCE)} = \tfrac{1}{2}\, t \cdot \Delta v =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, a\, t^2 \text{ (pues } \Delta v = a\, t)$$

$$\text{Área (ABED)} = v_o\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

Luego,

$$\boxed{d = v_o\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2}$$



Si la velocidad inicial v_o es nula, tendremos:

$$\boxed{d = \tfrac{1}{2}\, a\, t^2}$$

PROBLEMA: *Un auto se mueve con movimiento uniforme, a $v_o = 20$ m/s. Entra en una pendiente que le imprime un M. U. A. de $a = 0{,}2$ m/s², y la recorre en 30". Calcular la longitud de la cuesta.*

Aplicamos la fórmula

$$d = v_o\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$d = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 30^{\text{s}} + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times (30^{\text{s}})^2 = 600\ \text{m} + 90\ \text{m} = 690\ \text{m}.$$

PROBLEMA: *Un chico se deja resbalar por un tobogán, adquiriendo un M.U.A. de $a = 0{,}8\ m/s^2$, que dura 3^s. Calcular el largo del tobogán.*

$$d = \tfrac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$d = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \times (3^s)^2 =$$

$$= \frac{0{,}8 \times 9}{2}\ m = 3{,}6\ m.$$

Representación gráfica de la distancia

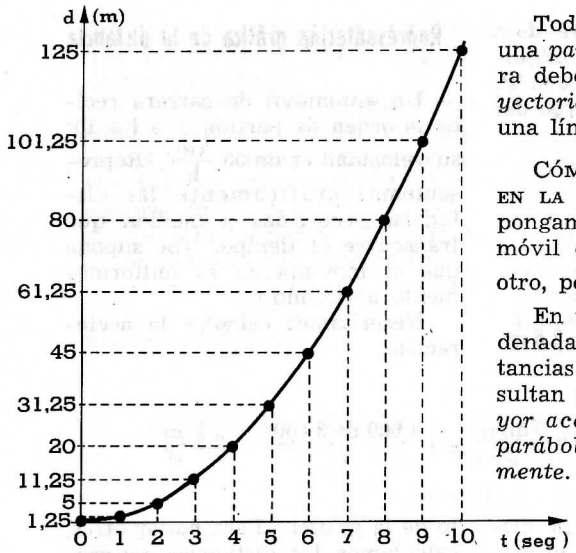
Un automóvil de carrera recibe la orden de partida, y a los 10^s su velocidad es de $90\ \frac{km}{h}$. Representemos gráficamente las distancias recorridas a medida que transcurre el tiempo. (Se supone que el movimiento es uniformemente acelerado.)

Necesitamos calcular la aceleración:

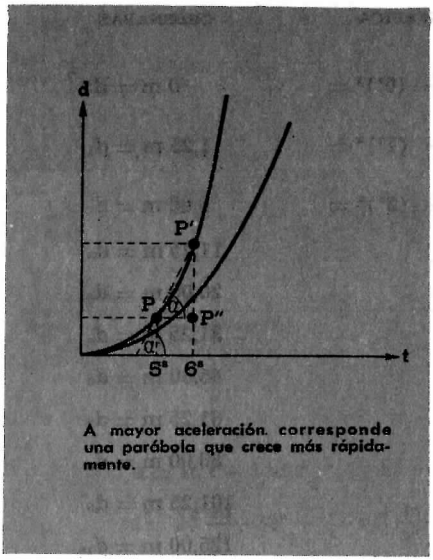
$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{90\ km/h}{10^s} = 9\,\frac{km/h}{s} = 9\,\frac{1\,000\ m/3\,600^s}{s} = 2{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

En el instante "cero", la distancia recorrida es "cero": el origen de las coordenadas es un punto de la gráfica. Para hallar otros, calculamos las distancias recorridas al cabo de 1^s, 2^s, 3^s ..., etc.

ABSCISAS	PUNTOS DE LA GRÁFICA	ORDENADAS
$t_0 = 0^s$	$\frac{1}{2}\, a\, t^2_0 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot (0^s)^2 =$	$0\ m = d_0$
$t_1 = 1$	$\frac{1}{2}\, a\, t^2_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot (1^s)^2 =$	$1{,}25\ m = d_1$
$t_2 = 2$	$\frac{1}{2}\, a\, t^2_2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot (2^s)^2 =$	$5{,}00\ m = d_2$
$t_3 = 3$		$11{,}25\ m = d_3$
$t_4 = 4$		$20{,}00\ m = d_4$
$t_5 = 5$		$31{,}25\ m = d_5$
$t_6 = 6$		$45{,}00\ m = d_6$
$t_7 = 7$		$61{,}25\ m = d_7$
$t_8 = 8$		$80{,}00\ m = d_8$
$t_9 = 9$		$101{,}25\ m = d_9$
$t_{10} = 10$		$125{,}00\ m = d_{10}$



Representación gráfica de la distancia en función del tiempo, en un movimiento rectilíneo uniformemente variado.



A mayor aceleración corresponde una parábola que crece más rápidamente.

Todos los puntos están sobre una *parábola*[1]. De ninguna manera debe confundírsela con la *trayectoria* del móvil, que ha sido una línea recta.

CÓMO INFLUYE LA ACELERACIÓN EN LA FORMA DE LA GRÁFICA. Supongamos que junto con el automóvil del ejemplo anterior parte otro, pero con $a = 2\,\frac{m}{s^2}$.

En un mismo sistema de coordenadas, representemos las distancias recorridas por los dos: resultan parábolas distintas. *A mayor aceleración corresponde una parábola que crece más rápidamente.*

LA VELOCIDAD EN LA GRÁFICA DE LA DISTANCIA. *Velocidad media.* Consideremos la parábola correspondiente al primer automóvil. En el instante en que se cumplen 5ª de la partida, la velocidad del automóvil es:

$$v_5 = a\,t_5 = 2{,}5\ \frac{m}{s^2} \cdot 5^s = 12{,}5\ m/s.$$

A los 6ª:

$$v_6 = a\,t_6 = 2{,}5\ \frac{m}{s^2} \cdot 6^s = 15{,}0\ m/s.$$

La velocidad media, o promedio, con que se ha movido entre el 5º y el 6º segundo, es:

$$v_m = \frac{v_5 + v_6}{2} = \frac{12{,}5 + 15{,}0}{2}\ \frac{m}{s} = 13{,}75\ \frac{m}{s}.$$

[1] *Cómo se puede ver una parábola.* El chorro de agua que sale de una manguera, con cualquier inclinación, describe una parábola, lo mismo que una piedra arrojada oblicuamente hacia arriba.

También podemos calcularla así:

$$v_m = \frac{d_6 - d_5}{t} =$$

$$= \frac{45 - 31{,}25}{1} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 13{,}75 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Observemos que, gráficamente, $d_6 - d_5 = \text{P}''\text{P}'$, y que el lapso entre el 5º y el 6º segundos está representado por el P P'', de modo que:

$$v_m = \frac{\text{P}''\text{P}'}{\text{P P}''}$$

Pero $\frac{\text{P}''\text{P}'}{\text{P P}''}$ es la tangente del ángulo $\alpha = \text{P}'\widehat{\text{P}}\text{P}''$. Luego:

La velocidad media entre dos instantes dados está representada por la tangente del ángulo formado por el eje de abscisas y la recta determinada por los puntos de la parábola correspondientes a esos dos instantes.

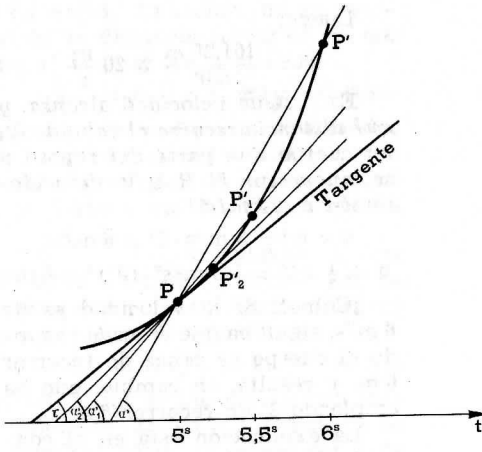
Velocidad instantánea

Es fácil advertir que si en lugar de calcular la velocidad media entre el 5º y el 6º segundo, la calculamos entre los 5ˢ y 5,5ˢ, será más cercana a la velocidad que el automóvil tuvo a los 5ˢ.

En la representación gráfica, el punto P'_1 se habrá acercado al P; y la secante $\text{P P}'_1$ a la parábola, se habrá acercado más a la tangente en P.

Si seguimos disminuyendo el lapso, hasta hacerlo pequeñísimo, P'_2 se habrá acercado muchísimo a P, y la velocidad media será *casi* la del instante 5ˢ; y observemos que la secante $\text{P P}'_2$ se habrá *casi* confundido con la tangente a la parábola en P.

Si el punto P' se sigue acercando al P, cuando esté tan cerca que no los podamos distinguir, la secante se habrá confundido con la tangente en P, y la velocidad media se habrá transformado en la velocidad en el instante 5ˢ, o *velocidad instantánea*, a los 5ˢ, de manera que:



$$v = tg\,\tau\ *$$

Como se ve, la velocidad instantánea está representada en la gráfica por la tangente trigonométrica del ángulo que forman el eje de los tiempos con la recta tangente a la parábola en el punto considerado.

Recuérdese que para medir esa tangente, no se debe medir el ángulo con transportador y luego extraer el valor correspondiente de una tabla. Ha de tenerse presente el significado de cada segmento.

Ej.: *De la gráfica de la página 100, extraer el valor de la velocidad para* $t = 9^s$.

Se traza la tangente a la parábola en el punto de abscisa 9; se mide la ordenada: 101,25 m; se mide el segmento comprendido entre la intersección de la tangente con el eje *t*, y el punto de abscisa 9; son: 5,0ˢ.

* τ, letra griega *tau*.

Luego:

$$v_8 = \frac{101{,}25\ \text{m}}{5{,}0^s} \cong 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ej.: *¿Qué velocidad alcanza, y qué distancia recorre al cabo de 2ˢ, un cuerpo que parte del reposo y se mueve con M. R. U. V. de aceleración $a = 3\ m/s^2$?*

$$v = a\,t = 3\ \text{m/s} \cdot 2^s = 6\ \text{m/s};$$

$$d = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 = \tfrac{1}{2}\ 3\ \text{m/s}^2 \cdot (2^s)^2 = 6\ \text{m}.$$

¡Cómo! Si la velocidad es de 6 m/s, significa que en *cada* segundo el cuerpo *es capaz* de recorrer 6 m, y resulta, en cambio, que ha empleado 2ˢ en recorrer 6 m...

La explicación está en el concepto de velocidad *instantánea*: al cumplirse los 2ˢ, la velocidad es de 6 m/s, pero antes era menor y al comienzo era cero.

Características de un movimiento uniformemente variado

De la definición resulta:

a) *La variación de velocidad* Δv *es directamente proporcional al tiempo en que se efectúa.*

b) *La aceleración es constante.* (Que es otra manera de decir lo anterior.)

c) *La distancia recorrida depende del cuadrado del tiempo:*

$$d = v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2.$$

c') *Si la velocidad inicial es nula, el camino recorrido es directamente proporcional al cuadrado del tiempo:*

$$\frac{d}{t^2} = \frac{d_1}{t_1^2} = \frac{d_2}{t_2^2} = \frac{d_3}{t_3^2} = \ldots$$

$$\ldots = \text{constante}.$$

¿Qué quiere decir *"la distancia es directamente proporcional al cuadrado del tiempo"*? Que si en un tiempo determinado el móvil recorre cierta distancia, en más tiempo recorrerá más distancia. Más aún: que si en 5ˢ, por ejemplo, recorrió 10 m, en tiempo doble, 10ˢ, recorrerá $2^2 = 4$ veces más, o sea, 40 m; en tiempo triple, 15ˢ, recorrerá $3^2 = 9$ veces más, o sea 90 m; etc.

Obsérvese cómo se cumple la proporcionalidad en el ejemplo del automóvil, y calcúlese el valor de la razón de proporcionalidad: luego compáreselo con la aceleración.

Problemas

1. ¿Cuál es la aceleración de un móvil cuya velocidad aumenta en 20 m/s cada 5 segundos?

R.: $4\ \text{m/s}^2$

2. ¿Cuál es la aceleración de un móvil que en 4 segundos alcanza una velocidad de 10 km/h, habiendo partido del reposo? Representar gráficamente la recta de la velocidad.

R.: $2{,}5\ \frac{\text{km/h}}{\text{s}}$

3. ¿Qué velocidad inicial debería tener un móvil cuya aceleración es de $2\ \text{m/s}^2$, para alcanzar una velocidad de 108 km/h a los 5 segundos de su partida?

R.: $20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

4. Un tren va a una velocidad de 18 m/s; frena y se detiene en 15 segundos. Calcular su aceleración y la distancia recorrida al frenar.

R.: $-1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; 135 m

5. Un móvil que partió del reposo tiene un M. R. U. V. Al cabo del

primer segundo tiene una velocidad de 5 m/s. Calcular: *a)* su velocidad a los 10 segundos de la partida; *b)* la distancia recorrida en ese tiempo; *c)* la distancia recorrida entre el 9º y el 10º segundos.

R.: *a)* 50 $\frac{m}{s}$; *b)* 250 m; *c)* 47,5 m

6. Una esfera que parte del reposo se mueve durante 8 segundos con velocidad constante de 10 cm/s; luego comienza a frenarse, con una aceleración constante de -8 cm/s², hasta que se detiene. ¿Qué distancia recorrió desde la partida, y durante cuánto tiempo se ha movido?

R.: 86,25 cm; 9,25 seg

7. Un cuerpo tiene un M. R. U. V. de $a = 3$ m/s². Calcular: *a)* su velocidad al cabo de 5 segundos; *b)* velocidad con que inicia el octavo segundo; *c)* distancia recorrida en los primeros 6 segundos.

R.: *a)* 15 $\frac{m}{s}$; *b)* 21 $\frac{m}{s}$; *c)* 54 m

8. Un cuerpo parte con una velocidad inicial de 240 cm/s y una aceleración constante de -24 cm/s². Calcular: *a)* en qué instante se encuentra a 900 cm del punto de partida; *b)* dónde se encuentra a los 10 segundos de la partida; *c)* en qué instante vuelve a pasar por el punto de partida.

R.: *a)* 5 s y 15 s; *b)* 1 200 cm; *c)* 20 s

9. Un móvil parte del reposo, y en el primer segundo recorre 30 cm con M. R. U. V. Calcular la distancia recorrida en el lapso comprendido entre el 8º y el 9º segundos.

R.: 255 cm

10. Calcular cuánto tardará el móvil del problema anterior en adquirir una velocidad de 35 m/s.

R.: 116,7 s

11. Calcular la distancia recorrida por el móvil anterior en 3 minutos.

R.: 4 860 m

12. Dos móviles parten, el uno hacia el otro, desde los extremos de un segmento de 5 m de longitud. Se mueven con M. R. U. V. de aceleraciones $a = 20$ cm/s² y $a' = 30$ cm/s², respectivamente. ¿En qué instante se produce el encuentro, y a qué distancia de los extremos? Resolverlo gráfica y algebraicamente.

R.: *a)* 4,47 s; *b)* 2 m y 3 m, respectivamente

13. Dos móviles parten simultáneamente del origen de coordenadas, ambos con M. R. U. V. y en la misma dirección. A los 5 segundos de la partida la distancia entre ambos es de 50 m. Calcular la aceleración del segundo móvil, sabiendo que la del otro es de 3 m/s².

R.: 7 $\frac{m}{s^2}$; o bien -1 $\frac{m}{s^2}$ si se mueven en sentidos opuestos

14. Dos móviles parten simultáneamente y en el mismo sentido, desde los extremos A y B de un segmento AB = 15 m. El que parte de A lo hace con una velocidad inicial de 50 cm/s y una aceleración de 35 cm/s²; el de B, con 75 cm/s y -20 cm/s². ¿En qué instante y a qué distancia de A, el primero alcanza al segundo?

R.: *a)* 7,86 s; *b)* 1 473 cm, aproximadamente

10 CAÍDA DE LOS CUERPOS

El problema de la caída

Imaginemos que subimos a una gran torre y que desde lo alto dejamos caer dos esferas de igual radio: una de madera, de 1 $\vec{kg}$, y la otra de hierro, de 10 $\vec{kg}$.

Nos proponemos averiguar, por medio del razonamiento, cuál de las dos esferas caerá más rápido, o si caen juntas.

En primer lugar, ¿por qué caen las esferas? La respuesta es sencilla: porque la Tierra las atrae.

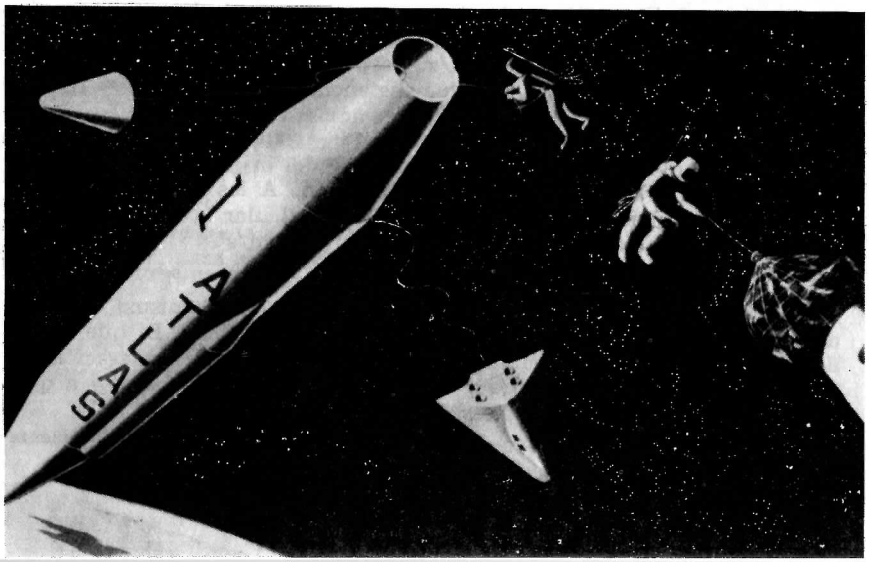
En segundo lugar: ¿las fuerzas con que la Tierra las atrae, son iguales? No: sobre la esfera de hierro, la fuerza de atracción (peso de la esfera) es 10 veces mayor que sobre la de madera.

Con los datos de que disponemos para resolver nuestro problema, que son:

1) *las esferan caen;*
2) *caen porque la Tierra las atrae;*
3) *las fuerzas de atracción son diferentes,*

podemos razonar así: *"Como la caída está provocada por la atrac-*

En la construcción de plataformas satélites, los técnicos verán facilitada su tarea porque los cuerpos no caen.



El método griego. El método moderno.

ción de la Tierra, y ésta es 10 veces mayor sobre la esfera de hierro, la esfera de hierro caerá más rápidamente".
conduce debe ser cierta.

Desde el punto de vista lógico, este razonamiento es correcto, *y si no se ha dejado inadvertidamente de considerar alguna propiedad de los cuerpos,* la conclusión a que Como ejemplo para confirmar su admitieron que los cuerpos más pesados caen con mayor rapidez.

Así razonaron los griegos, que teoría, citaban la diferencia entre la velocidad de caída de una pluma y la de una piedra.

Durante dos mil años, y hasta el advenimiento de Galileo, se creyó que ésta era una verdad indiscutible. Pero, como veremos más adelante, Galileo estaba justamente preocupado por una propiedad de los cuerpos que los griegos no habían advertido: sospechó que si bien un cuerpo más pesado es atraído por la Tierra con una fuerza mayor que otro más liviano, precisamente por ser más pesado "cuesta más" moverlo.

Habría así una compensación, y todos los cuerpos caerían con la misma velocidad.

Planteada la duda, Galileo se preguntó: ¿Qué camino se debe seguir para saber si, en verdad, un cuerpo más pesado cae más rápido?

Una respuesta la habían dado los griegos: *razonar basándose en las propiedades que se conocen.* Pero Galileo pensó que bien podría suceder que una propiedad todavía no conocida hiciera que se razonara con datos incompletos. Y *con cualquier razonamiento efectuado con datos incompletos, se corre el peligro, por lógicamente correcto que sea, de llegar a conclusiones erróneas.*

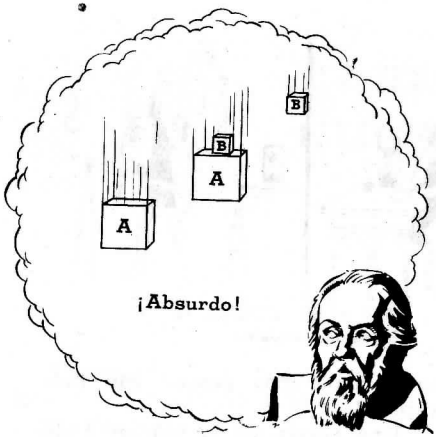
Con esas consideraciones, la respuesta que se dio Galileo fue: *razonar basándose en las propiedades conocidas,* Y SOMETER LAS CONCLUSIONES DEL RAZONAMIENTO A UN EXPERIMENTO.

¿Para qué añadía Galileo la experimentación? Pueden suceder dos cosas:

1) Que los resultados de la experiencia y las conclusiones del razonamiento estén de acuerdo. Luego, se ha obtenido una verdad científica.

2) Que no estén de acuerdo. Si la experiencia está bien realizada y el razonamiento es correcto, no se puede menos que admitir que se desconoce un dato. Luego, *hay que buscarlo.*

Y Galileo decidió aplicar su método:



Si ahora los atamos con un hilo, formaremos un cuerpo *AB* de peso mayor que el de *A* y que el de *B*.

Dejemos caer el cuerpo *AB*. Como antes admitimos que *A* cae más rápido, ahora que está sujeto a *B*, éste retardará su caída.

Recíprocamente, como *B* está sujeto a *A*, su caída será ahora más veloz. Luego, el cuerpo *AB* cae con una velocidad intermedia entre la de *A* y la de B.

Pero aquí nos encontramos con el absurdo de que ahora un cuerpo más pesado (el *AB*) cae con menos velocidad que otro más liviano (el *A*).

CONCLUSIÓN:

Todos los cuerpos deben caer con la misma velocidad cuando se los deja caer desde una misma altura.

Como vemos, la conclusión a que lleva el razonamiento de Galileo es opuesta a la obtenida razonando como los griegos. ¿Cuál es la verdad? Aquí fue donde Galileo aplicó la segunda parte de su método para averiguar la verdad: *la experimentación.*

Experiencia de Galileo.

Razonamiento de Galileo

Imaginemos dos cuerpos de pesos distintos: *A* pesa *10* $\vec{kg}$ y *B* pesa *2* $\vec{kg}$. Admitamos por un momento que *A* caiga con mayor velocidad que *B*.

Experiencia de Galileo

Para pronunciar la última palabra sobre la cuestión, es fama que Galileo anunció en la Universidad de Pisa que haría una experiencia definitiva, dejando caer dos cuerpos desde lo alto de la torre de esa ciudad.

El día anunciado, ante gran cantidad de estudiantes y algunos amigos, el sabio italiano realizó su experiencia con dos cuerpos: uno pesaba 1 libra y el otro 10 libras.

Con gran asombro (se derrumbaba una idea que tenía el apoyo nada menos que de Aristóteles) los asistentes pudieron comprobar: *los dos cuerpos tocaban tierra en el mismo instante.*

Algunos adversarios de Galileo le formularon entonces la siguiente objeción: ¿Por qué una pluma de ave cae más lentamente que una piedra?

Galileo responde que la causa de esa desigualdad de velocidades es la presencia del aire, que opone resistencia a la caída de todos los cuerpos, del mismo modo que si tiramos al agua una piedra plana y otra redonda, ésta se hunde con más rapidez. Precisamente por esa razón, los dos cuerpos que Galileo arrojó desde la Torre de Pisa tenían la misma forma y tamaño: eran dos esferas de igual radio.

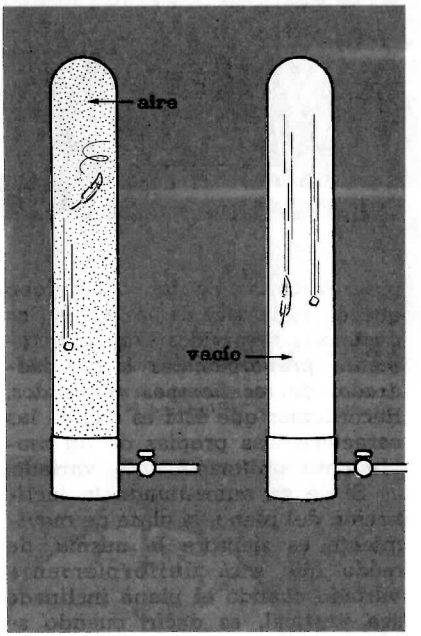
Como la bomba de vacío se inventó en 1650, sesenta años después, no se pudo hacer la experiencia en el vacío, pero cuando se la hizo se comprobó que Galileo tenía razón: en el vacío, una pluma y una piedra caen con la misma velocidad.

En un tubo de vidrio de 1 metro de largo se colocan una pluma y una piedrecita; luego se extrae el aire. Se invierte rápidamente el tubo, y se ven caer ambos cuerpos juntos durante todo el trayecto.

En resumen, podemos decir que:

Todos los cuerpos dejados caer desde una misma altura caen con la misma velocidad en el vacío.

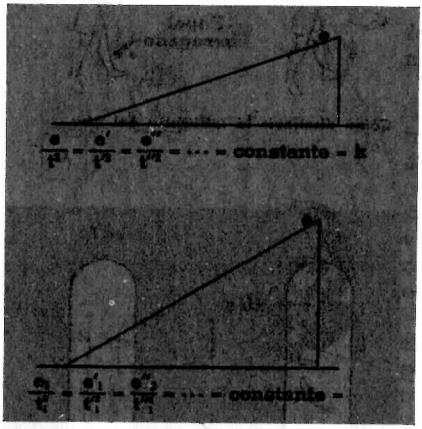
Cómo disminuir la influencia del aire.



¿Qué tipo de movimiento es el de caída?

Galileo quiso saber, además, qué movimiento es el de caída: uniforme, uniformemente variado, o tal vez de otra clase. Para ello realizó una serie de experimentos muy ingeniosos, con planos inclinados.

Pueden resumirse así: sobre un plano inclinado, cuya inclinación hacía variar de una experiencia a otra, dejó rodar, a partir del re-



poso, distintas bolitas. Comprobó que en cada uno de los casos, *las distancias recorridas eran directamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados.* Recordemos que ésta es una de las características propias de un movimiento uniformemente variado.

Si se va aumentando la inclinación del plano, la clase de movimiento es siempre la misma, de modo que será uniformemente variado cuando el plano inclinado sea vertical, es decir, cuando se produzca una caída libre. En resumen:

La caída en el vacío es un movimiento uniformemente variado.

Claro está que la presencia del aire modifica algo el movimiento, sobre todo si la velocidad es grande. Galileo mismo estableció que si se deja caer un cuerpo desde una gran altura, el movimiento es al comienzo uniformemente variado, pero poco a poco la aceleración va disminuyendo, por la resistencia del aire, hasta que llega un momento en que se anula, y por consiguiente, el movimiento se hace uniforme.

Aceleración de la gravedad

La principal característica de la caída de los cuerpos es que para todos la aceleración de su movimiento es la misma. Porque no significa otra cosa el hecho de que, lanzados desde una misma altura, alcancen velocidades iguales. Se puede caracterizar la caída libre diciendo que:

En el vacío, todos los cuerpos caen con la misma aceleración.

Esa aceleración, provocada por la gravedad, se llama *aceleración de la gravedad.* Su valor es de aproximadamente 980 cm/s². Es decir, que un cuerpo que cae va aumentando su velocidad en 980 centímetros por segundo, en cada segundo.

Ese valor no es el mismo para todos los lugares de la Tierra: depende de la latitud y de la altura sobre el nivel del mar. En los polos alcanza su mayor valor, y en el ecuador, el menor:

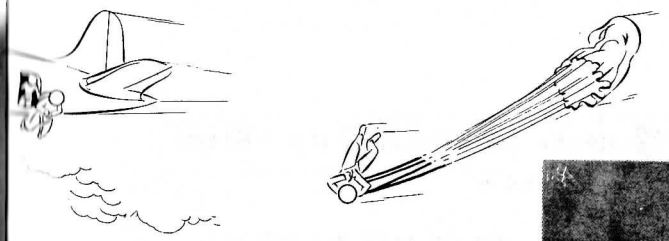
En los polos: $g \cong 983$ cm/s².

En el ecuador: $g \cong 978$ cm/s².

A 45° de latitud y al nivel del mar se llama *aceleración normal*, y vale:

$g_n = 980{,}7$ cm/s², aproximadamente.

Estas variaciones del valor de g tienen como curiosa consecuencia que un mismo cuerpo cambie de



Apenas comenzada la caída, el movimiento es uniformemente acelerado...

... pero la resistencia del aire (aumentada por el paracaídas) lo hace uniforme.

peso al pasar de un lugar a otro en la Tierra.

Fórmulas de la caída de los cuerpos

Como se trata de un movimiento uniformemente variado, le son aplicables las fórmulas de éste.

DISTANCIA RECORRIDA: 1) Si se deja caer un cuerpo, al cabo de t segundos, la distancia recorrida será:

$$d = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

llamando g a la aceleración de la gravedad.

2) Si se arroja un cuerpo hacia abajo, es decir, si se le da una velocidad inicial v_o, la distancia recorrida en t segundos será:

$$d = v_o t + \tfrac{1}{2} g t^2.$$

3) Si se arroja un cuerpo verticalmente hacia arriba, con velocidad inicial v_o, el movimiento es retardado, y:

$$d = v_o t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

VELOCIDAD. En el lapso t, la variación Δv de velocidad es:

$$\Delta v = g t.$$

1) Si se lo deja caer ($v_o = 0$), la velocidad al cabo de t segundos será:

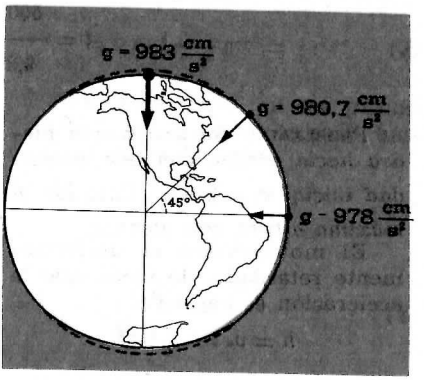
$$v = g t.$$

2) Si se lo arroja verticalmente hacia abajo, con velocidad inicial v_o,

$$v = v_o + g t.$$

3) Si se lo lanza hacia arriba, con velocidad inicial v_o,

$$v = v_o - g t.$$



PROBLEMA: *Desde una torre se deja caer una piedra, que tarda 4" en llegar al suelo. Calcular la altura de la torre.*

Es equivalente calcular el camino recorrido por la piedra en 4" de caída, que suponemos libre:

$$h = \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 = \tfrac{1}{2}\, 980\, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot (4^{\text{s}})^2 = \tfrac{1}{2} \times 980 \times 16\, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\, \text{s}^2 = 7\,840\ \text{cm}$$

$$h = 78{,}4\ m.$$

PROBLEMA: *Calcular la velocidad con que llega al suelo la piedra del problema anterior.*

$$v = g\, t = 980\, \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \times 4^{\text{s}} = 3\,920\, \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 39{,}20\, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{En } \frac{\text{km}}{\text{h}}\text{:}\quad v = 39{,}20\, \frac{\text{m}}{\text{s}} = 39{,}20\, \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} = \frac{39{,}20 \times 3\,600}{1\,000}\, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v = 141{,}1\, \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

PROBLEMA: *Se dispara una bala verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial* $v_o = 500\, \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Calcular cuánto tiempo dura la subida.*

Durará hasta que la velocidad ascendente se anule:

$$\text{y como:}\quad \left.\begin{array}{l} v = 0 \\ v = v_o - g\, t \end{array}\right\} v_o - g\, t = 0 \ \therefore\ t = \frac{v_o}{g}$$

$$t = \frac{500\, \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}8\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cong 51^{\text{s}}$$

PROBLEMA: *Se arroja una piedra hacia arriba, con una velocidad inicial* $v_o = 8\, \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Calcular la máxima altura que alcanza.*

El movimiento es uniformemente retardado, de modo que la aceleración es negativa:

$$h = v_o\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2$$

Desconocemos t, pero sabemos que cuando alcanza su altura máxima, la piedra tiene velocidad cero:

$$v = v_o - g\, t = 0 \ \therefore\ t = \frac{v_o}{g}$$

Reemplazando en la expresión de h:

$$h = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \tfrac{1}{2}\, g \cdot \left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = \frac{v_o^2}{g} - \tfrac{1}{2}\, \frac{v_o^2}{g} = \tfrac{1}{2}\, \frac{v_o^2}{g}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, \frac{\left(8\, \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{9{,}80\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cong 3{,}3\ \text{m}.$$

PROBLEMA: *Un nadador se deja caer desde un trampolín de 5 m de altura. Calcular:* a) *cuánto tarda en entrar en el agua;* b) *la velocidad con que entra.*

a) El cálculo del tiempo:

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5\ \text{m}}{9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{1{,}0204\ \text{s}} \cong 1^{\text{s}}$$

b) Para calcular la velocidad empleamos la expresión del tiempo obtenida en la primera parte:

$$v = g\,t = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2 \times 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\ \text{m}} = \sqrt{98\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$v \cong 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

PROBLEMA: *Dos cuerpos están sobre la misma vertical, a* d = 40,82 *metros uno de otro. Simultáneamente se deja caer el más alto y se lanza el otro hacia arriba con velocidad inicial* v_o. *Calcular* v_o, *para que ambos se encuentren cuando el segundo alcance su altura máxima.*

Cuando el 2º alcanza su altura máxima h, su velocidad es nula:

$$v = v_o - g\,t = 0 \therefore v_o = g\,t \quad (1)$$

En ese instante t, ha alcanzado una altura h:

$$h = v_o\,t - \tfrac{1}{2} g\,t^2 =$$

$$= g\,t \cdot t - \tfrac{1}{2} g\,t^2 = \tfrac{1}{2} g\,t^2 \quad (2)$$

Por otra parte, en ese instante t, el primer cuerpo ha caído hasta una altura $d - h$:

$$d - h = \tfrac{1}{2} g\,t^2 \quad (3)$$

De (2) y (3): $d - \tfrac{1}{2} g\,t^2 = \tfrac{1}{2} g\,t^2 \therefore t = \sqrt{\frac{d}{g}}$ (4)

De (1) y (4): $v_o = g\sqrt{\frac{d}{g}} = \sqrt{d\,g} =$

$$= \sqrt{9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 40{,}82\ \text{m}} \cong \sqrt{400\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \qquad v_o \cong 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Galileo Galilei

Galileo inauguró una nueva era en la ciencia, al poner como juez supremo la observación y la experiencia. Los griegos fueron grandes matemáticos y filósofos, pero no descollaron en la física, justamente porque la física es una ciencia basada en la observación y la experiencia. Los griegos eran excelentes razonadores, y creían que *todo* podía ser resuelto pensando y discutiendo. Galileo, en cambio, admitía la importancia del razonamiento, pero dejaba que la experiencia diera el veredicto. Con él se inicia la época de la ciencia moderna, que se puede resumir en la fórmula:

Ley = Razonamiento + Experiencia

Galileo nació en Pisa el 18 de febrero de 1564, día en que dejaba de existir Miguel Ángel. En realidad se lo ha considerado siempre como natural de Florencia, pues sus padres eran florentinos y se encontraban en Pisa sólo por casualidad. Su padre, Vincenzo Galilei, era de una familia noble venida a menos; su pobreza le obligó a ocuparse de telas, a pesar de que su ambición era ser un gran músico. Uno de sus seis hijos, Vincenzo, heredó el talento paterno para la música, y gustaba de tocar la mandolina y la guitarra; componía, además, agradables versos, cantaba, y fue uno de los más grandes literatos de su tiempo: se lo consideraba como uno de los creadores de la lengua italiana moderna.

Los padres de Galileo deseaban que éste fuera médico, porque era una ocupación lucrativa. Contra su gusto, el joven siguió los estudios de medicina en la Universidad de Pisa, pero como los detestaba, no asistía a los cursos y terminó por abandonarlos completamente. En cambio, se pasaba todo el tiempo estudiando con entusiasmo la física de Aristóteles y de Arquímedes, improvisando experiencias con los objetos más variados.

Salía a caminar por las calles de la vieja ciudad de Pisa, meditando sobre sus lecturas. Un día, en una de sus salidas, llegó hasta la catedral, y mientras observaba las oscilaciones de una gran lámpara que acababa de ser encendida, descubrió una de las leyes más importantes de los péndulos. Sólo tenía diecinueve años. Para medir el tiempo de las oscilaciones se valió de su pulso. Vuelto a su casa prosiguió afiebradamente sus observaciones, y pronto su cuarto se vio colmado de péndulos de todas longitudes y clases: mandolinas y pipas oscilaban gravemente, mientras el muchacho medía tiempos y sacaba cuentas.

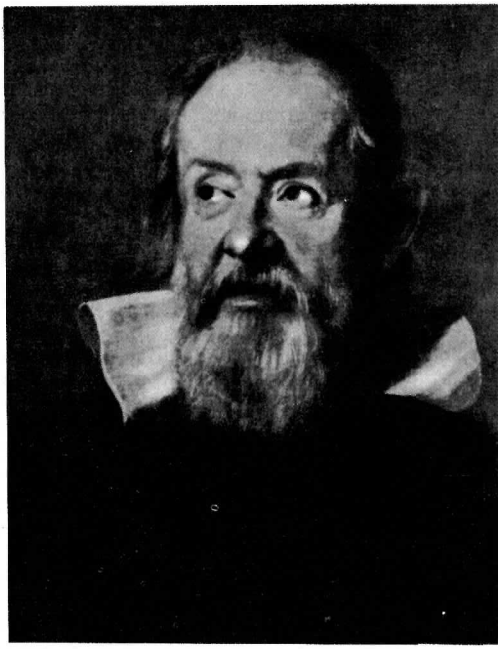
Pero, mientras tanto, sus estudios de medicina iban de mal en peor. Irritado, su padre le cortó el envío de dinero; y Galileo tuvo que volver a Florencia y trabajar en la tienda paterna. Pronto su cuarto de Florencia se llenó de péndulos y planos inclinados, y el padre ya desesperaba de ver a su hijo convertido en "hombre de provecho".

Por entonces inventó la famosa *bilancetta*, aparatito que permitía averiguar los pesos específicos. Este invento atrajo la atención de los consejeros del Gran Duque, y Galileo comenzó a hacerse famoso El padre consintió entonces en que se dedicase por entero a sus raras ocupaciones; pronto vería que su hijo, a quien consideraba poco menos que un inútil, era uno de los genios más portentosos que había tenido la humanidad.

A los pocos años fue nombrado profesor en Pisa, y más adelante en la Universidad de la República de Padua. Llegó a dar clases delante de 2 000 alumnos, venidos de todos los puntos de Europa, y entre ellos hubo príncipes, nobles y grandes dignatarios de la Iglesia.

Galileo fue un trabajador incansable, hasta cuando la ceguera lo redujo a la condición de inválido. Fue físico, astrónomo, matemático, ingeniero militar y civil. Descubrió las leyes de la caída de los cuerpos y las leyes del péndulo; fue

Galileo Galilei.



el creador de la dinámica; construyó el primer termómetro; inventó un telescopio y lo usó para la observación astronómica por primera vez en el mundo; descubrió los satélites de Júpiter y las manchas del Sol; dio las bases del método científico.

Por defender la teoría de Copérnico, según la cual la Tierra no es el centro del Universo, fue sometido a proceso por la Inquisición y tuvo que abjurar de sus opiniones. Condenado a prisión perpetua, el papa Urbano VIII conmutó la pena por la de reclusión en la casa-quinta de los Médicis.

Murió ciego y enfermo, el 8 de enero de 1642, junto a sus dos discípulos más fieles y queridos: Viviani y Torricelli. Recibió en sus últimos momentos la bendición del papa Urbano VIII, que había sido su gran amigo.

Su obra maestra fue *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove Scienze*, publicada en Leiden, Holanda, en 1638.

Problemas

(Tómese para g el valor 9,8 m/s²)

1. Una bomba lanzada desde un avión tarda 10 segundos en dar en el blanco. ¿A qué altura volaba el avión?

R.: 490 m

2. Desde lo alto de una torre de 150 metros de altura se deja caer una piedra de 10 $\vec{kg}$. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo? ¿Cuánto tardaría si pesara 20 $\vec{kg}$?

R.: 5,5 segundos

3. Expresar la aceleración de la gravedad en $\frac{km/h}{seg}$.

R.: $35{,}28 \frac{km/h}{seg}$

4. ¿Qué velocidad alcanza un cuerpo al cabo de 3 segundos de caída en el vacío?

R.: 29,4 m/s

5. ¿Cuántos segundos después de iniciada su caída, la velocidad de un cuerpo es de 100 km/h?

R.: 2,83 s

6. ¿Con qué velocidad inicial se debe lanzar hacia arriba una piedra, para que alcance una altura de 4,9 m?

R.: 9,8 m/s

7. ¿Con qué velocidad llega al suélo un cuerpo arrojado desde una altura de 5 m? ¿Cuánto tarda en caer?

R.: $9{,}9 \frac{m}{s}$; 1,01 s

8. ¿Con qué velocidad inicial deberá usted lanzar una moneda para que roce el techo de su habitación?

9. Se lanza un cuerpo hacia arriba con una velocidad de 98 m/s. ¿Qué altura y qué velocidad alcanza al cabo de 9 segundos?

R.: 485,1 m; 9,8 m/s

10. ¿Qué altura máxima alcanza el cuerpo del problema anterior?

R.: 490 m

11. Un observador situado a 40 m de altura ve pasar un cuerpo hacia arriba, y 5 segundos después lo ve pasar hacia abajo. ¿Cuál fue la velocidad inicial del cuerpo, y hasta qué altura llegó?

R.: 37,2 m/s; 70,625 m

12. Los puntos A y B están sobre la misma vertical, pero A 512 m más arriba. Desde A se deja caer una bola, y 4,3 segundos más tarde se deja caer otra desde B, y ambas llegan al suelo simultáneamente. ¿A qué altura está B, y cuánto duró la caída de A?

R.: 490 m; 14,3 segundos

13. Dos cuerpos, A y B, situados sobre una misma vertical y separados por una distancia de 100 m, son arrojados uno contra el otro con velocidades de 30 y 20 m/s, respectivamente. ¿Cuándo y dónde se chocan?

R.: 2 segundos; a 20,4 m del origen de B

14. Un cuerpo cae libremente desde cierta altura. En el punto A de su trayectoria tiene una velocidad de 30 m/s; en el B, 79 m/s. ¿Cuánto tardó en recorrer la distancia AB, y cuál es ésta?

R.: 5 segundos; 272,5 m

15. Dos cuerpos están situados en una misma vertical. El de arriba se deja caer en el mismo instante en que el de abajo es lanzado hacia arriba con una velocidad de 80 m/s. ¿Desde qué altura deberá dejarse caer el de arriba para que ambos se encuentren justamente donde el de abajo alcanza su altura máxima?

R.: 653 m

11 MOVIMIENTOS COMPUESTOS

Movimiento + movimiento + movimiento . . .

Hemos estudiado lo que ocurre cuando un cuerpo se mueve respecto de un punto de referencia. Conociendo algunos datos, podemos decir en qué lugar se encuentra en un instante determinado, y con qué velocidad se mueve.

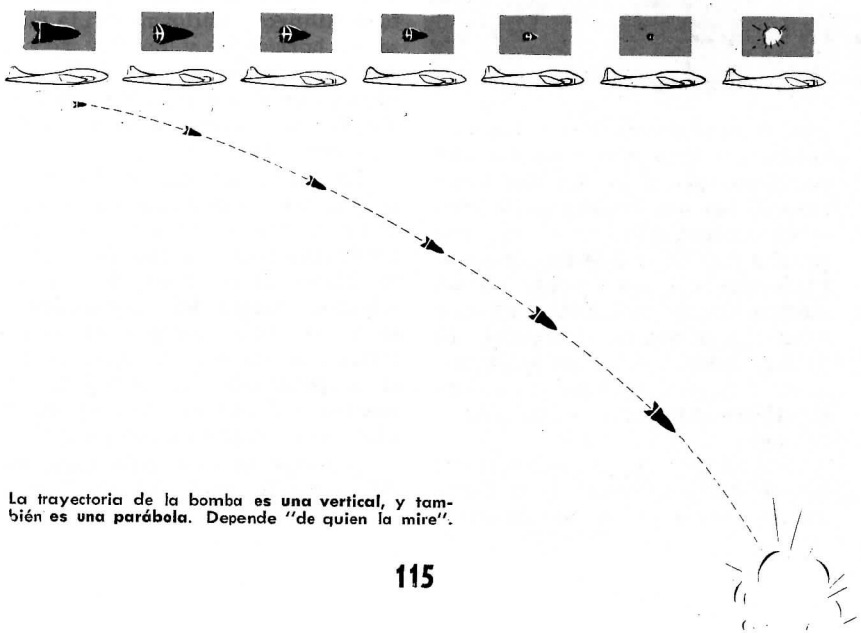
Es frecuente, sin embargo, encontrarse con problemas como éste: un pasajero de un barco camina sobre cubierta, mientras el barco navega por un río cuyas aguas también se mueven. ¿Cuál es el movimiento del pasajero respecto de la costa? ¿Cuál es su velocidad?

Otro ejemplo: un nadador se lanza perpendicularmente a la corriente, tratando de alcanzar la otra orilla. Se conocen la velocidad propia del nadador y la propia de la corriente. ¿Cuál será la velocidad resultante del nadador con respecto a la costa?

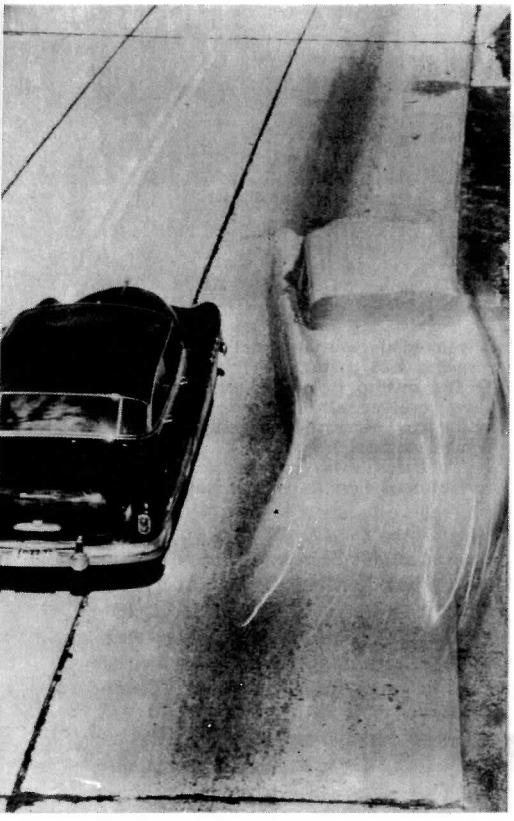
Del mismo tipo es el problema que debe resolver el bombardeador de un avión para dejar caer la bomba sobre el blanco elegido.

En física, estos problemas se llaman "de composición de movimientos".

¿CUÁL ES LA TRAYECTORIA DE UNA BOMBA? Si consultamos al que arroja las bombas desde un avión, nos dirá que la trayectoria, *tal como la ve él*, es una recta vertical. Si consultamos a cualquiera que *desde tierra* la haya visto desde



La trayectoria de la bomba es una vertical, y también es una parábola. Depende "de quien la mire".



Cualquiera sea la llanta en movimiento que tomemos en cuenta, la curva que describe un punto de la misma depende del punto de referencia.

que la arrojan hasta que llega al suelo, nos dirá que describe una parábola. ¿Cuál de los dos tiene razón? Los dos la tienen. La aparente contradicción no es sino una prueba más de lo que dijimos: para hablar del movimiento de un cuerpo, antes que nada hay que elegir un punto de referencia. El aviador considera como punto fijo a su avión; el que observa desde tierra considera como fija a la tierra.

PROBLEMA: *¿Cuál es la curva que describe un punto de la llanta de un automóvil en movimiento?*

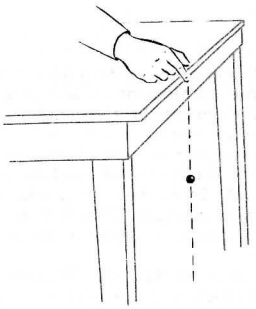
En primer lugar: ¿está bien planteado el problema? No: antes hay que elegir el punto de referencia (lo que equivale a elegir el lugar donde estemos nosotros cuando miremos girar la rueda). Elija ahora su punto fijo, y dé la respuesta. Luego elija otro, y responda.

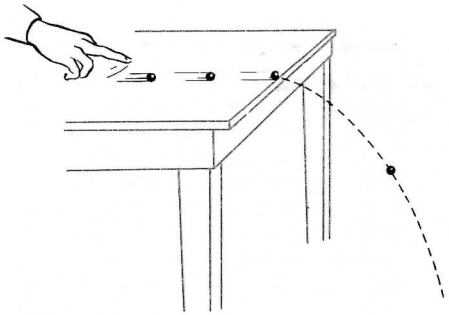
UN PROBLEMA PREVIO. Si desde el borde de una mesa dejamos caer una bolita, tocará el suelo en el pie de la vertical. El movimiento es simplemente una caída libre, es decir, un movimiento uniformemente variado.

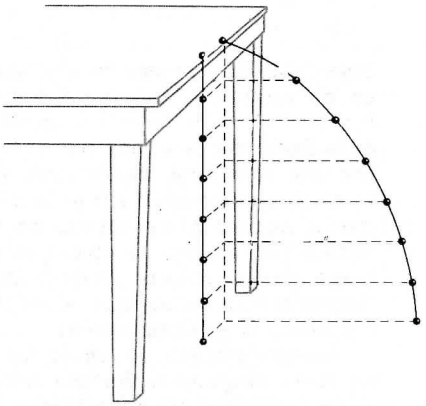
Pero, ¿qué movimiento tiene la bolita, si en lugar de dejarla caer desde el borde de la mesa la colocamos primero en el centro de ésta, y luego le damos un golpe con el dedo? Mientras está sobre la mesa se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (si la mesa es horizontal y no hay roce). Al llegar al borde, cae. Todos sabemos que ahora no caerá sobre el pie de la vertical anterior, sino más adelante.

La bolita, al salir de la mesa, además de su movimiento rectilíneo y uniforme adquiere otro: el uniformemente variado de la caída libre. Tiene, pues, *dos movimientos*. Ahora debe determinarse si un movimiento tiene o no influencia sobre el otro, es decir, si la presencia del nuevo movimiento modifica o no al anterior, y viceversa. Vayamos por partes.

¿Influye la traslación horizontal sobre la caída libre? Tomemos dos bolitas y, desde una mis-







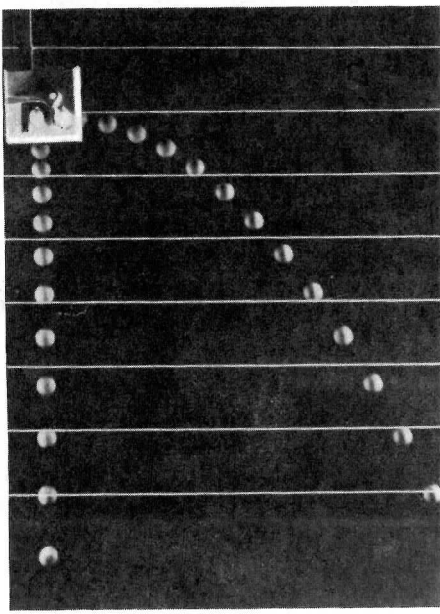
ma altura, a una de ellas simplemente la dejamos caer, mientras simultáneamente damos a la otra un golpe hacia adelante con el dedo. La primera sólo tiene un movimiento: el de caída. La segunda, en cambio, tiene dos: la traslación horizontal uniforme y el de caída.

Observaremos que ambas tardan el mismo tiempo en caer: *el movimiento de traslación horizontal no tiene ninguna influencia sobre el de caída, que se cumple en el mismo tiempo, haya o no traslación horizontal.*

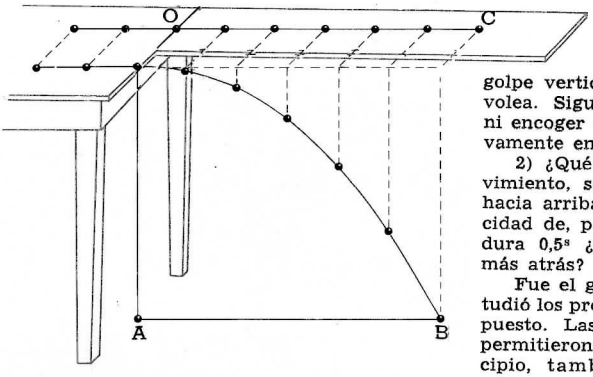
¿Influye la caída libre sobre la traslación?

Otra experiencia: dejamos caer una bolita y marcamos el punto A de caída en el piso (se puede poner una capa de talco, para que la bolita marque el punto).

Luego colocamos dos bolitas como indica el dibujo de la página siguiente, y con un mismo golpe les comunicamos a ambas la misma velocidad de traslación horizontal. Una de las bolitas cae, pero la otra sigue sobre la tabla. A esta última la detenemos cuando



Fotografía que ilustra el movimiento de dos pelotas de golf al caer desde la misma altura. Una de ellas lo hace libremente, la otra recibió un impulso horizontal.



oímos que la primera toca el piso en el punto B. Medimos las distancias OC y AB: son iguales. OC es la distancia recorrida por la bolita que sólo tiene movimiento de traslación horizontal; AB es la distancia horizontal recorrida, en el mismo tiempo que la otra, por la bolita que no sólo se traslada horizontalmente, sino que simultáneamente cae. CONCLUSIÓN:

El movimiento de caída libre no tiene ninguna influencia sobre el de traslación horizontal, pues la bolita avanza lo mismo, caiga o no.

OTROS EJEMPLOS. Es fácil encontrar otros ejemplos en que se observe que un cuerpo dotado simultáneamente de dos movimientos cumple cada uno de ellos como si el otro no existiera:

1) Una persona va caminando. Saca una moneda del bolsillo, y dándole un golpe verticalmente hacia arriba, la revolea. Sigue caminando, y sin extender ni encoger el brazo, la moneda cae nuevamente en su mano.

2) ¿Qué ocurre si, con el tren en movimiento, se da un salto verticalmente hacia arriba? Si el tren va a una velocidad de, por ejemplo, 20 m/s y el salto dura 0,5^{s} ¿caerá la persona 10 metros más atrás?

Fue el gran Galileo Galilei quien estudió los problemas del movimiento compuesto. Las conclusiones que obtuvo le permitieron enunciar el siguiente principio, también llamado principio de Galileo:

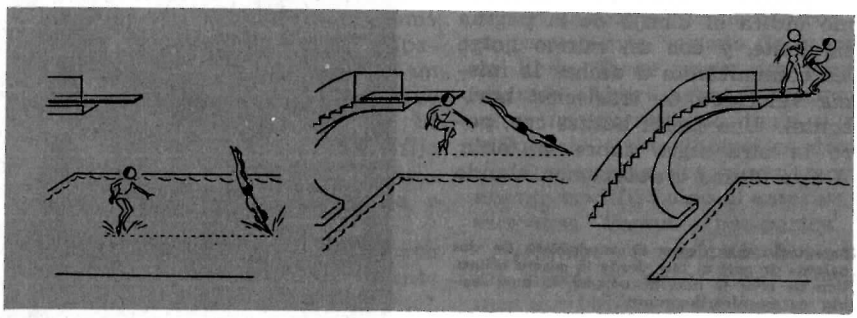
Principio de la independencia de los movimientos

Si un cuerpo tiene un movimiento compuesto, cada uno de los movimientos componentes se cumple como si los demás no existieran.

PROBLEMA: *Un avión vuela horizontalmente a 1 960 m de altura, a una velocidad de 180 km/h. El aviador debe dejar caer una bolsa con provisiones a un grupo de personas aisladas por una inundación. ¿Cuántos metros antes de llegar sobre el grupo debe dejar caer la bolsa?*

La bolsa cae y avanza simultáneamente, de modo que el aviador deberá dejarla caer antes de estar sobre el grupo, y a una distancia tal que en el tiempo que la bolsa emplea para llegar al suelo, recorra esa distancia hacia adelante.

Tiempo que tarda en caer. Como ambos movimientos se cumplen con absoluta independencia (principio de



Galileo), el tiempo de caída será el mismo que emplearía si el avión pudiera estar quieto y la dejara caer desde esa misma altura. Aplicamos, pues, las fórmulas de la caída libre:

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2$$

y despejando t,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Reemplazando por los valores:

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 1\,960 \text{ m}}{9{,}80 \text{ m/s}^2}} = 20^s.$$

La bolsa tarda en caer 20^s. Pero durante esos 20^s ha estado avanzando con una velocidad de 180 km/h.

Camino horizontal recorrido por la bolsa (y el avión): Como el movimiento es uniforme (suponemos nula la resistencia del aire), aplicamos sus fórmulas:

$d = v\,t$

$$d = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 20^s = 180 \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600^s} \times$$

$$\times 20^s = \frac{180 \times 1\,000 \times 20}{3\,600} \text{ m}$$

$d = 1\,000$ m

De modo que para que la bolsa caiga donde está la gente, es necesario que el aviador la deje caer 1 000 m antes de llegar sobre el grupo.

EJ.: *¿Dónde caería si la hubiera dejado caer en el instante en que pasa por sobre el grupo?*

PROBLEMA: *En el momento en que un tren que corre a 90 km/h entra en un puente de 10 m de largo, un pasajero deja caer afuera del tren un objeto desde 2,45 m sobre el nivel del suelo. ¿A qué distancia de la entrada del puente caerá el objeto?*

El problema es análogo al anterior.

R.: 17,5 m

EJ.: *¿Cuántos metros antes de que el tren entre en el puente debería soltar el objeto, para que éste caiga en la mitad del puente?*

R.: 12,5 m

La velocidad, magnitud vectorial

Recordemos una observación que hicimos en un capítulo anterior[1], y sobre la que no insistimos en ese lugar: LA VELOCIDAD ES UNA MAGNITUD VECTORIAL. No tenía mayor importancia insistir sobre este concepto en aquel capítulo, pues sólo nos referíamos a movimientos rectilíneos y a móviles dotados de un solo movimiento. Pero ahora, estudiando movimientos compuestos, ese concepto tiene una importancia fundamental.

Dijimos que una magnitud es vectorial cuando para determinar una cantidad no basta con decir su *medida* en una cierta unidad, sino que es necesario determinar también una *dirección* y un *sentido*.

Si se piensa en el problema del avión, se comprenderá que no es suficiente que el observador le diga al piloto: "Dé al avión una velocidad de 180 km/h". Deberá indicarle qué dirección y qué sentido deberá tener esa velocidad.

Representación gráfica. Como toda cantidad de una magnitud vectorial, una velocidad se representa con un vector, cuyas características son:

1) *Punto de aplicación:* el que ocupa el móvil en su trayectoria, en el instante considerado.

2) *Dirección:* tangente a la trayectoria.

3) *Sentido:* el del movimiento.

4) *Medida:* la que tenga en ese instante.

[1] Ver pág. 90.

La aceleración, magnitud vectorial

También la aceleración es una magnitud vectorial, pues no sólo tiene una *medida*, sino también *dirección* y *sentido*. En el movimiento rectilíneo uniformemente *acelerado*, es un vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector velocidad; en cambio, en el *retardado*, si bien su dirección coincide con la del vector velocidad, su sentido es el opuesto. Esto se refleja en:

1) La velocidad va *disminuyendo*. (Las variaciones de v son *negativas*.)

2) En la fórmula de la velocidad en un instante dado, $v = v_0 - a\,t$, el signo de la aceleración, *que es el que evidencia su sentido*, es contrario del signo de la velocidad inicial.

En el movimiento circular, que estudiaremos en el siguiente capítulo, se evidencia aún más el carácter vectorial de la aceleración pues encontraremos aceleraciones que no tienen la misma dirección que el vector velocidad, y cuyo efecto sobre éste es modificar su dirección y no su medida: la *aceleración centrípeta*.

Del mismo modo que en el caso de la velocidad, ahora podemos dar una definición precisa de aceleración:

DEFINICIÓN: *Se llama aceleración al vector que tiene la dirección y el sentido de la variación de la velocidad, y cuya medida es el cociente entre la medida de la variación de la velocidad y el tiempo en que se produjo.*

Composición de velocidades

Sumar o *componer las velocidades* de un cuerpo que está dotado simultáneamente de varios movimientos, significa hallar la *velocidad total*, o *velocidad resultante*.

En cada caso, habrá que tener en cuenta que:

1) *los movimientos son independientes entre sí;*

2) *la velocidad es una magnitud vectorial;*

3) *respecto de quién o de qué (sistema de referencia) se calcula la resultante.*

I) VELOCIDADES CON LA MISMA DIRECCIÓN Y EL MISMO SENTIDO. Un bote navega a favor de la corriente. La velocidad con que se mueve respecto de la costa (velocidad resultante que queremos hallar) tendrá las siguientes características:

Dirección: la de las componentes.

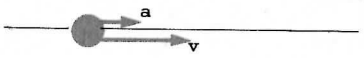
Sentido: el de las componentes.

Medida: la suma de las medidas de los componentes.

Si la velocidad propia del bote mide $v_1 = 3$ m/s, y la de la corriente $v_2 = 2$ m/s, la resultante medirá $v = 5$ m/s.

II) VELOCIDADES CON LA MISMA DIRECCIÓN Y SENTIDOS OPUESTOS. El bote navega ahora en contra de la corriente. La velocidad resultante tiene:

Dirección: la de las componentes.



Movimiento acelerado.

Movimiento retardado.

Sentido: el de la mayor de las componentes.

Medida: la diferencia de las medidas de las componentes.

El bote avanza en contra de la corriente con $v = 1$ m/s.

III) LAS VELOCIDADES TIENEN DISTINTAS DIRECCIONES. Un nadador se lanza a cruzar un río, perpendicularmente a la corriente. La velocidad propia del nadador es $v_1 = 1{,}5$ m/s, y la de la corriente $v_2 = 1$ m/s.

Como los dos movimientos se cumplen independientemente uno del otro (principio de Galileo), en cada segundo el nadador avanzará 1,5 m hacia la otra orilla, y simultáneamente será arrastrado 1 m por la corriente. Seguirá, pues, la dirección AC, y 1 segundo después de haber estado en A se hallará en C.

La velocidad del nadador tendrá, pues:

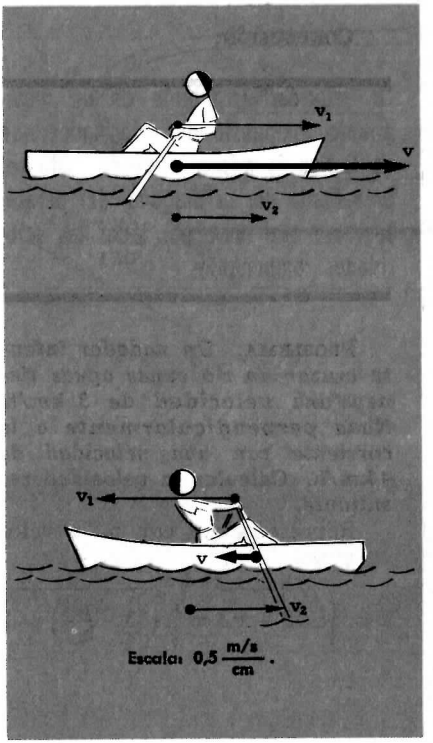
Dirección: AC.

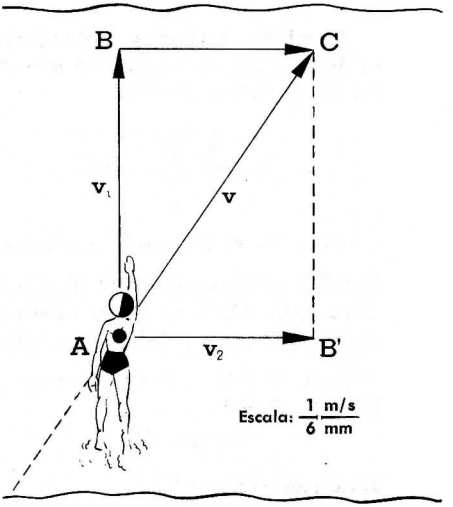
Sentido: desde A hacia C.

Medida: la medida representada por el vector AC: $v = 1{,}8$ m/s.

Pudimos haber comenzado diciendo que la corriente lo arrastra desde A hasta B', y que simultáneamente avanza perpendicularmente a ella, de modo que al cabo de 1 segundo de haber estado en A se encontrará en C, igual que antes.

Observemos que la figura ABCB' es un paralelogramo (en este caso particular, por haberse lanzado perpendicularmente, es un rectángulo) cuyos lados son las velocidades componentes, y cuya diagonal es la velocidad resultante.





CONCLUSIÓN:

La velocidad resultante de un movimiento compuesto de velocidades que no tienen la misma dirección, está representada por la diagonal del paralelogramo que tiene por lados las velocidades componentes.

PROBLEMA: *Un nadador intenta cruzar un río cuyas aguas tienen una velocidad de 3 km/h. Nada perpendicularmente a la corriente con una velocidad de 4 km/h. Calcular la velocidad resultante.*

Representamos con v_2 la velocidad de la corriente, y con v_1 la del nadador. Construimos el paralelogramo que las tiene por lados, y su diagonal (naturalmente, nos referimos a la que pasa por A) representa a la velocidad resultante; midiéndola en la escala del dibujo, resulta $v = 5$ *km/h*. (El dibujo, análogo al de pág. 121, a cargo del alumno.)

Midiendo el ángulo que forma v con la costa (o, lo que es lo mismo, con la corriente), se determina la dirección de la resultante: 53°.

Obsérvese que como en este caso el paralelogramo es un rectángulo, se puede calcular la resultante por medio del teorema de Pitágoras:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\left(3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2 + \left(4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 16}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \sqrt{25}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

También podemos determinar el ángulo sin necesidad de medirlo; de la figura resulta:

$$\frac{v_2}{v} = \frac{3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}{5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}6\,.$$

Pero en el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{AB'C}$ el cociente entre el cateto adyacente $\overline{AB'} = v_1$ sobre la hipotenusa $\overline{AC} = v$ se llama coseno del ángulo $B'\overset{\sphericalangle}{A}B$ (al que llamaremos α), o sea

$$\cos \alpha = \frac{v_2}{v}$$

Entonces $\cos \alpha \cong 0{,}6$.

¿Cuánto vale el ángulo α? Se busca en las tablas trigonométricas –donde están anotados los cosenos de todos los ángulos– y se encuentra

$$\alpha \cong 53°$$

¡3 + 4 = 5! Hemos obtenido el curioso resultado de que una velocidad de 3 km/h más otra de 4 km/h es igual a una de 5 km/h. "3 + 4 = 5 es una mala aritmética, pero muy buena geometría", dijo con gracia un conocido autor. Claro, porque no se trata de una suma de números, sino de vectores. Y la suma de vectores es la diagonal del paralelo-

gramo. En este caso, por ser el ángulo de 90°, la suma dio 5 km/h; variando el ángulo, la suma varía.

Para evitar confusiones, conviene indicar que cada sumando es un vector:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + 4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \vec{v}$$

¿Qué pasa cuando hay más de dos velocidades?

Se puede usar también la regla del paralelogramo: se componen primeramente dos cualesquiera de las velocidades dadas, obteniéndose así una *resultante parcial*. Luego se compone ésta con una de las velocidades restantes: se vuelve a obtener una nueva *resultante parcial*; y así sucesivamente, hasta terminar con todas. La última resultante es la velocidad total buscada.

PROBLEMA: *Las aguas de un río se mueven con una velocidad* $v_1 = 4$ *km/h respecto de la costa. Por ellas navega un barco a la velocidad* $v_2 = 16$ *km/h (respecto del agua), en el sentido indicado en la figura, y formando un ángulo de 150° con la dirección de la corriente. Por el barco camina un pasajero, con la velocidad* $v_3 = 3$ *km/h (respecto del barco) y formando con la dirección que lleva el barco un ángulo de 60°. Calcular la velocidad resultante del pasajero respecto de la costa.*

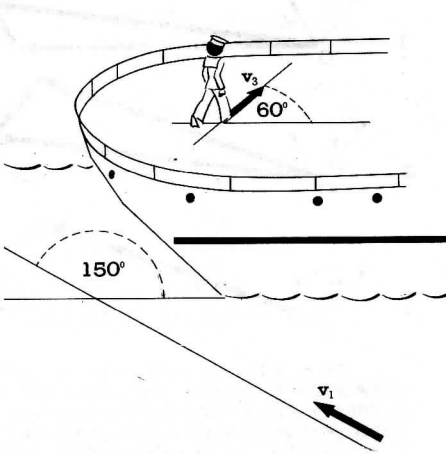
Elegimos como escala: $E = 4\,\frac{\text{km/h}}{\text{cm}}$.

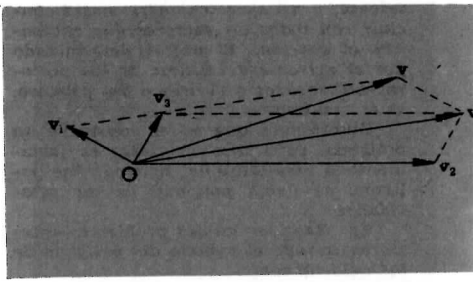
Componemos primeramente v_3 con v_2, obteniendo v'. Esta diagonal (4,5 cm) representa una velocidad de 18 km/h.

¿Qué es v'? Es la resultante de componer la velocidad del pasajero respecto del barco, con la velocidad del barco respecto del río; v' representa, pues, la velocidad del pasajero respecto del río.

Para hallar la velocidad del pasajero respecto de la costa, habrá que componer v' con v_1: obtenemos así v, cuyo vector mide 3,7 cm, lo que representa una velocidad de 14,8 km/h.

Por otra parte, el ángulo que forma v con v_1 es de 152°. De manera que podemos decir que la velocidad resultante del pasajero respecto de la costa es de 14,8 km/h y forma un ángulo de 152° con la dirección de las aguas del río.



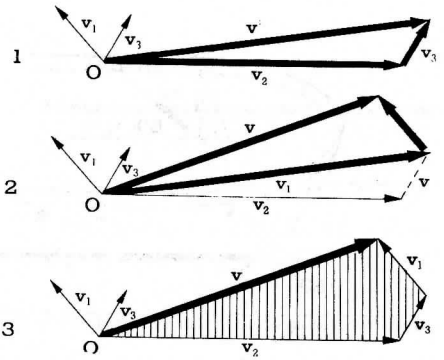


PROBLEMA: *Resolver el ejercicio anterior, pero componiendo primeramente* v_1 *con* v_2, *y luego la resultante que así se obtiene, con* v_3.

POLÍGONO DE LAS VELOCIDADES. Observemos en la construcción anterior que para determinar v' hubiera bastado trazar por el extremo de v_2, un vector paralelo e igual al v_3; el extremo de ese vector y el punto 0 determinan la resultante parcial v'.

Para hallar la resultante v' y v_1 también hubiéramos podido evitar la construcción de parte del paralelogramo, trazando solamente por el extremo de v' un vector paralelo e igual a v_1; su extremo y el punto 0 determinan la resultante total v.

Si hubiera más velocidades, por los extremos de cada resultante parcial se seguirían trazando vectores paralelos e iguales a la velocidad siguiente. En resumen:



Para hallar la resultante de varias velocidades, se elige una cualquiera de ellas, y por su extremo se traza un vector paralelo e igual a la segunda de las velocidades; por el extremo de ese vector se traza otro, paralelo e igual a la tercera, y así sucesivamente, hasta concluir con todos los vectores que componen el sistema. El vector determinado por el extremo del último de los vectores así trazados y el origen del primero, es la resultante.

Observemos que así se construye un polígono, cuyo lado de cierre es justamente la resultante del sistema. Ese polígono se llama *polígono de las velocidades.*

Ej. *Resolver los dos problemas anteriores, usando el método del polígono de las velocidades.*

Descomposición de una velocidad

Supongamos el siguiente problema: *Desde la costa se observa un bote que avanza a una velocidad de 6 km/h que forma un ángulo de 60° con la dirección de la corriente. Se sabe que el botero rema perpendicularmente a la corriente. Se desea saber:* 1) *la velocidad de la corriente;* 2) *la velocidad propia del bote.*

Sabemos que las velocidades se componen con la regla del paralelogramo. Pero ahora el problema es el inverso: hay que descomponer una velocidad en dos.

Se procede exactamente al revés: suponer que la velocidad dada es diagonal de un paralelogramo, y hallar los lados de ese paralelogramo. Como conocemos la diagonal y las direcciones de los lados, la solución es inmediata: por el extremo de v trazamos una paralela a la corriente y una perpendicular, determinando los puntos A y B. Los vectores OA y OB son las velocidades propias de la corriente y del bote, respectivamente.

La escala es $\mathrm{E} = 1\ \frac{\text{km/h}}{\text{cm}}$, de modo que:

1) como $\mathrm{OA} = 3$ cm, resulta $v_r = \mathrm{E} \cdot \mathrm{OA} = 1\ \frac{\text{km/h}}{\text{cm}} \cdot 3\ \text{cm}.$

$$v_r = 3\ \text{km/h};$$

2) como $\mathrm{OB} = 5{,}2$ cm, resulta $v_b = \mathrm{E} \cdot \mathrm{OB} = 1\ \frac{\text{km/h}}{\text{cm}} \cdot 5{,}2\ \text{cm}.$

$$v_b = 5{,}2\ \text{km/h}.$$

La "prueba" consiste, justamente, en resolver el problema inverso: suponiendo que v_r y v_b son los datos, hallar v. Se construye el paralelogramo correspondiente, y la diagonal es v.

Conclusión:

Para descomponer una velocidad en dos direcciones dadas, se trazan por el extremo del vector paralelas a las direcciones hasta

cortarlas; los puntos de intersección determinan, con el origen, las componentes.

Las direcciones dadas pueden o no ser perpendiculares entre sí; de cualquier manera, siempre se emplea el mismo procedimiento.

Si son perpendiculares, se las puede calcular analíticamente, en forma muy simple. En la figura, v representa una velocidad de 100 km/h. Se desea descomponerla en las direcciones dadas.

Como el triángulo OAC es rectángulo, se cumple que

$$\cos\ \alpha = \frac{OA}{OC} \therefore\ OA = v \cdot \cos\ \alpha$$

$$OA = v \cdot \cos\ 30° =$$

$$= 100\ km/h \cdot 0{,}866 = 86{,}6\ km/h$$

$$v_1 = 86{,}6\ km/h.$$

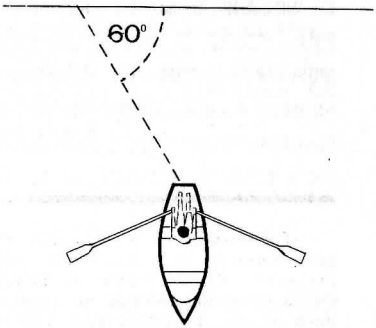
En el triángulo OBC se cumple que:

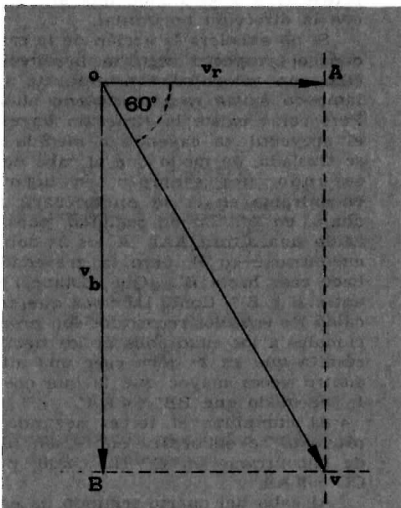
$$\cos\ \beta = \frac{OB}{OC} \therefore\ OB = v \cdot \cos\ \beta$$

$$OB = v \cdot \cos\ 60° =$$

$$= 100\ km/h \cdot 0{,}5 = 50\ km/h$$

$$v_2 = 50\ km/h$$

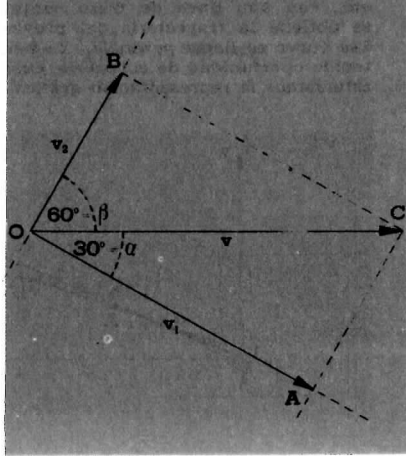




El problema del tiro

Estudiaremos ahora el famoso problema del tiro, uno de los más importantes del movimiento combinado. Advertimos que supondremos nulo el rozamiento del aire (tiro en el vacío).

¿Qué movimiento cumple el proyectil que ha sido disparado desde un cañón, por ejemplo, con una cierta velocidad inicial v_o? El proyectil va avanzando, y simultáneamente va, primero ascendiendo (hasta que llega a su altura máxima) y luego descendiendo (hasta tocar el suelo). Como no hay rozamiento con el aire, el movimiento de avance es uniforme, mientras que los de ascensión y caída son movimientos uniformemente retardado y acelerado, respectivamente. En consecuencia:



El movimiento de un proyectil en el vacío resulta de la composición de un movimiento horizontal, rectilíneo y uniforme, y un movimiento vertical, uniformemente variado (retardado en la primera parte y acelerado en la última).

a) FORMA DE LA TRAYECTORIA. Veamos primeramente qué trayectoria sigue el proyectil. En la figura indicamos con Ox la dirección horizontal, y con Oy la vertical; v_0, la velocidad inicial del proyectil, y α el ángulo que ella forma con la dirección horizontal.

Si no existiera la acción de la gravedad, el proyectil seguiría la dirección OM, con velocidad constante v_0, pues tampoco existe rozamiento con el aire. Pero como existe la atracción terrestre, el proyectil va cayendo a medida que se traslada, de modo que al cabo de un segundo, por ejemplo, en lugar de encontrarse en A se encontrará más abajo, en A'. En un segundo, pues, ha caído una altura AA'. A los 2^s debiera encontrarse en B, pero la gravedad lo hace caer hasta B'. ¿Qué distancia hay entre B y B'? Como sabemos que en la caída los espacios recorridos son proporcionales a los cuadrados de los tiempos, resulta que en 2^s debe caer una altura cuatro veces mayor que la que cae en 1^s, de modo que $BB' = 4\,AA'$.

Al cumplirse el tercer segundo, el proyectil se encuentra en C', en lugar de encontrarse en C. Ha caído, pues, $CC' = 9\,AA'$.

Al cabo del cuarto segundo, la caída será $DD' = 16\,AA'$, y así sucesivamente.

Si unimos los puntos A', B', C', D', etc., con una línea de trazo continuo, se obtiene la trayectoria del proyectil. Esa curva se llama *parábola*. Ya hemos tenido oportunidad de conocerla, cuando estudiamos la representación gráfica del espacio en el movimiento uniformemente variado[1]. Pero en ese caso no era más que una representación gráfica, la que no debe confundirse con la forma de la trayectoria, que era rectilínea. En nuestro caso, en cambio, la parábola *es* la trayectoria que efectivamente sigue el proyectil.

b) VELOCIDAD DEL MOVIMIENTO HORIZONTAL. Como el movimiento del proyectil es compuesto, su velocidad en cada instante es la resultante de la velocidad horizontal y la velocidad vertical. Para calcular cualquiera de éstas debe descomponerse la resultante en las dos direcciones: Ox y Oy.

Para la velocidad horizontal tendremos, entonces:

$$v' = v_0 \cdot \cos \alpha$$

(Ox y Oy son perpendiculares).

Hemos calculado v' en el momento de salir el proyectil, y la velocidad del proyectil va variando en cada instante. Pero como el movimiento de avance es uniforme e independiente de la caída, la velocidad de avance horizontal es constante:

Velocidad de avance: $v' = v_0 \cdot \cos \alpha$

c) VELOCIDAD VERTICAL. En el instante inicial vale v_0'' (velocidad vertical inicial) está relacionada con v_0 por una relación sencilla; en el triángulo rectángulo el cociente entre el cateto opuesto v_0'' y la hipotenusa v_0 se llama *seno* del ángulo α. O sea:

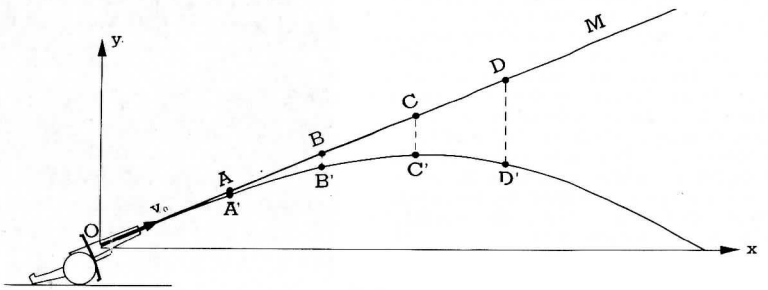
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_0''}{v_0} \therefore v_0'' = v_0 \operatorname{sen} \alpha ;$$

pero ese valor no es más que el inicial, y va disminuyendo a medida que transcurre el tiempo, pues el movimiento de ascensión es uniformemente retardado. Al cabo de un tiempo t, la velocidad vertical habrá disminuido en $g \cdot t$. En resumen:

Velocidad de ascenso:

$$v'' = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g \cdot t$$

[1] Ver pág. 100.



Debe tenerse presente que esta velocidad *es variable*. Así, por ejemplo, en el punto P, que es el de altura máxima, $v'' = 0$, como lo indica la figura. En ese punto, el proyectil tiene únicamente velocidad horizontal. Pero inmediatamente empieza a caer, de modo que v'' cambia de sentido: antes estaba dirigida hacia arriba, y a partir de P, hacia abajo.

d) VELOCIDAD DEL PROYECTIL. La figura muestra la descomposición de la velocidad del proyectil en v' y v''. Y nos recuerda algo muy importante: que la velocidad del proyectil es siempre tangente a la trayectoria. *Siempre*, cualquiera sea el movimiento, cualquiera sea la trayectoria, *la velocidad es tangente a la trayectoria en el punto en que se encuentra el móvil.*

PROBLEMA: *Un cañón lanza un proyectil con una velocidad de 100 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular hasta qué altura asciende (altura máxima).*

En todo problema de tiro, lo primero que debe hacerse es calcular v'_0 y la velocidad vertical inicial, que llamaremos v''_0:

$$v'_0 = v_0 \cos \alpha = v_0 \cos 60° =$$

$$= 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1}{2} \cdot$$

$$v'_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

$$v''_0 = v_0 \operatorname{sen} \alpha = v_0 \operatorname{sen} 60° =$$

$$= 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$v''_0 \cong 86{,}7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Sabemos que los movimientos horizontal y vertical se cumplen en forma absolutamente independiente (principio de Galileo). De modo que para calcular la altura que alcanza, bastará aplicar las fórmulas del movimiento de los cuerpos lanzados hacia arriba.

Se tiene, entonces:

$$h = v''_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 .$$

Con esta única fórmula no podemos calcular la altura máxima (a la que llamaremos H), por cuanto no conocemos t.

Pero sabemos que cuando el cuerpo llega a la altura máxima, la velocidad vertical es nula:

$$v'' = v''_0 - g\,t = 0$$

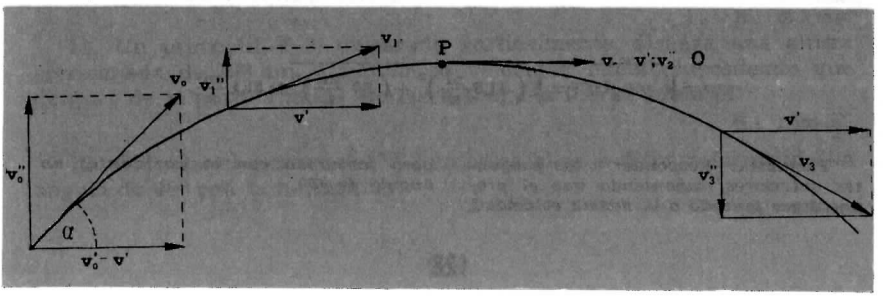
$$\therefore\ t = \frac{v''_0}{g} \ \therefore\ \boxed{t = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g}}$$

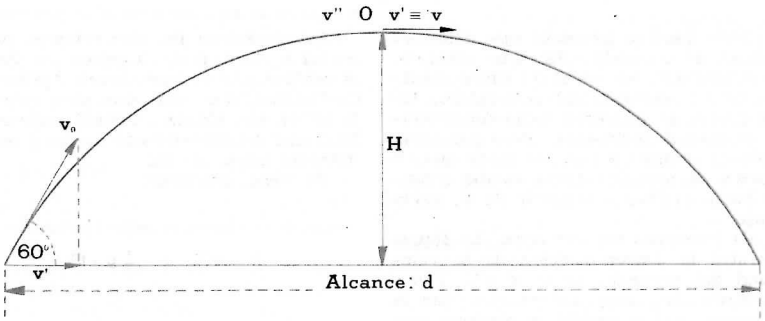
$$t = \frac{86{,}7 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cong 8{,}85^{\text{s}} .$$

Reemplazamos este valor en la fórmula de H, y obtenemos:

$$H = v''_0 \times \frac{v''_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v''_0}{g} \right)^2 = \frac{v''^2_0}{g} - \frac{1}{2} \frac{v''^2_0}{g} = \frac{1}{2} \frac{v''^2_0}{g}$$

$$\therefore\ \boxed{H = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g}} = \frac{1}{2} \frac{\left(86{,}7 \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{9{,}8 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cong \frac{1}{2} \frac{7\,516}{9{,}8} \text{m} \cong 384{,}6 \text{ m} .$$





que es la altura máxima que alcanza al proyectil.

PROBLEMA: *En el problema anterior, calcular hasta dónde llega (horizontalmente) la bala.*

Llamamos *alcance* a la distancia horizontal recorrida por el proyectil desde que sale del cañón hasta que toca el suelo. Como el movimiento horizontal es uniforme, si llamamos d al alcance, será:

$$d = v_0 \cdot t$$

Para poder calcular d es necesario conocer t, tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Pero la parábola es una figura simétrica, de modo que si el proyectil tarda $\frac{v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g}$ en alcanzar su altura máxima, tardará otro tanto en volver al suelo. De modo que:

$$d = v'_0 \cdot 2\,t = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2\,v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{2\,v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{g} =$$

$$= \frac{2 \times 10\,000\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \sqrt{3/2} \cdot 1/2}{9{,}8\ \text{m/s}^2} \cong 883\ \text{m}.$$

PROBLEMA: *¿Cuál es su velocidad vertical a los 10 segundos?*

Sabemos que

$$v'' = v''_0 - g \cdot t.$$

$$v'' = 86{,}7\ \text{m/s} - 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{\text{s}}.$$

$$v'' = 86{,}7\ \text{m/s} - 98\ \text{m/s}.$$

$$v'' = -11{,}3\ \text{m/s}.$$

¿Qué significa el signo menos? Pues, que v'' está ahora dirigida hacia abajo: el proyectil cae. Obsérvese que a los $8{,}85^{\text{s}}$ ha alcanzado su altura máxima, y ya sabemos que a partir de ella la velocidad vertical estará dirigida hacia abajo.

Si calculamos v'' a los 5 segundos, por ejemplo, será positiva. En efecto: vale $+\,37{,}7$ m/s.

PROBLEMA: *¿Cuál es su velocidad horizontal en ese instante?*

La velocidad horizontal, a los 10 segundos, es la misma que en el instante inicial, pues el movimiento horizontal es uniforme, de modo que siempre vale $v'_0 = 50$ m/s.

PROBLEMA: *Calcular la velocidad total a los 10 segundos.*

Hay que hallar la resultante de v' y v'' a los 10^{s}. Como en este caso el paralelogramo es un rectángulo:

$$v = \sqrt{v'^2 + v''^2} = \sqrt{\left(11{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(50\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \cong 51{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

PROBLEMA: *Responder a las preguntas anteriores, suponiendo que el proyectil sea lanzado a la misma velocidad, pero formando con la horizontal un ángulo de 45°.*

Problemas

1. Un automóvil que marcha a 60 km/h pasa a otro que marcha en el mismo sentido y a una velocidad de 40 km/h. Hallar la velocidad del primero con respecto al segundo, y del segundo con respecto al primero.

R.: 20 km/h; — 20 km/h

2. Hallar las velocidades relativas de uno con respecto al otro, de los dos automóviles del problema anterior, suponiendo que ahora marchan en sentidos opuestos. (Se toma como positivo el sentido del primero.)

R.: 100 km/h; — 100 km/h

3. Un avión sale desde la base A hacia la base B, separadas por una distancia de 500 km. Sus motores lo impulsan a una velocidad de 200 km/h, pero sopla viento desde A hacia B a una velocidad de 100 km/h. Calcular cuánto tardará en realizar el viaje de ida y vuelta.

R.: 6 h 40^m

4. Resolver el problema anterior, suponiendo que el viento forma con la semirrecta AB un ángulo de 60°.

R.: 4 h 45^m

5. Una lancha cruza un río perpendicularmente a la corriente. La velocidad de ésta es de 5 m/s, mientras que la de la lancha es de 10 m/s. Calcular la velocidad de ésta respecto de la costa, y cuánto tarda en cruzar el río, que tiene un ancho de 200 m.

R.: 11,2 $\frac{m}{s}$ 20 segundos

6. Calcular cuánto tarda la lancha anterior en cruzar el río cuando no hay corriente.

R.: 20 segundos

7. ¿Cómo explicar los resultados iguales de los dos problemas anteriores?

8. Un cañón dispara su proyectil con una velocidad inicial de 100 m/s, y a una inclinación de 30° con respecto al horizonte. Calcular a qué distancia llega.

R.: unos 883 m

9. Calcular la altura máxima alcanzada por el proyectil anterior.

R.: 130 m

10. Calcular la velocidad del proyectil a los 5 segundos del disparo.

R.: 86,5 m/s

11. Un proyectil V-2, disparado verticalmente, alcanza una altura aproximada de 100 km. Calcular su velocidad inicial, suponiendo que después de la partida no se ejerciera ninguna fuerza sobre él.

R.: 1 400 $\frac{m}{s}$

12. Calcular el alcance del V-2 anterior, si se lo dispara formando un ángulo de 45° con la horizontal.

R.: 200 km

12 MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular uniforme (M.C.U.)

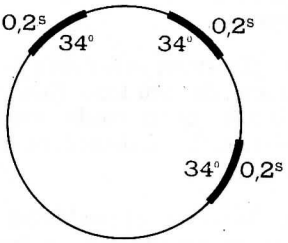
Si en un extremo de un hilo atamos una piedra y la revoleamos, la piedra se mueve con movimiento circular, porque se mueve sobre una circunferencia.

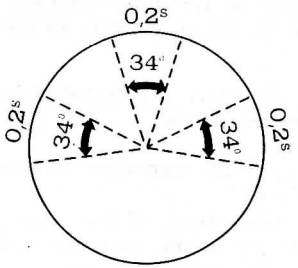
Recordemos que un movimiento rectilíneo es uniforme cuando el móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales. Lo mismo diremos para el movimiento circular, pero cambiando la palabra *distancia* por *arcos*. Es decir:

Un movimiento circular es uniforme cuando el móvil recorre arcos iguales en tiempos iguales.

Como en una misma circunferencia a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales, también podemos decir:

Un movimiento circular es uniforme cuando el móvil describe ángulos iguales en tiempos iguales.





Período

Se llama *período* del movimiento circular uniforme al *tiempo* que emplea el móvil en dar *una vuelta entera*. Generalmente se lo designa con la letra T, y se lo mide en segundos.

Como en el movimiento circular uniforme, todas las vueltas son recorridas en tiempos iguales:

En el movimiento circular uniforme, el período es constante.

EJ.: *Un móvil se mueve con M. C. U., dando 120 vueltas por minuto. Calcular su período* T.

120 vueltas ..... 1^m

1 vuelta ..... $\frac{1^m}{120} = \frac{60^s}{120} = 0{,}5^s$

$T = 0{,}5^s$

Dos velocidades

Tomemos un hilo de 1 m de largo, y atémosle una piedra en el extremo y otra a 80 cm; hagámoslas girar a razón de 3 vueltas por segundo. ¿Cuál de las dos piedras tiene mayor velocidad?

Alguien podría decir que la del extremo, pues en el mismo tiempo describe una circunferencia mayor. Tiene razón.

Otro puede objetar que, sin embargo, por más vueltas que den, la del extremo no le saca ninguna ventaja a la otra. Como siempre van juntas, tienen la misma velocidad. También tiene razón.

Éste es un ejemplo de discusión que no conduce a nada, por la sencilla razón de que las partes no se han ocupado de aclarar el significado de las palabras que usan. Porque, ¿a qué llaman uno y otro "velocidad de la piedra"? El primero se refiere a la velocidad lineal:

VELOCIDAD LINEAL. *Es el cociente entre la* DISTANCIA *(arco) recorrida y el tiempo empleado.*

Es la velocidad de que hemos hablado hasta ahora:

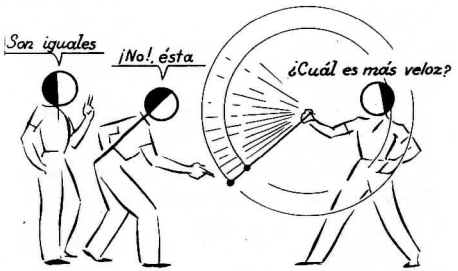
$$v = \frac{d}{t}.$$

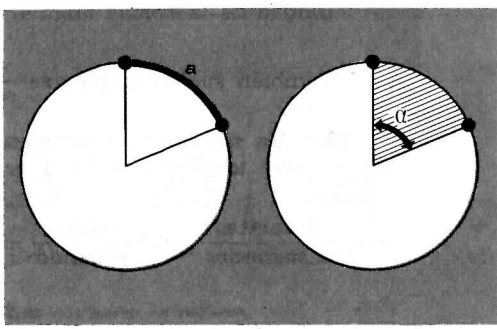
El segundo, en cambio, habla de la velocidad angular.

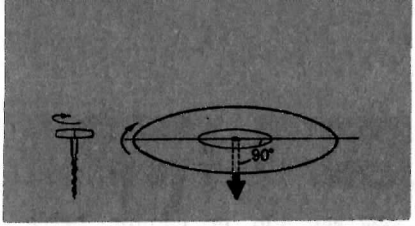
VELOCIDAD ANGULAR. *Es el cociente entre el* ÁNGULO *descripto y el tiempo empleado en describirlo.* Se la representa con la letra griega ω (omega).

$$\omega = \frac{\alpha}{t}.$$

Ahora está claro que ambos tenían razón, porque tal como decía el primero, la piedra del extremo tiene mayor velocidad lineal:







$$v_1 = \frac{d_1}{t} = \frac{3 \times 2\,\pi\,r_1}{1^s} = 18{,}85\,\frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{d_2}{t} = \frac{3 \times 2\,\pi\,r_2}{1^s} = 15{,}08\,\frac{m}{s}$$

La velocidad angular, en cambio, es la misma para las dos:

$$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{t} = \frac{3 \times 360^o}{1^s} = 1\,080\,\frac{\text{grados}}{\text{seg}}$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha_2}{t} = \frac{3 \times 360^o}{1^s} = 1\,080\,\frac{\text{grados}}{\text{seg}}$$

En el movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante. Por eso el movimiento se llama *uniforme.*

Representación gráfica de la velocidad angular. La velocidad angular de un movimiento circular es, como la velocidad rectilínea, una magnitud vectorial. Se la representa gráficamente por medio de un vector, cuyas características son las siguientes:

1) *Dirección:* perpendicular al plano al que pertenece la circunferencia que describe el móvil (es paralelo al eje de rotación).

2) *Sentido:* se obtiene mediante una convención. Es el mismo sentido en que avanza un *tirabuzón,* colocado perpendicularmente al plano en que se efectúa el movimiento, cuando se lo hace girar en el mismo sentido que tiene el móvil.

3) *Medida:* se la representa por medio de una escala adecuada.

Unidad para medir velocidades angulares. Como la velocidad angular es el cociente entre el ángulo descripto y el tiempo empleado, la unidad para medirla es el cociente entre la unidad de ángulo y la unidad de tiempo.

$$\text{unidad de velocidad angular} = \frac{\text{unidad de ángulo}}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{\text{grado}}{\text{segundo}}.$$

También suelen emplearse $\frac{\text{vueltas}}{\text{segundo}}$; $\frac{\text{vueltas}}{\text{minuto}} = \frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}}$.

Ej.: *Un móvil con movimiento circular uniforme tarda 5 segundos en dar 2 vueltas. Calcular su velocidad angular.*

$$\omega = \frac{2 \text{ vueltas}}{5 \text{ segundos}} = 0{,}4\,\frac{\text{vueltas}}{\text{segundo}} = 24\,\frac{\text{revol.}}{\text{min.}} =$$

$$= 24\,\frac{360^o}{\text{min.}} = 8\,640\,\frac{\text{grados}}{\text{min.}} = 144\,\frac{\text{grados}}{\text{seg}}.$$

EJ.: *Un motor efectúa 2 000 revoluciones por minuto. Calcular su velocidad angular en grados/segundo.*

Como una revolución o vuelta tiene 360°,

$$\omega = 2\,000\,\frac{360^\circ}{60^s} = 2\,000\,\frac{\text{grados}}{\text{seg.}} = 12\,000\,\frac{\text{revol.}}{\text{min.}}.$$

Como se ve, en estos casos de velocidades angulares grandes, conviene usar la unidad revoluciones/minuto, pues es más cómoda.

Una nueva unidad para medir ángulos. En física, para medir ángulos se usa mucho una unidad que aún no hemos mencionado: el *radián.*

En la circunferencia de la figura se ha trazado un triángulo *equilátero mixtilíneo.* El ángulo central mide 1 radián. Es decir que:

Definición de radián: Es el ángulo central al que corresponde un arco de longitud igual al radio.

Cómo se obtiene la medida en radianes. Se hace el cociente entre la longitud d del arco y la longitud r del radio:

$$\alpha = \frac{d}{r}.$$

En el caso del triángulo equilátero mixtilíneo resulta:

$$\alpha = \frac{r}{r} = 1.$$

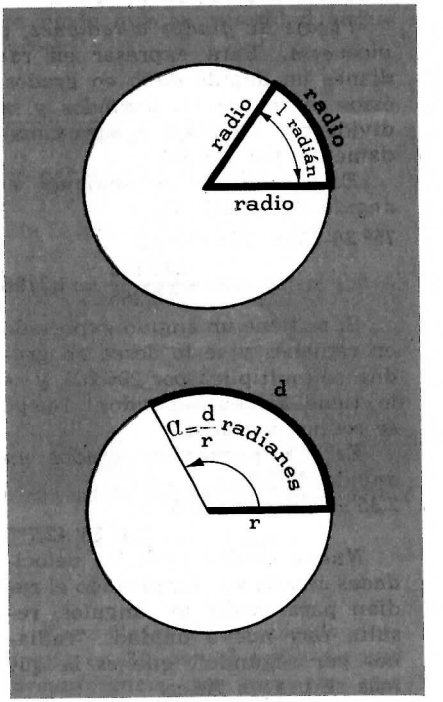
Equivalencia entre radianes y grados sexagesimales. Un ángulo llano mide 180°. En radianes, en cambio, su medida es:

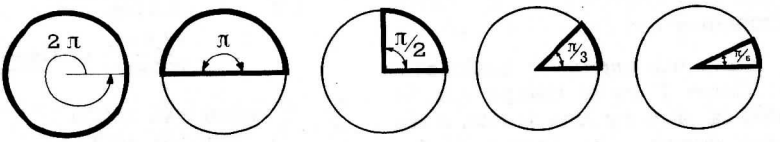
$$\frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud del radio}} = \frac{\pi r}{r} = \pi.$$

De modo que:

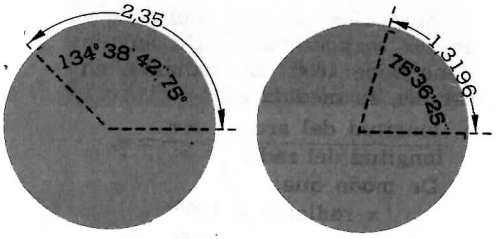
$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi}$$





Las medidas de estos ángulos están expresadas en radianes.



1 radián $= 57°17'44'',8 \fallingdotseq 206\,264,8''$

Pasaje de grados a radianes, y viceversa. Para expresar en radianes un ángulo dado en grados, éstos se reducen a segundos y se divide por 206 264,8, o, aproximadamente, por 206 265.

EJ.: *Expresar en radianes el ángulo de 75° 36' 25".*

$75°\,36'\,25'' = 272\,185'' =$

$$= \frac{272\,185}{206\,265} = 1{,}3196$$

Si se tiene un ángulo expresado en radianes y se lo desea en grados, se multiplica por 206 265, y se lo tiene así en segundos. Luego se reduce a grados.

EJ.: *Expresar en grados un ángulo de 2.35.*

$2{,}35 = 2{,}35 \times 206\,265'' =$

$= 134°\,38'\,42{,}7''.$

Nueva unidad para las velocidades angulares. Empleando el radián para medir los ángulos, resulta una nueva unidad: "radianes por segundo", que es la que más se usa en física.

Como el radián no tiene símbolo, la velocidad angular tiene por símbolo $\frac{1}{s}$.

VELOCIDAD ANGULAR Y PERÍODO

Como T es el tiempo que se emplea para dar una vuelta, o sea para describir un ángulo de $2\,\pi$, resulta que:

$$\omega = \frac{\text{ángulo descripto}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{2\,\pi}{T},$$

o sea: $\boxed{\omega = \frac{2\,\pi}{T}}$

NOTA IMPORTANTE: Esta fórmula sólo es válida cuando el ángulo se mide en radianes.

EJ.: *El período de un M. C. U. es $T = 0{,}5^s$. Calcular la velocidad angular.*

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{0{,}5^s} = 4\,\pi\,\frac{1}{s} \cong 12{,}56\,\frac{1}{s}.$$

EJ.: *Un motor da 3 000 revoluciones por minuto. Calcular su período y su velocidad angular.*

$$\omega = 3\,000\,\frac{\text{rev.}}{\text{min.}} = 3\,000\,\frac{2\,\pi}{60^s} =$$

$$= 100\,\pi\,\frac{1}{s} \cong 314\,\frac{1}{s}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{100\,\pi\,\frac{1}{s}} = 0{,}02^s$$

VELOCIDAD TANGENCIAL Y PERÍODO

Como: $v =$

$$= \frac{\text{arco recorrido}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{2\,\pi\,R}{T},$$

o sea: $\boxed{v = \frac{2\,\pi\,R}{T}}$

EJ.: *Calcular la velocidad tangencial de un móvil que describe una circunferencia de 10 cm de radio en 0,2 segundos.*

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T} = \frac{2\,\pi \times 10\text{ cm}}{0{,}2\text{ seg.}} =$$

$$= \frac{62{,}8\text{ cm}}{0{,}2\text{ seg.}} = 314\,\frac{\text{cm}}{\text{seg.}}$$

VELOCIDAD LINEAL Y VELOCIDAD ANGULAR

Sabemos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ y } \quad v = \frac{2\pi R}{T}.$$

De donde resulta:

$$\boxed{v = \omega R} \text{ y } \boxed{\omega = \frac{v}{R}}$$

Ej.: *Calcular la velocidad tangencial de un punto que describe una circunferencia de 0,5 m de radio con una velocidad angular*

$$\omega = 31{,}4 \frac{1}{\text{seg.}}.$$

$$v = \omega R = 31{,}4 \frac{1}{\text{seg.}} \times$$

$$\times 0{,}5 \text{ m} = 15{,}7 \frac{\text{m}}{\text{seg.}}.$$

Ej.: *Calcular la velocidad tangencial de un punto del ecuador de la Tierra.* (Radio de la Tierra $\cong$ 6 000 km.)

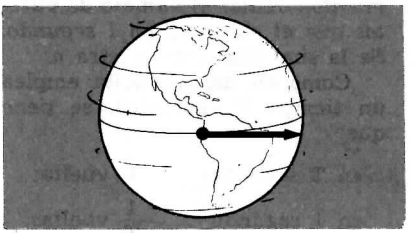
La Tierra da 1 vuelta en 1 día, de modo que su velocidad angular es:

$$\omega = 1 \frac{\text{vuelta}}{\text{día}} = 1 \frac{2\pi}{86\,400^{s}} = \frac{2\pi}{86\,400} \frac{1}{\text{seg}}$$

La velocidad tangencial de un punto del ecuador es, pues:

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{86\,400} \frac{1}{\text{seg}} \times 6\,000 \text{ km} \cong 0{,}43 \frac{\text{km}}{\text{seg}} \cong 1\,569 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Ej.: *La velocidad tangencial de un punto que describe una circunferencia de 2 m de radio es de 10 m/s. Calcular la velocidad angular y el período.*



$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 5 \frac{1}{\text{seg}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5 \frac{1}{\text{seg}}} = 0{,}4\,\pi \text{ seg.} \cong 1{,}2 \text{ seg.}$$

ÁNGULO DESCRIPTO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

De la definición de velocidad angular:

$$\omega = \frac{\alpha}{t},$$

resulta: $\alpha = \omega t$.

Obsérvese el estrecho paralelismo con la correspondiente fórmula del movimiento rectilíneo uniforme.

Ej.: *Calcular el ángulo descripto en 2^{m} por el radio de una circunferencia que gira con una velocidad angular* $\omega = 3 \frac{1}{s}$ *(3 radianes por segundo). Calcular cuántas vueltas enteras ha dado.*

$$\alpha = \omega t = 3 \frac{1}{s} \times 2^{m} =$$

$$= 3 \frac{1}{s} \times 120^{s} = 360.$$

$\alpha = 360$ (describió un ángulo de 360 radianes).

Como 1 vuelta $= 2\pi$ radianes, el número N de vueltas que dio es:

$$N = \frac{360}{2\pi} \cong 57 \text{ vueltas enteras.}$$

PROBLEMA: *Una bicicleta corre a 60 km/h. El radio de la rueda es de 30 cm. Calcular la velocidad angular.*

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{60 \text{ km/h}}{30 \text{ cm}} = \frac{60 \dfrac{100\,000 \text{ cm}}{3\,600 \text{ s}}}{30 \text{ cm}} = 55{,}5 \frac{1}{\text{s}}$$

Frecuencia

Se llama frecuencia del movimiento circular el número de vueltas que el móvil da en 1 segundo. Se la simboliza con la letra *n*.

Como en dar 1 vuelta emplea un tiempo *T* (período), se tiene que:

en T segundos .. 1 vuelta;

en 1 segundo ... $\frac{1}{T}$ vueltas.

$$\boxed{n = \frac{1}{T}}$$

EJ.: *La hélice de un avión da 1 200 revoluciones por minuto. Calcular su período* T, *su velocidad angular* ω *y su frecuencia* n.

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{1\,200 \text{ rev}}{1^m} = \frac{1\,200 \times 2\pi}{60^s} = 40\,\pi \frac{1}{\text{s}} \cong 125{,}6 \frac{1}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\,\pi \dfrac{1}{\text{s}}} = 0{,}05^s$$

$$n = \frac{T}{1} = \frac{1}{0{,}05^s} = 20 \frac{\text{vueltas}}{\text{seg}}$$

La aceleración centrípeta

La velocidad $\vec{v}$ de un móvil con M. C. U. es un vector que está variando permanentemente, pues si bien su medida es constante, no lo es su dirección.

El cambio de velocidad entre $\vec{v}_3$ y $\vec{v}$ por ejemplo, es $\Delta \vec{v}_3$ porque $\vec{v} + \Delta \vec{v}_3 = \vec{v}_3$; entre $\vec{v}_2$ y $\vec{v}$ es $\Delta \vec{v}_2$ porque $\vec{v} + \Delta \vec{v}_2 = \vec{v}_2$; y entre $\vec{v}$ y $\vec{v}_1$ es $\Delta \vec{v}_1$.

Esto se ve claramente si en cada caso dibujamos los vectores con un mismo punto de origen, como muestran las figuras.

Pero si se produce una variación $\Delta \vec{v}$ de la velocidad en un tiempo *t*, entonces (ver pág. 94) existe una aceleración

$$a = \frac{\Delta \vec{v}}{t}$$

¿Cuál es la dirección de $\vec{a}$ y cuál es su sentido? La misma fórmula nos lo está diciendo: la dirección y el sentido de $\vec{a}$ son los de $\Delta \vec{v}$ cuando *t* es muy pequeño[1].

Las figuras muestran que a distintos *t* corresponden $\Delta \vec{v}$ con direcciones diferentes; pero se advierte que cuanto menor es el *t*, tanto más se acerca la dirección del $\Delta \vec{v}$ a la del radio *R*. Admitiremos, entonces, que la dirección de $\vec{a}$ es, precisamente, la del radio *R*, y su

sentido es hacia el centro de la circunferencia. Por eso la llamaremos *aceleración centrípeta*. Su medida es (aceptémoslo sin demostrarlo):

$$a_{cp} = \omega^2 R$$

o también, como $v = \omega R$:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Si se observa que a_{cp} es perpendicular a v, entonces se comprenderá que esta aceleración no modifique el valor de la velocidad y sí su dirección.

EJEMPLO: *Calcular la aceleración de un automóvil que recorre una pista circular de 80 m de radio, con movimiento circular uniforme, a 72 km/h de velocidad lineal.*

Para aplicar la fórmula $a = \omega^2 R$, previamente debemos calcular la velocidad angular ω:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{72 \text{ km/h}}{80 \text{ m}}.$$

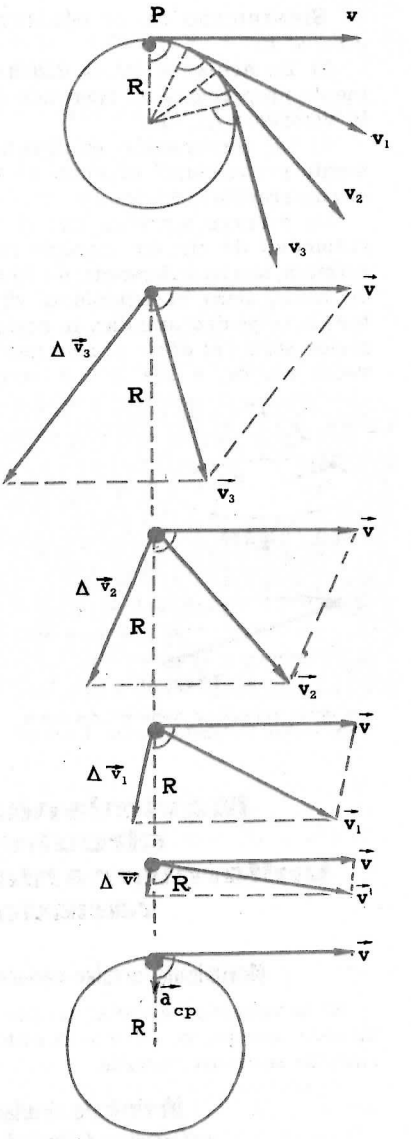
Conviene homogeneizar las unidades:

$$\omega = \frac{20 \text{ m/s}}{80 \text{ m}} = \frac{1}{4}\ \frac{1}{\text{s}} = 0{,}25\ \frac{1}{\text{seg}}.$$

Luego:

$$a = \omega^2 R = \left(0{,}25\ \frac{1}{\text{seg}}\right)^2 \times 80 \text{ m} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



[1] Es necesario considerar tiempos lo más pequeños que sean posible, por razones análogas a las que nos permitieron definir velocidad instantánea (véase pág. 101); la aceleración centrípeta es una aceleración instantánea.

SIGNIFICADO DE LA FÓRMULA $a_{cp} = \omega^2 R$:

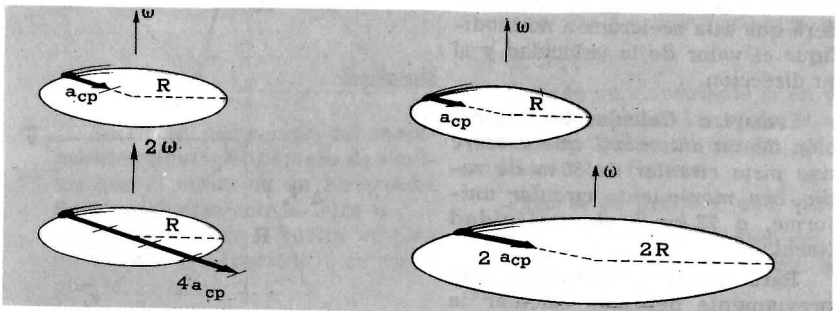
1) La aceleración es directamente proporcional *al cuadrado* de la velocidad angular.

2) La aceleración es directamente proporcional *al radio* de la circunferencia descripta.

Lo primero significa que si el automóvil de nuestro ejemplo recorriera la circunferencia de 80 m de radio, pero haciéndolo al *doble* de velocidad angular, la aceleración sería *"el doble al cuadrado"* veces mayor, o sea $2^2 = 4$ veces mayor. Si fuera el triple de velocidad angular, $3^2 = 9$ veces mayor aceleración.

Lo segundo significa que si el automóvil de nuestro ejemplo se moviera con una velocidad angular de $0{,}25 \frac{1}{\text{seg}}$, pero sobre una pista de 160 m de radio (el *doble* del anterior), la aceleración sería también el *doble*. Si el *radio* de la pista fuera el *triple*, *triple* también sería la *aceleración*.

Háganse los cálculos y compruébese.



A doble velocidad angular, cuádruple aceleración centrípeta (radios iguales).

A doble radio, doble aceleración centrípeta (con la misma velocidad angular).

Movimiento circular uniformemente variado

Movimiento circular variado

Si la velocidad angular no permanece constante, el movimiento circular se llama *variado*.

Movimiento circular uniformemente variado

Se llama movimiento circular uniformemente variado aquél cuya velocidad angular experimenta variaciones iguales en tiempos iguales.

Obsérvese la semejanza con la definición de movimiento rectilíneo uniformemente variado.

ACELERACIÓN ANGULAR. *Es el cociente entre la variación de velocidad angular y el tiempo en que se produce.*

En símbolos:

$$\gamma = \frac{\Delta \omega}{t}$$

De acuerdo con la definición de M. C. U. V., resulta que:

La aceleración angular de un M. C. U. V. es constante.

EJEMPLO: *Un punto tiene un M. C. U. V.; al cabo de 5ˢ de iniciar su movimiento, alcanza una velocidad angular* $\omega = 15\,\frac{1}{s}$. *Calcular su aceleración angular.*

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{15\,\frac{1}{s}}{5^s} = 3\,\frac{1}{s^2}$$

La velocidad angular aumenta 3 radianes por segundo, en cada segundo.

Significado físico de la aceleración angular

Análogamente a la rectilínea, la aceleración angular representa lo que varía la velocidad angular en cada segundo (o en cada unidad de tiempo), y es también una magnitud vectorial.

EJ.: *Calcular qué velocidad angular alcanza un móvil que tiene M. C. U. V., al cabo de 8ˢ de iniciado su movimiento, sabiendo que la aceleración angular es* $\gamma = 5\,\frac{1}{s^2}$.

De la definición de aceleración: $\gamma = \frac{\Delta\omega}{t}$ resulta: $\Delta\omega = \gamma\, t$.

La variación de velocidad es:

$$\Delta\omega = 5\,\frac{1}{s^2} \times 8^s = 40\,\frac{1}{s}.$$

Como partió del reposo:

$$\Delta\omega = \omega = 40\,\frac{1}{s}.$$

EJ.: *Calcular cuánto tiempo tarda un disco de gramófono en alcanzar su velocidad de régimen* $\omega = 2\,\pi\,\frac{1}{s}$, *si el movimiento inicial es circular uniformemente variado, de aceleración angular* $\gamma = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{s^2}$.

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{t} \therefore\ t = \frac{\Delta\omega}{\gamma} = \frac{2\,\pi\,1/s}{\frac{\pi}{2}\,1/s^2} = 4^s.$$

Si hay velocidad inicial. Llamemos ω_o a la velocidad angular inicial. En ese caso $\Delta\omega = \omega - \omega_o$, y como $\Delta\omega = \gamma\, t$, resulta:

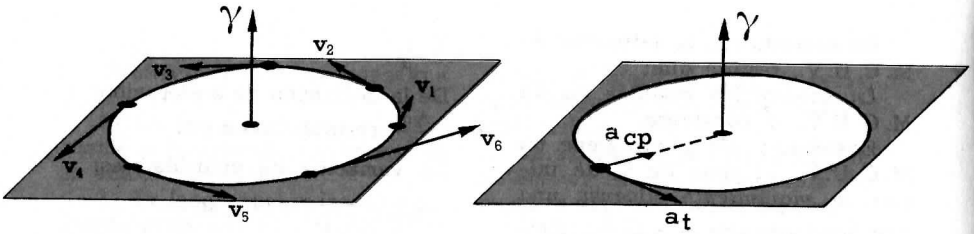
$$\omega = \omega_o + \gamma\, t.$$

EJ.: *En un instante determinado, un motor que tiene un M.C.U.V. se mueve con* $\omega_o = 100$ 1/s, *y* 5^s *después, su velocidad angular es* $\omega = 150$ 1/s. *Calcular la aceleración angular.*

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{150\ 1/s - 100\ 1/s}{5^s} = \frac{50\ 1/s}{5^s} = 10\,\frac{1}{s^2}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ACELERACIÓN ANGULAR. La aceleración angular de un M. C. U. V. se representa con un vector paralelo al vector ω; del mismo sentido, si el movimiento es acelerado, o del contrario, si es retardado.

LA ACELERACIÓN LINEAL O TANGENCIAL. En el M. C. U. V. la velocidad lineal varía no sólo en su dirección, sino también en su medida. Existe, pues, también una



Representación gráfica de la aceleración angular. Las tres aceleraciones de un M.C.U.V.

aceleración tangencial o lineal. Llamémosla a_t.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como} \quad a_t = \dfrac{\Delta v}{t} \\ \text{y} \quad \Delta v = \Delta\omega \cdot r\end{array}\right\} \; a_t = \frac{\Delta\omega \cdot r}{t} = \frac{\Delta\omega}{t} \cdot r = \gamma\, r$$

Luego:

$$\boxed{a_t = \gamma\, r}$$

EJ.: *Una rueda de bicicleta tiene un radio de 25 cm. En 5", el ciclista alcanza una velocidad de* $10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Calcular la aceleración angular de la rueda.*

$$a_t = \gamma\, r \;\therefore\; \gamma = \frac{a_t}{r} = \frac{\Delta v/t}{r} = \frac{\Delta v}{r\,t} = \frac{10\ \text{m/s}}{25\ \text{cm} \times 5^s} = \frac{1\,000}{25 \times 5}\ \frac{1}{\text{s}^2} = 8\ \frac{1}{\text{s}^2}\,.$$

Problemas

1. Un móvil describe una circunferencia con M. C. U. V.; en determinado instante, su velocidad lineal es de 3 m/s, y 10" después, es de 18 m/s. ¿Cuál es la aceleración angular, si el radio de la circunferencia es de 2 m?

R.: $0{,}75\ \frac{1}{\text{s}^2}$

2. Calcular qué distancia y qué ángulo recorrió en ese lapso el móvil del problema anterior.

R.: 105 m; 52,5 radianes

3. Calcular las aceleraciones centrípetas del móvil de los problemas anteriores en los instantes inicial y final.

R.: acp.i. $= 4{,}5\ \frac{m}{s^2}$; acp.f. $= 162\ \frac{m}{s^2}$

4. Un automóvil cuyas ruedas tienen un radio de 30 cm, marcha a 50 km/h; en cierto instante su conductor acelera hasta alcanzar una velocidad de 80 km/h, empleando en ello 20 segundos. Calcular: *a)* la aceleración angular de las ruedas; *b)* el número de vueltas dadas en esos 20 segundos.

R.: *a)* $\gamma = 1{,}39\ \frac{1}{s^2}$; *b)* $n = 191{,}5$ vueltas

5. Sabiendo que la Tierra tarda 86 400 segundos en dar una vuelta completa alrededor de su eje, y que su radio mide 6 370 km, calcular la velocidad tangencial de un punto situado en el ecuador

R.: $v = 464$ m/s

6. ídem suponiendo que el punto está situado a la latitud de 48°24'. ¿Cuál sería su velocidad si estuviera en uno de los polos?

R.: $v = 308$ m/s

7. Un móvil recorre una circunferencia de 2 m de radio con movimiento uniforme, dando 30 vueltas por minuto. Calcular: *a)* velocidad angular; *b)* velocidad lineal; *c)* aceleración centrípeta.

R.: *a)* $\omega = 3{,}14\ \frac{1}{seg.}$; *b)* $v = 628$ cm/s; *c)* $a = 1\,972$ cm/s^2

8. Calcular el lapso que separa dos encuentros sucesivos de la aguja horaria y minutera de un reloj.

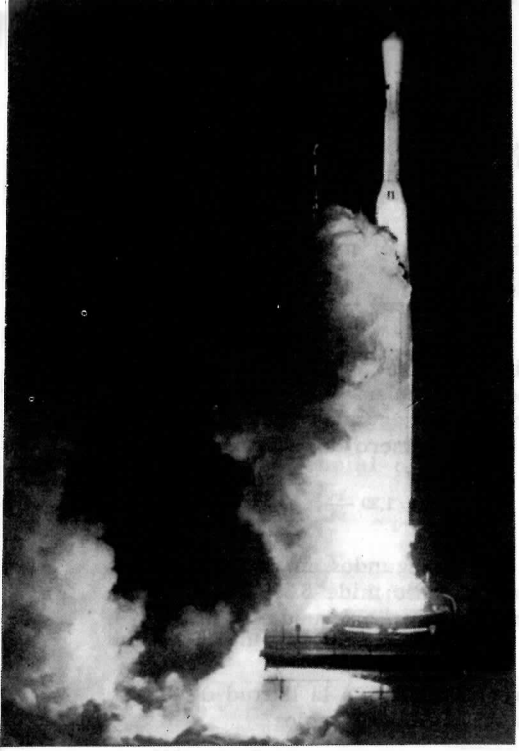
R.: $t = 1$ h 05 m 27,2 s

9. El minutero y horario de un reloj están superpuestos a las 12 horas. ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se encuentren en ángulo recto? ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se encuentren diametralmente opuestos?

R.: 16 m 21,8 s; 32 m 43,6 s

10. Un cilindro hueco de 3 m de altura gira alrededor de su eje con movimiento uniforme, a razón de 180 vueltas por minuto. Una bala disparada paralelamente al eje de rotación perfora las bases en dos puntos, cuyos radios forman un ángulo igual a 8°. Calcular la velocidad de la bala.

R.: $v = 405$ m/s



IV

DINÁMICA

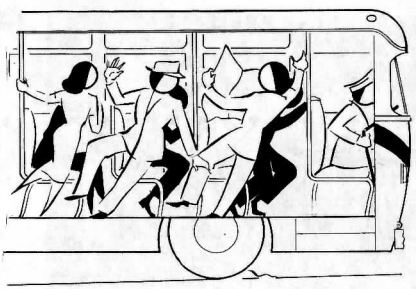
Es curioso comprobar cómo pasan años, y a veces siglos, antes que el pensamiento se detenga, para comprenderlas y explicárselas, en cosas que sentimos y vemos todos los días. Un ejemplo es el **principio de inercia.** *Todos sabemos que para producir un cambio en el movimiento de un cuerpo, debe aplicársele necesariamente una fuerza; pero de ahí a admitir que un cuerpo que está en movimiento seguirá eternamente en movimiento si se eliminan todas las fuerzas exteriores que actúen sobre él, media un gran trecho. Los filósofos griegos se admiraban y no ocultaban su sorpresa al ver cómo una flecha podía seguir en movimiento después de haber abandonado el arco que la había arrojado. "¡¿Cómo es posible que siga moviéndose, si nadie la impulsa?!".*

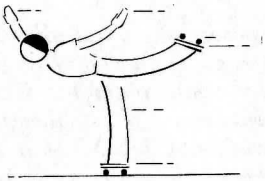
Fue necesario abandonar algunos prejuicios para llegar al principio de inercia. La Naturaleza está hecha de tal manera, que los cuerpos que están en movimiento siguen en movimiento por sí solos, sin que nadie tenga que ir empujándolos. Leonardo, Galileo y Newton son los tres colosos que primero comprendieron y expusieron este comportamiento de los cuerpos.

13 EL PRINCIPIO DE INERCIA

La inercia

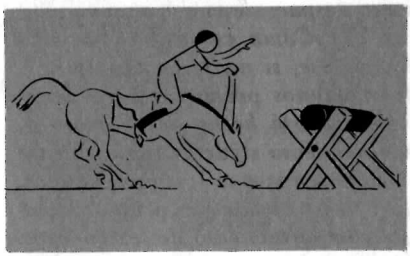
Todos sabemos que cuando un automóvil o un ómnibus frena, los pasajeros son impulsados hacia adelante, como si sus cuerpos trataran de seguir. A veces, en algunos choques, hasta hay personas que son despedidas fuera de los vehículos.



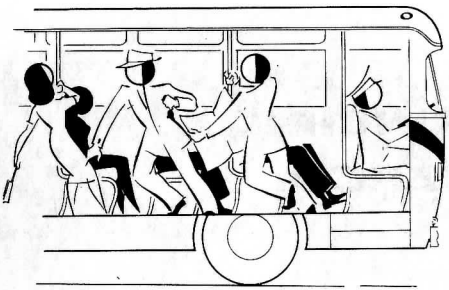


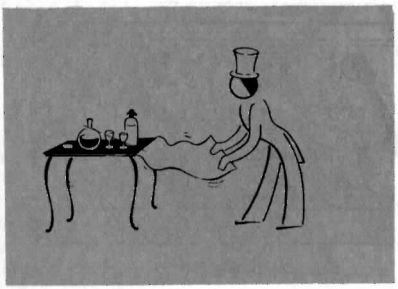
Un patinador, después de haber adquirido cierta velocidad, puede seguir avanzando sin hacer esfuerzo alguno. En equitación, no es poco frecuente, entre los que aprenden a saltar vallas, que frente a una de ellas el caballo se detenga de golpe y el jinete "la salte limpiamente". Todos estos ejemplos muestran que:

Los cuerpos que están en movimiento tienden a seguir en movimiento.



Esta propiedad de la materia se llama *inercia*. Pero hay otros aspectos de la inercia. Cuando arranca un ómnibus, por ejemplo, los pasajeros son impelidos hacia atrás, como si trataran de quedar en el reposo en que se hallaban. En los circos y variedades suele verse a artistas muy hábiles que, con un rápido movimiento, extraen el mantel de una mesa sin que caigan ni abandonen su lugar los objetos colocados encima. Al arrancar bruscamente un ascensor, los pasajeros sienten una desagradable sensación en el estómago, debido a que sus cuerpos se resisten a ponerse en movimiento. Si se hiciera la prueba de colocar una balanza de resorte sobre el piso del ascensor y subir sobre su plataforma, se observaría que la aguja marca un brusco aumento al arrancar, pues el cuerpo se resiste a salir del reposo; una vez que el movimiento se hace uniforme, la aguja señalará nuevamente el peso real del pasajero. Por lo que hemos dicho antes, podemos prever lo que sucederá al frenar: el cuerpo tratará de seguir su movimiento, por lo cual la balanza marcará menos.





Cuando se haya detenido, la balanza marcará nuevamente el

peso del pasajero. En conclusión:

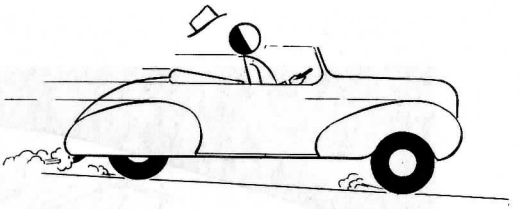
Los cuerpos que están en reposo tienden a seguir en reposo.

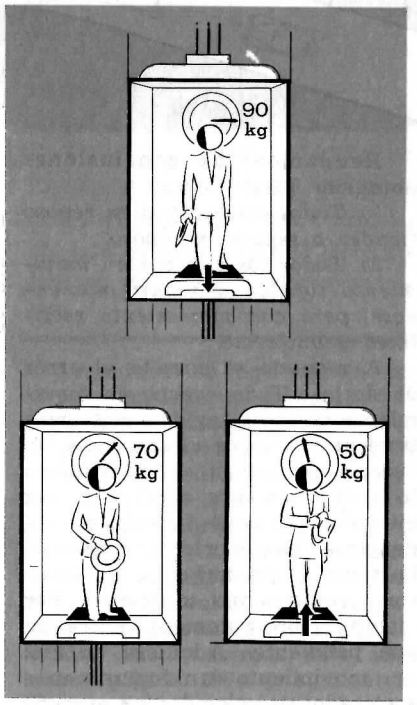
Pero hay más todavía: Si el conductor de un automóvil acelera o aminora la marcha, esas modificaciones repercuten inmediatamente en el cuerpo de los pasajeros: se inclinan hacia atrás o hacia adelante, respectivamente.

CONCLUSIÓN:

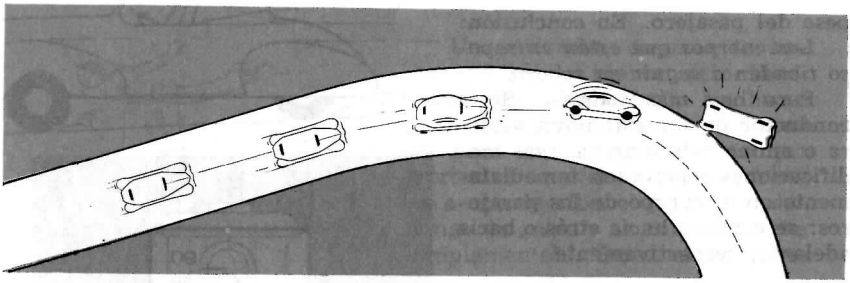
Los cuerpos en movimiento tienden a mantener su velocidad.

El lector pensará: "Como la velocidad es un *vector*, eso significa mantener no sólo la medida, sino también la dirección y el sentido de la velocidad". Así es: todos sabemos que en las curvas, los pasajeros de un vehículo son empujados hacia afuera, pues sus cuerpos tienden a seguir en la dirección que traían. El automóvil mismo se inclina, y si se toma la curva a excesiva velocidad, se produce el vuelco, lo que muestra la tendencia del automóvil a seguir en línea recta.





La inercia mantuvo al automóvil en la dirección que traía antes de llegar a la curva.



Reunamos las conclusiones obtenidas hasta ahora:

1) *Todos los cuerpos en reposo tienden a seguir en reposo.*

2) *Todos los cuerpos en movimiento tienden a seguir moviéndose, pero con movimiento rectilíneo y uniforme.*

A menudo se comete el error de decir: "Todo cuerpo en movimiento tiende a seguir con *su movimiento*". No es cierto, pues un cuerpo que tenga un movimiento *uniformemente acelerado*, por ejemplo, no tiene la menor tendencia a mantenerlo; al contrario, la tiene a perderlo, para seguir con movimiento uniforme. Por ejemplo: un automóvil entra en una pendiente. Adquiere en ella un movimiento uniformemente acelerado; su velocidad va aumentando, hasta que el camino se hace nuevamente horizontal; en ese momento, el automóvil no manifiesta la menor tendencia a continuar con su movimiento (el uniformemente acelerado) al contrario, lo pierde para adquirir un movimiento uniforme y rectilíneo, cuya velocidad es la que había alcanzado en el último instante de su descenso.

Las fuerzas y el movimiento

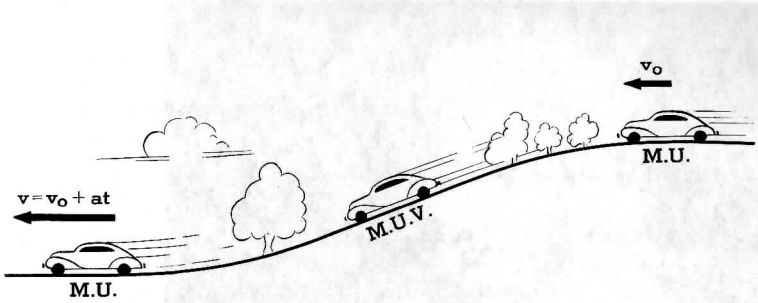
Hemos usado, con toda intención, la palabra "tiende". Mientras nada se oponga, un cuerpo no sólo tenderá a mantener su velocidad, sino que la mantendrá; cuando haya una fuerza exterior, mostrará tendencia a mantener su velocidad, pero se verá obligado a cambiarla. Esto nos permite dar una definición de fuerza:

Fuerza es todo aquello que puede modificar la velocidad de un cuerpo.

Es notoria la imperfección de esta definición, lo que da una idea más de lo dificultoso que resulta definir este concepto.

Hay un problema interesante: cuando una fuerza ha puesto en movimiento a un cuerpo, ¿es necesario que esa fuerza siga actuando para que el movimiento se mantenga?

La solución está, precisamente, en el concepto de inercia. Pongamos algunos ejemplos. Por un terreno horizontal, pero accidentado, hagamos rodar una piedra. Le hemos aplicado una fuerza que la ha puesto en movimiento, venciendo su inercia. La piedra da unos saltos, choca aquí, choca allá, y luego se detiene. *Parece* que al dejar de actuar la fuerza, el movimiento cesa. Si hacemos rodar una pelota por un terreno liso, una playa de mar, por ejemplo, llegará muy lejos, pero termina por detenerse. Otra vez *parece* que para mantener el movimiento es necesaria la



fuerza. Sin embargo, hay una visible diferencia con el caso anterior: *al ser más lisas las superficies, el movimiento se mantuvo más.* Si repetimos la experiencia con una bola de cristal muy pulido, y la hacemos rodar por una superficie muy pulida, un lago helado, por ejemplo, llegará lejísimo, manteniéndose en movimiento por mucho tiempo. No es difícil advertir que lo que impide que el movimiento se mantenga indefinidamente son las irregularidades de las superficies, imposibles de evitar. Entre ellas se producen rozamientos, y aparecen así las fuerzas exteriores que van frenando al móvil. Si tanto éste como la superficie estuvieran *idealmente* pulidos, esas fuerzas desaparecerían, y el movimiento seguiría *eternamente rectilíneo y uniforme,* mientras no apareciera otra fuerza exterior. En la realidad, las superficies perfectamente pulidas no existen. La función del motor en los trenes, automóviles, etc., es, precisamente, producir una fuerza capaz de compensar las fuerzas frenadoras del rozamiento.

Todas estas ideas constituyen el *principio de inercia,* descubierto por Leonardo de Vinci, quien lo mantuvo en secreto. Más tarde Galileo llegó a las mismas conclusiones, y finalmente Newton le dio la forma con que hoy lo conocemos:

Principio de inercia: si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o actúan varias que se anulan entre sí, entonces el cuerpo está en reposo o bien en movimiento rectilíneo y uniforme.

Un enunciado equivalente es: *Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, o actúan varias que se anulan entre sí, entonces el cuerpo conserva constante su vector velocidad.*

Alguien podría preguntarse –y con razón–: "¿Conserva constante su vector velocidad?"... ¿de cuál de los puntos del cuerpo? La pregunta u observación es muy justificada, como veremos más adelante (página 180) y siguientes: Dinámica de los rotaciones), pero en este lugar diremos solamente lo siguiente: hasta ahora, si bien hemos hablado de un *cuerpo,* sólo lo hemos estudiado como un *punto* sin distinguir entre los infinitos puntos que forman un cuerpo. Ese punto que, sin decirlo, hemos venido identificando con todo el cuerpo, es el *centro de gravedad,* y a él se refiere el principio de inercia.

Por último, queremos señalar al lector las dificultades que hemos tenido que vencer hasta llegar al enunciado recuadrado; los resultados parciales y no estricta-

Isaac Newton.

mente correctos que nos han servido de escalones; el uso de palabras criticables como TIENDE, a la que lo menos que se le puede objetar es que da idea de que un cuerpo puede tener tendencias, o voluntad... Pero toda esa cautela y esa construcción a través de elementos imperfectos nos muestran la esencia de las dificultades que hicieron que fuera necesario llegar al siglo XVI en la historia de la ciencia para que sólo entonces el principio de inercia encontrara su forma y fondo actual.

El principio de inercia es muy importante, pues establece relaciones entre los movimientos y las fuerzas. Si la fuerza es nula, el movimiento es rectilíneo uniforme, o el cuerpo está en reposo; si no lo es, hay un cambio de velocidad, es decir, una *aceleración*. Resulta así que una fuerza aplicada a un cuerpo no tiene por efecto comunicarle una determinada velocidad, como podría pensarse a primera vista, sino imprimirle una cierta *aceleración*. Fácil es advertir que si la fuerza es constante, la aceleración también será constante. Como ésta es la característica de un movimiento uniformemente variado:

Un movimiento uniformemente variado es producido por una fuerza constante.

¿Qué relación hay entre la fuerza aplicada a un cuerpo y la aceleración que éste adquiere? Es éste un problema sumamente importante, del que nos ocuparemos luego que sepamos qué es la masa de un cuerpo. Por ahora, re-

sumamos:

1) *Fuerza nula:* reposo o movimiento rectilíneo uniforme.
2) *Fuerza no nula*
   constante: movimiento uniformemente variado;
   variable: movimiento variado.

Sir Isaac Newton

Nació en la Navidad de 1642, en el pueblo de Woolsthorpe (Inglaterra), poco después de la muerte de su gran antecesor, Galileo. De aspecto melancólico, débil, enfermizo, mostró sin embargo inventiva y habilidad manual: carruajes, automotores, molinos de viento, relojes, mecanismos hidráulicos, fueron algunas de las realizaciones de ese niño tímido y retraído. Y no sólo eso: mostró sobresalientes condiciones en el dibujo y la pintura.

A los veinte años ingresó en el renombrado Trinity College, de la Universidad de Cambridge, donde tuvo la suerte de contar con los mejores maestros de la época. Apenas tres años después obtiene su primer éxito científico, al demostrar la fórmula de su célebre binomio. A los veintisiete años es designado profesor de la Universidad, reemplazando a su mejor maestro, Barrow, quien se retira voluntariamente, en plena juventud, para dejar lugar a su mejor discípulo. A los treinta años sus éxitos científicos le permiten incorporarse a la Royal Society de Londres, la sociedad científica más eminente. Murió en 1727, gozando, a diferencia de otros grandes sabios, de una vejez larga y feliz: la Royal Society lo eligió su presidente, la reina lo designó caballero, y su empleo en la Dirección de la Moneda le permitió vivir desahogadamente.

Sus conceptos más célebres se conocieron muchos años después de haberlos descubierto. Así la idea de la gravitación universal, que fue publicada veinte años después de habérsele ocurrido. Su timidez natural conspiró contra su éxito social, pero ello fue una ventaja, porque le permitió concentrarse y abstraerse.

Sepultado en la abadía de Westminster, junto a los reyes de Inglaterra, su lápida da cuenta de la admiración que causó a sus contemporáneos: "Alégrense los mortales de que tal y tanto ornamento del género humano haya existido".

Poincaré dijo: "Por lejos que llegue el telescopio, no alcanza el límite de lo sometido a las leyes de Newton".

Algunas sencillas experiencias para comprobar la inercia

1. Coloque sobre una mesa una hoja de papel, y sobre ésta un libro. Dé un violento tirón a la hoja: el libro no se mueve.

2. Repita la experiencia anterior, pero colocando el libro parado. Hay cierta posibilidad de que el libro se tumbe, pero la experiencia se logra si se lo pone cerca del borde de la hoja de papel.

3. Más difícil le será mantener parado un cigarrillo o un lápiz colocado sobre una hoja, y quitar ésta sin que él se tumbe. Lo conseguirá si coloca la hoja con los extremos apoyados en dos mesas, de modo que la parte del medio quede en el aire (puede también sujetar uno de los extremos con una mano); pare el cigarrillo, y con una regla aplique un fortísimo golpe sobre la parte del papel que está en el aire: la hoja saldrá, sin que el cigarrillo se haya movido.

El cigarrillo estaba parado sobre la hoja, que fue sacada de la mesa por el violentísimo golpe de regla.

14 EL PRINCIPIO DE MASA

El concepto de masa

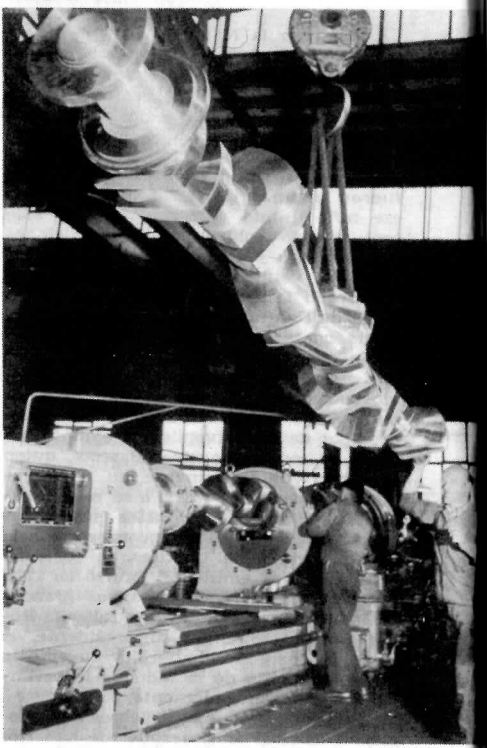
Masa de un cuerpo es la cantidad de materia que lo forma. Aceptemos por ahora esta definición, que por lo menos tiene el mérito de ser "tangible". Más adelante daremos otras más precisas.

La masa dè una botella es la cantidad de materia (vidrio) que la forma; la masa de un libro es la cantidad de materia (papel, tinta, etc.) que lo forma; la masa de un automóvil es la cantidad de materia (hierro, vidrio, goma, cuero, estopa, material plástico, etc.) que lo forma.

La importancia del concepto de masa radica en que está estrechamente vinculado con el concepto de inercia, y también con la fuerza y la aceleración que la fuerza provoca. Si dos automóviles tienen las mismas clases de materiales, pero uno tiene doble masa que el otro, ¿cuál tendrá más inercia? Bastará empujar a los dos con la misma fuerza y observar cuál resiste más. Todos sabemos que el de mayor masa. Es decir:

Cuanto mayor es la masa, mayor es la inercia.

Por eso se dice que la masa de un cuerpo es una medida de su inercia.



Cómo se puede medir la masa

Con un dinamómetro pesamos un mismo cuerpo en distintos lugares de la Tierra; por ejemplo, en el polo sur, en un lugar situado a 45° de latitud (aproximadamente

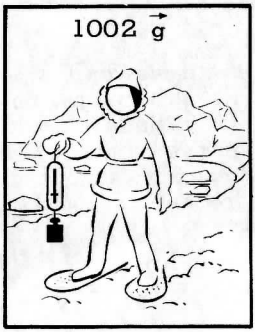
la de Comodoro Rivadavia), y en un lugar del ecuador terrestre, siempre al nivel del mar. En primer lugar nos llevaremos una sorpresa, pues comprobaremos que:

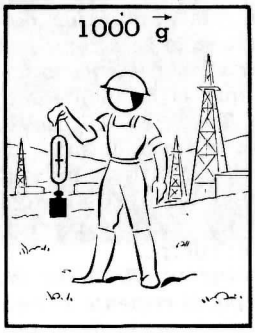
En lugares diferentes, un mismo cuerpo tiene pesos diferentes.

La diferencia no es grande, pero hay alguna. Un litro de agua pesa en el polo aproximadamente 1 002 gramos; a 45° de latitud y al nivel del mar, 1 000 gramos; en el ecuador, sólo 997 gramos. La explicación es sencilla: la Tierra no es esférica, sino achatada en los polos, de modo que un cuerpo colocado en uno de ellos está más cerca del centro de la Tierra que si se lo lleva a otras latitudes. Como la Tierra se comporta como si todo su poder de atracción estuviera acumulado en su centro, cuanto más cerca de él esté un cuerpo, mayor será la fuerza de atracción, es decir, su peso.

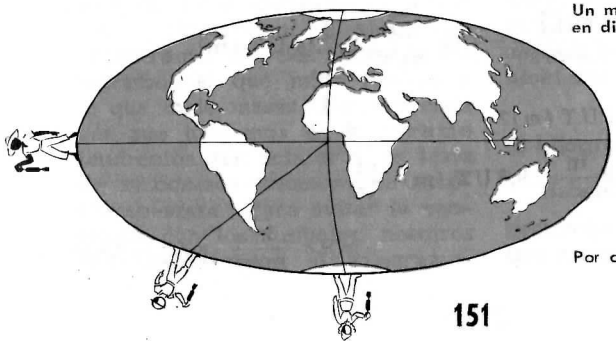
Llamemos P al peso del cuerpo y g a la aceleración de la gravedad en el polo; P' y g' en Comodoro Rivadavia, y P'' y g'' en el ecuador. Los tres pesos son distintos, las tres aceleraciones de la gravedad son distintas... ¡pero sus respectivos cocientes son iguales!

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = \frac{P''}{g''}$$





Un mismo cuerpo no pesa lo mismo en distintos lugares de la Tierra.



Por qué varía el peso.

Si efectuamos mediciones análogas con otro cuerpo, obtendremos pesos distintos en cada lugar, pero los cocientes son también iguales entre sí, aunque distintos de los obtenidos con el cuerpo anterior:

$$\frac{P_1}{g} = \frac{P'_1}{g'} = \frac{P''_1}{g''}.$$

El cociente entre el peso de un cuerpo y la aceleración del lugar en donde se lo pesa representa una característica del cuerpo, característica que se ha mantenido invariable. También la cantidad de materia, es decir, *la masa* de cada cuerpo, se mantiene invariable al llevarlo de un lugar a otro; de modo que ese cociente representa la masa del cuerpo.

DEFINICIÓN: *Se llama masa de un cuerpo, al cociente entre su peso y la aceleración de la gravedad en el lugar donde se lo pesa.*

En fórmula:

$$\boxed{m = \frac{P}{g}}$$

De esa fórmula resultan estas dos:

$$\boxed{P = m\,g} \qquad \boxed{g = \frac{P}{m}}$$

Una unidad de masa:

De acuerdo con esta segunda definición, la unidad de masa se obtendrá dividiendo la unidad en que se midió el peso por la unidad de la aceleración de la gravedad:

$$\text{Unidad de masa} = \frac{\text{Unidad de peso}}{\text{Unidad de aceleración}}.$$

Si el peso se mide en $\vec{kg}$ y la aceleración en m/s^2, la unidad de masa que resulta se llama *unidad técnica de masa*, y su símbolo es: *UT (m)*.

EJ.: *¿Cuál es la masa de un cuerpo que pesa 1 $\vec{kg}$?* (Salvo que se mencione especialmente, siempre tomaremos para la Tierra el mismo valor de $g = 9{,}8\ m/s^2$.)

$$m = \frac{P}{g} = \frac{1\ \vec{kg}}{9{,}8\ m/s^2} = 0{,}102\ \frac{\vec{kg}}{m/s^2} = 0{,}102\ UT\ (m).$$

EJ.: *Calcular la masa de un hombre que pesa 70 $\vec{kg}$.*

$$m = \frac{P}{g} = \frac{70\ \vec{kg}}{9{,}8\ m/s^2} = 7{,}14\ \frac{\vec{kg}}{m/s^2} = 7{,}14\ UT\ (m).$$

EJ.: *¿Cuánto pesa 1 UT (m)?*

$$P = mg = 1\ UT\ (m) \cdot 9{,}8\ \frac{m}{s^2} = 9{,}8\ UT\ (m) \cdot \frac{m}{s^2} =$$

$$= 9{,}8\ \frac{\vec{kg}}{m/s^2} \cdot m/s^2 = 9{,}8\ \vec{kg}$$

EJ.: *Calcule el alumno su propia masa, expresada en UT (m).*

EJ.: *En la Luna, la aceleración de la gravedad vale 167 cm/s². ¿Cuánto pesaría usted si se pesase en la Luna?*

EJ.: *¿Y cuánto pesaría en el Sol, donde la aceleración de la gravedad es unas 28 veces mayor que en la Tierra?*

Otra unidad de masa: el kilogramo-masa

Hay una unidad de masa que se determinó en forma similar a como lo fue el metro. Se trató de construir un prototipo, cuya masa fuera igual a la cantidad de materia que hay en 1 litro de agua pura, a una temperatura de 4 grados centígrados. Se construyó el prototipo, que no es otro que nuestro conocido kilogramo-patrón, pero mediciones posteriores, como en el caso del metro, revelaron pequeñas diferencias con respecto a la masa de 1 litro de agua. Y así como en el caso del metro se adoptó como unidad de longitud la longitud de la barra-patrón, como unidad de masa se adoptó la masa del prototipo.

Pero luego los físicos tuvieron una mala ocurrencia: en lugar de llamarla "galileo", por ejemplo, de modo que la masa de un cuerpo sería de 3 ó 5 "galileos", la llamaron... *¡kilogramo!* Y ahora nos encontramos con dos clases de kilogramo: el que mide fuerzas y el que mide masas. Por eso cada vez que hablemos de kilogramo tendremos que aclarar si se trata de KILOGRAMO-FUERZA o de KILOGRAMO-MASA. Para evitar la confusión con los símbolos, nosotros representaremos al kilogramo-fuerza así: $\vec{kg}$; y al kilogramo-masa: *kg*. Adoptamos esta notación porque hace visible una diferencia fundamental entre fuerza y masa: la primera es una magnitud *vectorial*; la segunda es *escalar*.

Balanza de precisión.

DEFINICIÓN DEL KILOGRAMO-MASA: es la masa *de un cuerpo llamado kilogramo-patrón que está depositado en Francia.*

DEFINICIÓN DEL KILOGRAMO-FUERZA: es el peso *de un cuerpo llamado kilogramo-patrón, que está depositado en Francia, cuando se lo mide a 45° de latitud y al nivel del mar.*

El kilogramo-masa y la U.T. (m)

Sabemos que el prototipo kilogramo-patrón, que pesa 1 $\vec{kg}$, tiene una masa de 1 kg (por definición).

Como

$$m = \frac{P}{g},\ 1\ \text{kg} = \frac{1\ \vec{\text{kg}}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}102\ \frac{\vec{\text{kg}}}{\text{m/s}^2}$$

pero

$$\frac{\vec{\text{kg}}}{\text{m/s}^2} = \text{UT (m)} \quad \therefore \quad 1\ \text{kg} = 0{,}102\ \text{UT (m)}.$$

Recíprocamente:

$$1\ \text{UT (m)} = 9{,}8\ \text{kg}.$$

Ej.: *Expresar en kg una masa de 50 UT (m).*

$$m = 50\ \text{UT (m)} = 50 \cdot 9{,}8\ \text{kg} = 490\ \text{kg}.$$

Ej.: *Expresar en UT (m) una masa de 20 kg.*

$$m = 20\ \text{kg} = 20 \cdot 0{,}102\ \text{UT (m)} = 2{,}04\ \text{UT (m)}.$$

Un resultado peligroso

Calcular la masa, en kilogramos-masa, de un hombre que pesa 70 $\vec{\text{kg}}$.

De acuerdo con el principio de masa:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{70\ \vec{\text{kg}}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 7{,}14\ \text{UT (m)}.$$

Como 1 UT (m) = 9,8 kg:

$$m = 7{,}14\ \text{UT (m)} = 7{,}14 \cdot 9{,}8\ \text{kg} = 70\ \text{kg}.$$

Luego, un hombre que pesa 70 $\vec{\text{kg}}$ tiene una masa de 70 kg. Pero hay que tener especial cuidado en evitar la tentación de sacar como consecuencia que la masa y el peso son una misma cosa.

No confundamos masa con peso

Nuestro hombre de 70 $\vec{\text{kg}}$ de peso puede tener también 70 años de edad, o $ 70 en el bolsillo, pero a nadie se le ocurrirá decir que peso y edad o dinero es una misma cosa, apoyándose en el hecho de que *el número* que mide el peso es igual *al número* que mide la edad. Del mismo modo, el número que mide el peso de un cuerpo en $\vec{\text{kg}}$ es siempre muy parecido (será *igual* sólo al nivel del mar y a 45° de latitud) al número que mide la masa en kg, pero las dos magnitudes, peso y masa, son diferentes.

Es muy común que se confunda masa con peso. Ello se debe, entre otras, a las siguientes razones:

1) Hay una unidad de peso que tiene el mismo nombre que una unidad de masa (el kilogramo-fuerza y el kilogramo-masa).

2) A 45° de latitud y al nivel del mar, un cuerpo que pesa 1 $\vec{\text{kg}}$ tiene una masa de 1 kg; un cuerpo de 17 kg pesa 17 $\vec{\text{kg}}$; es decir, que el número que mide el peso de un cuerpo en $\vec{\text{kg}}$, es el mismo que mide su masa en kg.

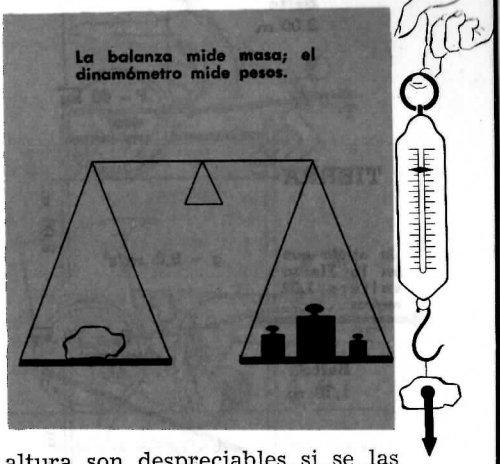
En los demás lugares de la Tierra, como el peso cambia y la masa no, los números serán distintos, aunque siempre muy parecidos.

3) En la vida diaria no estamos acostumbrados al concepto de masa, y usamos la palabra *peso* y el verbo *pesar*, cuando debiéramos usar la palabra *masa* y el verbo *"masar"*. Aunque resulte un poco gracioso, el almacenero no nos *pesa* 5 kg de azúcar: los *"masa"*, pues *la balanza de platillos no mide pesos, sino masas.* En efecto: coloquemos en uno de los platillos una pesa de 5 kg, y en el otro, azúcar hasta equilibrarla. ¿Qué pasará si nos vamos con la balanza, las pesas y el azúcar a otro lugar de la Tierra, por ejemplo al ecuador

y realizamos allí una nueva medición? Pues que las pesas pesan menos; pero para equilibrar la balanza no se necesitará menor cantidad de azúcar que antes, puesto que también el azúcar pesa menos. Si nos fuéramos a la Luna, la pesa de 5 kg pesaría unos 850 gramos-fuerza, pero lo equilibraríamos con la misma cantidad de azúcar. Esto significa que la operación que estamos realizando no es la de medir las fuerzas o pesos, sino la de medir las cantidades de materia puestas en juego, o sea las masas. No estamos *pesando*, sino *"masando"* azúcar.

El dinamómetro sí mide pesos y fuerzas. Si le colgamos 1 kg, al nivel del mar y a 45° de latitud marcará 1 $\vec{kg}$; con esa misma masa, en el polo se estirará hasta marcar 1,002 $\vec{kg}$; en el ecuador marcará sólo 0,997 $\vec{kg}$, y en la Luna apenas se alargará hasta señalar 166 gramos-fuerza.

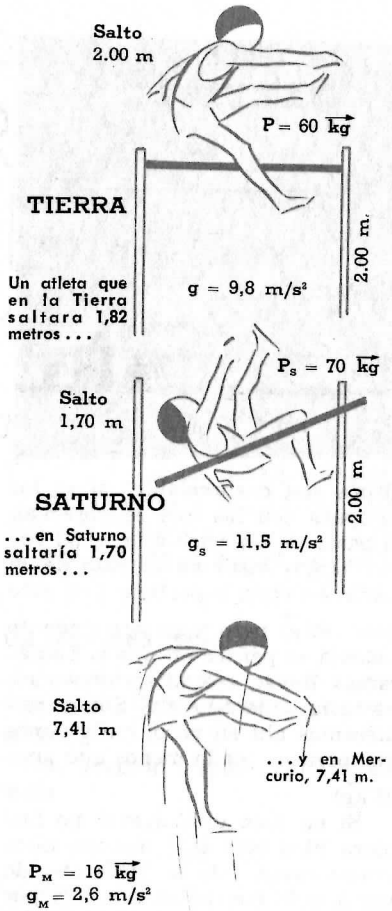
En resumen: masa y peso son dos cosas completamente distintas. *El peso de un cuerpo varía según el lugar en donde se lo pese, mientras que su masa permanece siempre constante.* Por eso, en la definición correcta de kilogramo-fuerza es necesario mencionar la latitud, tal como lo hemos hecho, y también la altura, pues el peso de un cuerpo disminuye a medida que se aleja del centro de la Tierra. En un avión en vuelo pesamos menos que estando en tierra. Más aún: si levantamos un cuerpo hasta el techo, su peso disminuye, y aunque la disminución es muy pequeña, hay balanzas muy sensibles que la registran. Pero las variaciones de peso con la latitud y la



altura son despreciables si se las compara con las que se observan al pasar de un astro a otro, tal como hemos visto en el caso de la Luna, en cuya superficie 1 kg sólo pesa 166 $\vec{g}$; pero más sorprendente todavía es pensar en que si pudiéramos llevar ese kilogramo-masa hasta la superficie del Sol, y midiéramos ahí su peso, hallaríamos que pesa... ¡nada menos que unos 28 $\vec{kg}$!

Si en todo el Universo no hubiera otra cosa que nuestro kilogramo-masa, éste no sería atraído por ningún cuerpo celeste... ¡y por lo tanto, no pesaría nada! Sin embargo, su masa es siempre la misma.

Sabiendo que en la Luna los cuerpos pesan menos, las personas gordas soñarán, pues, con vivir en ella. Vano empeño: su peso se reducirá, en efecto, a la sexta parte, pero su masa será la misma, y seguirán siendo gordas. Un hombre normal pesa unos 70 $\vec{kg}$ en la Tierra, unos 12 $\vec{kg}$ en la Luna, y unos 1 960 $\vec{kg}$ en el Sol.



Si el Sol estuviera habitado, sus habitantes se moverían con extraordinaria lentitud: el campeón de salto en alto saltaría apenas unos 7 cm. En la Luna, en cambio, saltaría fácilmente una casa de dos pisos En los campeonatos, los *records* no se podrían homologar interplanetariamente, pues los selenitas serían imbatibles.

El principio de masa

Una fuerza aplicada a un cuerpo puede vencer su inercia, y en ese caso le comunica una determinada aceleración. ¿Qué relación hay entre la fuerza aplicada, la masa del cuerpo y la aceleración que adquiere? Ahora sabemos qué es la masa y cómo medirla, de modo que podemos enfrentar el problema. En cierto modo ya lo hemos hecho, casi inadvertidamente, pues conocemos la relación que hay entre el peso de un cuerpo (que es una fuerza muy particular –la que le aplica la Tierra–, pero fuerza al fin), la masa, y la aceleración que bajo esa fuerza adquiere el cuerpo: la aceleración de la gravedad. Llegamos a la conclusión de que:

$m = P/g \therefore P = mg \therefore g = P/m$.

Esta última fórmula nos dice que la aceleración que adquiere un cuerpo bajo la acción de su peso es directamente proporcional a su peso, e inversamente proporcional a su masa. Si aplicamos una fuerza cualquiera, la aceleración que adquiera el cuerpo, ¿será también directamente proporcional a la fuerza aplicada, e inversamente proporcional a su masa? Así es, como puede comprenderse con los siguientes ejemplos:

1) Se tienen dos carros exactamente iguales (la misma masa); del primero tira un hombre y del segundo un caballo (dos fuerzas distintas) ¿Cuál adquiere mayor aceleración? Evidentemente, el se-

gundo. Si midiéramos comprobaríamos que:

La aceleración es directamente proporcional a la fuerza.

En símbolos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2}, \quad \text{o bien:} \quad \frac{a_1}{F_1} = \frac{a_2}{F_2}.$$

2) Se tienen dos caballos iguales (la misma fuerza); el primero tira de un carro más chico que el segundo (distintas masas). ¿Cuál adquiere mayor aceleración? Evidentemente, el primero. Si midiéramos comprobaríamos que:

La aceleración es inversamente proporcional a la masa.

En símbolos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \text{o bien:} \quad \frac{a_1}{m_2} = \frac{a_2}{m_1}.$$

En general, diremos:

Principio de masa: la aceleración que adquiere un cuerpo bajo la acción de una fuerza es directamente proporcional a la fuerza, e inversamente proporcional a su masa.

En fórmula:

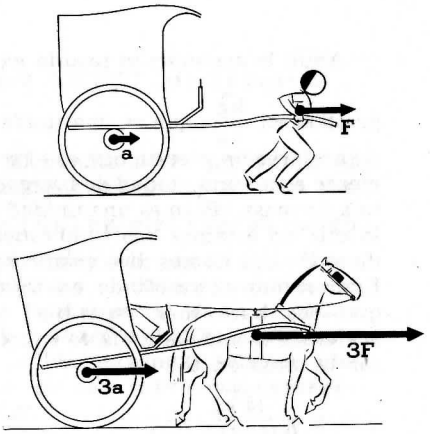
$$a = \frac{F}{m}$$

EJEMPLO: *Sobre un cuerpo de 5 UTM se aplica una fuerza de 10 $\vec{kg}$. ¿Qué aceleración adquiere?*

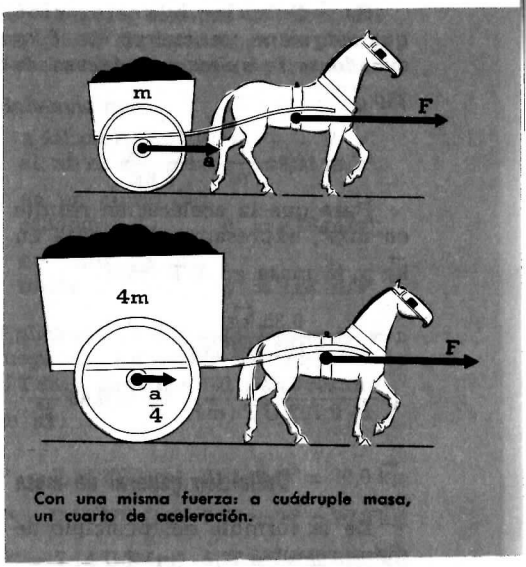
$$a = \frac{F}{m} = \frac{10\ \vec{kg}}{5\ UTM}.$$

Recordemos que, por definición, $UTM = \frac{\vec{kg}}{m/s^2}$, de modo que

$$a = \frac{10\ \vec{kg}}{5\ \vec{kg}/\frac{m}{s^2}} = 2\ \frac{m}{s^2}.$$



Con una misma masa: a triple fuerza, triple aceleración.



Con una misma fuerza: a cuádruple masa, un cuarto de aceleración.

EJ.: *Se aplica una fuerza de 15 $\vec{kg}$ sobre un cuerpo cuya masa mide 2 kg. ¿Qué aceleración adquiere?*

$$a = \frac{F}{m} = \frac{15\ \vec{kg}}{2\ kg}.$$

Aquí, la aceleración resulta expresada en $\frac{\vec{kg}}{kg}$, que es una unidad de aceleración, puesto que es el cociente entre una unidad de fuerza y una de masa. Pero es una unidad a la que no estamos acostumbrados, de modo que no nos dice gran cosa. Expresemos el resultado en m/s², que nos hará más "sensible" la aceleración calculada. Basta expresar la masa en UT (m):

$$a = \frac{15\ \vec{kg}}{2 \cdot 0{,}102\ UT\ (m)} = \frac{15}{2 \cdot 0{,}102}\ \frac{m}{s^2} \cong 73{,}5\ \frac{m}{s^2}.$$

EJ.: *Calcular la aceleración que adquiere un cuerpo de 8 kg cuando se le aplica una fuerza de 350* $\vec{g}$.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{350\ \vec{g}}{8\ kg}.$$

Para que la aceleración resulte en m/s², expresamos la fuerza en $\vec{kg}$ y la masa en UT (m):

$$a = \frac{0{,}35\ \vec{kg}}{8 \cdot 0{,}102\ UT\ (m)} = \frac{0{,}35}{8 \cdot 0{,}102\ UT\ (m)}\ \frac{m}{s^2} \cong 0{,}43\ \frac{m}{s^2}.$$

Definición general de masa

De la fórmula del principio de masa resulta:

$$m = \frac{a}{F}$$

DEFINICIÓN: *Se llama masa de un cuerpo al cociente entre la fuerza que se le aplica y la aceleración que adquiere.*

EJ.: *¿Cuál es la masa de un cuerpo al que una fuerza de 10* $\vec{kg}$ *le imprime una aceleración de 2 m/s²?*

De acuerdo con la definición:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{10\ \vec{kg}}{2\ m/s^2} = 5\ UT\ (m).$$

EJ.: *Un cuerpo pesa 5* $\vec{kg}$. *¿Cuál es su masa?*

El kilogramo patrón es un cuerpo que pesa 1 $\vec{kg}$, y cuya masa, por definición, es de 1 kg. Luego, un cuerpo que pesa 5 $\vec{kg}$ tiene una masa de 5 kg. Empleando las fórmulas comprobaremos este resultado; a primera vista parece que faltara un dato, la aceleración, pero sabemos que el peso de un cuerpo imprime a éste la aceleración de la gravedad, 9,8 m/s². Luego:

$$m = \frac{F}{a} = \frac{P}{g} = \frac{5\ \vec{kg}}{9{,}8\ m/s^2} = 0{,}51\ UT\ (m).$$

Claro que el resultado está expresado en UT (m); pero reduciendo a kg:

$$m = 0{,}51\ UT\ (m) = 0{,}51 \cdot 9{,}8\ kg = 5\ kg.$$

Como vemos, las fórmulas $m = \frac{P}{g}$; $P = m\,g$; $g = \frac{P}{m}$ no son más que un caso particular del principio de masa.

Cálculo de fuerzas

Si bien, como una consecuencia del principio de inercia, hemos dado una definición de fuerza, hasta ahora no hemos podido *calcular* ninguna fuerza. Era imposible, pues nuestra definición no incluye una fórmula que permita el cálculo. Justamente, una conclusión

importante del principio de masa es la de que:

$$F = m\,a\,,$$

fórmula que nos dice que: si una fuerza F actúa sobre un cuerpo de masa m y le imprime una aceleración a, multiplicando la masa por la aceleración, se puede calcular la fuerza.

EJ.: *¿Cuánto vale la fuerza que, aplicada a un cuerpo cuya masa es de 5 UT (m), le imprime una aceleración de 3 m/s²?*

$$F = m\,a = 5\ \text{UT (m)} \cdot 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 15\ \text{UT (m)} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Recordemos que la UT (m) = $\frac{\vec{\text{kg}}}{\text{m/s}^2}$ (pág. 152), de modo que:

$$F = 15\ \frac{\vec{\text{kg}}}{\text{m/s}^2} \cdot \text{m/s}^2 = 15\ \vec{\text{kg}}.$$

EJ.: *¿Cuál es la fuerza que aplicada a un cuerpo de 196 kg le imprime una aceleración de 10 m/s²?*

$$F = m \cdot a = 196\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Para obtener la fuerza en $\vec{\text{kg}}$ se debe expresar la masa en UT (m):

$$F = 196 \cdot 0{,}102\ \text{UT (m)} \cdot 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 199{,}92\ \text{kg}.$$

EJ.: *¿Cuánto pesa un cuerpo de 8 kg de masa?*

$$P = m\,g = 8\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2.$$

Para que el peso resulte en $\vec{\text{kg}}$, la masa se debe expresar en UT (m):

$$P = 8 \cdot 0{,}102\ \text{UT (m)} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 8\ \vec{\text{kg}}.$$

El resultado era previsible: el kilogramo patrón, que tiene una masa de 1 kg, pesa 1 $\vec{\text{kg}}$; un cuerpo de 8 kg de masa pesará 8 $\vec{\text{kg}}$. Estos resultados se obtienen admitiendo que la aceleración de la gravedad vale 9,8 m/s² en todos los lugares de la Tierra, aunque sabemos que esto es sólo *aproximadamente* cierto.

EJ.: *Un cuerpo tiene una masa de 70 kg (aproximadamente la masa de un hombre normal). Calcular su peso, siempre al nivel del mar, a 45° de latitud, en un punto del ecuador y en uno de los polos.*

Sabemos que:

a 45° de latitud y al nivel del mar $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$;

en un punto del ecuador ..... $g' = 9{,}78\ \text{m/s}^2$;

en uno de los polos ..... $g'' = 9{,}83\ \text{m/s}^2$.

Aplicando la fórmula $P = m\,g$, y luego de expresar la masa en UT (m) para que el peso resulte en $\vec{\text{kg}}$:

$$P = 7{,}14\ \text{UT (m)} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 70{,}0\ \vec{\text{kg}}$$

$$P' = 7{,}14\ \text{UT (m)} \cdot 9{,}83\ \text{m/s}^2 = 70{,}2\ \vec{\text{kg}}$$

$$P'' = 7{,}14\ \text{UT (m)} \cdot 9{,}78\ \text{m/s}^2 = 69{,}8\ \vec{\text{kg}}$$

EJEMPLO: *Calcular el peso del mismo cuerpo en la Luna, donde $g = 1{,}67\ m/s^2$.*

$$P = m\,g = 7{,}14\ \text{UT (m)} \cdot 1{,}67\ \text{m/s}^2 = 11{,}9\ \vec{\text{kg}}.$$

La caída de los cuerpos

Cuando estudiamos la caída de los cuerpos dijimos que Galileo sospechó que todos los cuerpos dejados caer desde una misma altura llegarían a tierra con la misma velocidad, porque él pensaba que había una cierta compensación entre el peso de un cuerpo (fuerza con que la Tierra lo atrae) y "lo que cuesta moverlo". Ahora que conocemos lo que es masa e inercia, podemos comprender por qué todos los cuerpos caen con la misma aceleración. Entre su peso y su inercia hay una proporcionalidad: si el peso es grande, también es grande la resistencia que opone a ser movido, y el cociente es el mismo para todos los cuerpos: la aceleración de la gravedad.

El empleo de distintas unidades

En los problemas que acabamos de resolver hemos visto que, en todos los casos, tres unidades formaban como una familia: el $\vec{kg}$ (unidad de fuerza), la *UT (m)* (unidad de masa) y el m/s^2 (unidad de aceleración). Al usar cualquiera de las tres fórmulas que las vinculan ($F = ma$; $a = F/m$; $m = F/a$), si expresamos los dos datos en esas unidades, la incógnita resulta expresada en la tercera de ellas.

En cambio, si se quiere calcular una fuerza y se expresa la masa en kg y la aceleración en m/s^2, la fuerza resulta expresada en una unidad que *no es kilogramo-fuerza.*

EJEMPLO: *Calcular la fuerza que a un cuerpo de 6 kg le imprime una aceleración de 3 m/s^2.*

$$F = ma = 6\ kg \cdot 3\ m/s^2 = 18\ kg \cdot m/s^2$$

Esa fuerza NO ES de 18 $\vec{kg}$. En efecto: si expresamos la masa en UT (m), resulta:

$$F = 6 \cdot 0{,}102\ UT\ (m) \cdot 3\ m/s^2 = 1{,}836\ \vec{kg}.$$

Una nueva unidad de fuerza: el newton (N)

De todas maneras, el resultado obtenido en el ejemplo anterior, $18\ kg \cdot m/s^2$, *es* una fuerza, y la unidad $kg \cdot m/s^2$ *es* una unidad de fuerza, pues es el producto de una unidad de masa por una de aceleración: se la llama *newton*, y su símbolo es *N*. La fuerza obtenida, es pues, de *18 N*.

Con esta nueva unidad de fuerza, el newton, el kilogramo-masa y el m/s^2, se obtiene un terceto de unidades con las mismas características que el que citamos más arriba: cada vez que se calcule una fuerza y se expresen los datos en kg y m/s^2, la fuerza estará dada en N; cada vez que se calcule una masa empleando N y m/s^2, la masa saldrá expresada en kg; y cada vez que se calcule una aceleración empleando kg y N, la aceleración estará expresada en m/s^2.

EJEMPLO: *Sobre un cuerpo de 10 kg se aplica una fuerza que le imprime una aceleración de 5 m/s^2. ¿Cuánto vale la fuerza?*

$$F = ma = 10\ kg \cdot 5\ m/s^2 = 50\ N.$$

EJEMPLO: *¿Cuál es la masa de un cuerpo al que una fuerza de 8 N le imprime una aceleración de 4 m/s^2?*

$$m = \frac{F}{a} = \frac{8\ N}{4\ m/s^2} = 2\ kg.$$

EJEMPLO: *¿Qué aceleración adquiere un cuerpo de 50 kg cuan-*

do se le aplica una fuerza de 10 N?

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10\ N}{50\ kg} = 0{,}2\ m/s^2.$$

EJ.: *¿Qué fuerza imprime una aceleración de 1 m/s² a un cuerpo de 1 kg?*

$$F = ma = 1\ kg \cdot 1\frac{m}{s^2} = 1\ N.$$

DEFINICIÓN: 1 NEWTON ES LA FUERZA QUE APLICADA A 1 KILOGRAMO-MASA LE IMPRIME UNA ACELERACIÓN DE 1 m/s².

Equivalencia entre newton y kilogramo-fuerza

Sabemos que 1 kg pesa 1 $\vec{kg}$. Si calculamos su peso en N, obtendremos la equivalencia:

$$P = mg = 1\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 = 9{,}8\ N.$$

Luego: $1\ \vec{kg} = 9{,}8\ N$.

Recíprocamente:

$$1\ N = \frac{1}{9{,}8}\ \vec{kg} = 0{,}102\ \vec{kg}.$$

EJ.: *¿Cuántos N son 70 $\vec{kg}$?*

$$1\ \vec{kg} = 9{,}8\ N.$$

$$70\ \vec{kg} = 70 \cdot 9{,}8\ N = 686\ N.$$

EJEMPLO: *¿Cuántos $\vec{kg}$ hay que aplicar a un cuerpo de 20 kg para que adquiera una aceleración de 3 m/s²?*

$$F = ma = 20\ kg \cdot 3\ m/s^2 = 60\ N.$$

Como $1\ N = 0{,}102\ \vec{kg}$:

$$F = 60 \cdot 0{,}102\ \vec{kg} = 6{,}12\ \vec{kg}.$$

Una tercera unidad de fuerza: la dina

Ya hemos visto dos conjuntos, de tres unidades cada uno, tales que si empleamos dos de ellas, la incógnita resulta expresada en la tercera. En rigor de verdad, podríamos formar muchísimos de esos "tercetos", pero los comunes son sólo tres: los dos mencionados y el que veremos ahora.

EJEMPLO: *Calcular la fuerza necesaria para imprimir una aceleración de 20 cm/s² a una masa de 500 g.*

$$F = ma = 500\ g \cdot 20\ cm/s^2 = 10\,000\ g \cdot cm/s^2.$$

La fuerza resulta expresada en $g \cdot cm/s^2$. Es una unidad de fuerza, puesto que es el producto de una unidad de masa por una de aceleración: se la llama *dina*, y la simbolizaremos así: *dyn*.

La dina, el gramo-masa y el cm/s² forman el tercer conjunto.

EJEMPLO: *¿Qué aceleración adquiere un cuerpo de 200 g cuando se le aplica una fuerza de 80 dyn?*

$$a = \frac{F}{m} = \frac{80\ dyn}{200\ g} = 0{,}4\ \frac{dyn}{g} = 0{,}4\ \frac{g \cdot cm/s^2}{g} = 0{,}4\ \frac{cm}{s^2}.$$

EJEMPLO: *Calcular la masa de un cuerpo al que una fuerza de 5 000 dyn le imprime una aceleración de 25 cm/s².*

$$m = \frac{F}{a} = \frac{5\,000\ dyn}{25\ cm/s^2} = 200\ \frac{dyn}{cm/s^2} = 200\ \frac{g \cdot cm/s^2}{cm/s^2} = 200\ g.$$

EJEMPLO: *Calcular la fuerza necesaria para imprimir una aceleración de 1 cm/s² a una masa de 1 g.*

$$F = ma = 1\ g \cdot 1\ cm/s^2 = 1\ dyn.$$

DEFINICIÓN: 1 DINA ES LA FUERZA QUE APLICADA A 1 g LE IMPRIME UNA ACELERACIÓN DE 1 cm/s².

Equivalencias entre las tres unidades de fuerza

Deduzca el alumno por qué:

$$1\ \vec{kg} = 980\,000\ dyn$$

(aproveche la fórmula $P = mg$)

	$\vec{kg}$	N	dyn
$1\ \vec{kg}$	1	9,8	980 000
1 N	0,102	1	100 000
1 dyn	$1{,}02 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	1

Use esta tabla cuando sea necesario pasar de una unidad de fuerza a otra.

	TÉCNICO
Unidades fundamentales	de longitud: m
	de fuerza: $\vec{kg}$
	de tiempo: s

Los nombres de los dos últimos sistemas responden a las iniciales de sus unidades fundamentales.

Los "tercetos" que vimos: ($\vec{kg}$; UT (m); m/s²); (N; kg; m/s²) y (dyn; g; cm/s²), son, pues, unidades de los sistemas técnico, M. K. S. y c. g. s., respectivamente.

No es imprescindible trabajar con unidades de un mismo sistema, pero es sumamente cómodo, pues antes de hacer el cálculo, uno sabe cuál es la unidad en que debe estar expresado el resultado. Si durante aquél se comete un error, las unidades mismas se encargan de revelarlo.

PROBLEMA: *Calcular la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 200 kg que estaba en reposo, le hace recorrer 400 m en 10 segundos.*

Si pretendemos aplicar la fórmula $F = m\,a$, nos encontramos con que desconocemos la aceleración. Pero sabemos que el movimiento que adquiere un cuerpo bajo la acción de una fuerza constante es uniformemente variado, de modo que:

$$d = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \;\therefore\; a = \frac{2\,d}{t^2}.$$

Luego:

$$F = m\,a = m\,\frac{2\,d}{t^2} = 1\,200\ kg\ \frac{2 \cdot 400\ m}{(10^s)^2} = \frac{1\,200 \cdot 2 \cdot 400}{100}\ \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Como todas las unidades son del sistema M. K. S., la fuerza estará expresada en N:

$$F = 9\,600\ N.$$

Empleando la tabla de equivalencias:

$$F = 979{,}2\ \vec{kg} = 9{,}6 \cdot 10^8\ dyn.$$

PROBLEMA: *Sobre un cuerpo de 50 kg se aplica una fuerza de 10 $\vec{kg}$. ¿Qué velocidad alcanza al cabo de 8 segundos?*

Como el movimiento es uniformemente acelerado $v = a\,t$, y por el principio de masa $a = \frac{F}{m}$; luego

$$v = \frac{F}{m} \cdot t = \frac{10\ \vec{kg}}{50\ kg} \cdot 8^s.$$

Los sistemas de unidades

Hemos notado ya, con las fórmulas del principio de masa, que hay unidades que forman como una familia. Eso sucede con todas las fórmulas de la física. Todas las unidades que forman una "familia", en el sentido que hemos visto, constituyen lo que en física se llama un *sistema de unidades.*

Ya hemos verificado cómo, en cualquiera de los tres sistemas que acabamos de estudiar, las unidades nuevas se van formando a partir de las conocidas. El newton, por ejemplo, se forma multiplicando kg por m/s². Más aún: esta última unidad, el m/s², se ha formado con dos unidades conocidas de antes: el metro y el segundo. Los físicos han demostrado que todas las unidades pueden obtenerse a partir de tres, llamadas *fundamentales*; las que se forman a partir de ellas se llaman *derivadas.* Se han inventado varios sistemas de unidades, pero los principales son tres:

M. K. S.	C. G. S.
de longitud: m	de longitud: cm
de masa: kg	de masa: g
de tiempo: s	de tiempo: s

Si efectuamos las operaciones con esas unidades, resulta una velocidad, pero expresada en una unidad a la que no estamos acostumbrados, y que no dice nada a nuestros sentidos. Para obtenerla en *m/s* o en *cm/s*, debemos expresar todas las cantidades en unidades de un mismo sistema:

M. K. S.: $v = \frac{10 \cdot 9{,}8 \text{ N}}{50 \text{ kg}} \cdot 8^s = 15{,}68 \text{ m/s}$.

Técnico: $v = \frac{10 \text{ kg}}{50 \cdot 0{,}102 \text{ UT (m)}} \cdot 8^s = 15{,}68 \text{ m/s}$.

c. g. s.: $v = \frac{10 \cdot 980\,000 \text{ dyn}}{50\,000 \text{ g}} \cdot 8^s = 1568 \text{ cm/s}$.

Densidad

Se llama densidad de una sustancia al cociente entre la masa de un trozo de esa sustancia y el volumen del mismo.

En símbolos: $\delta = \frac{m}{V}$.

Unidades de densidad

Se obtiene como cociente entre la unidad en que se haya medido la masa y la unidad de volumen; las más corrientes son: g/cm³ y kg/dm³.

Ej.: *Calcular la densidad del agua, sabiendo que 5 dm³ tienen una masa de 5 kg.*

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{5 \text{ kg}}{5 \text{ dm}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

Densidad y peso específico

Recordemos que peso específico de una sustancia es el cociente entre el *peso* y el volumen de un trozo de esa sustancia. Resulta así:

$$\boxed{\varrho = \frac{P}{V}} \quad \text{y} \quad \boxed{\delta = \frac{m}{V}}$$

Es evidente, al observar estas fórmulas, que entre densidad y peso específico hay la misma diferencia que entre masa y peso. En efecto:

$$\varrho = \frac{P}{V} = \frac{m\,g}{V} = \frac{m}{V} g \quad \therefore \quad \boxed{\varrho = \delta\, g}$$

Ej.: *Calcular la densidad y el peso específico del hierro, sabiendo que un trozo de 2 dm³ tiene una masa de 15,60 kg. Realizar el cálculo para los siguientes lugares:* a) *uno de los polos;* b) *sobre el ecuador;* c) *a 45° de latitud y al nivel del mar;* d) *en la Luna.*

a) En uno de los polos $\left(g' = 9{,}83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$:

$$\delta' = \frac{m}{V} = \frac{15{,}6 \text{ kg}}{2 \text{ dm}^3} = 7{,}80 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \ldots\ldots \delta' = 7{,}80 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$\varrho' = \frac{P}{V} = \frac{m\,g'}{V} = \frac{15{,}6 \text{ kg} \times 9{,}83 \text{ m/s}^2}{2 \text{ dm}^3} = 76{,}67 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3} \ldots\ldots \varrho' = 7{,}82 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

b) En el ecuador $\left(g'' = 9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$:

δ no ha variado $\ldots\ldots \delta'' = 7{,}80 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

$$\varrho'' = \delta\, g'' = 7{,}80 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \times 9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 76{,}28 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3} \ldots\ldots \varrho'' = 7{,}78 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

c) A 45° y al nivel del mar $\left(g = 9{,}80 \frac{m}{s^2} \right)$:

δ no ha variado ..... $\delta = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$

$\varrho = \delta g = 7{,}80 \times 9{,}80 \frac{N}{dm^3} = 76{,}44 \frac{N}{dm^3}$ ..... $\varrho = 7{,}80 \frac{\vec{kg}}{dm^3}$.

d) En la Luna $\left(g_L = 1{,}67 \frac{m}{s^2} \right)$:

δ no ha variado ..... $\delta_L = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$

$\varrho_L = \delta g_L = 7{,}80 \times 1{,}67 \frac{N}{dm^3} = 13{,}03 \frac{N}{dm^3}$ ..... $\varrho_L = 1{,}33 \frac{\vec{kg}}{dm^3}$.

Obsérvese cómo, mientras la densidad se mantiene constante, el peso específico varía según el lugar donde se lo mida. Hay otra observación interesante en este problema: si se expresan el peso específico y la densidad en un mismo sistema de unidades, por ejemplo, el M. K. S., la diferencia entre ambos resalta más aún. En efecto, hemos obtenido:

a) $\delta' = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$ $\quad \varrho' = 76{,}67 \frac{N}{dm^3}$

b) $\delta'' = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$ $\quad \varrho'' = 76{,}28 \frac{N}{dm^3}$

c) $\delta = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$ $\quad \varrho = 76{,}44 \frac{N}{dm^3}$

d) $\delta_L = 7{,}80 \frac{kg}{dm^3}$ $\quad \varrho_L = 13{,}03 \frac{N}{dm^3}$

Cómo se mide una densidad

Para ello es necesario medir la masa y el volumen del cuerpo considerado. La masa se mide con la balanza, y el volumen se determina por cualquiera de los métodos indicados cuando se estudió peso específico; por ejemplo: aprovechando el principio de Arquímedes.

Peso específico y densidad de la Tierra

Se llama peso de un cuerpo a la fuerza con que lo atrae la Tierra; si lo dividimos por su volumen, obtendremos su peso específico. Para determinar el peso específico de la Tierra habrá que saber cuánto pesa, y dividir por su volumen. Pero, ¿qué quiere decir peso de la Tierra? ¿Fuerza con

que la Tierra atrae a ... la Tierra? Esto no tiene sentido. Por lo tanto, *tampoco tiene sentido hablar de peso específico de la Tierra.*

En cambio, sí lo tiene hablar de densidad de la Tierra, pues ésta tiene una masa (cantidad de material) determinada, y un volumen también determinado. La densidad media de la Tierra es de, aproximadamente, 5,5 kg/dm³; la del Sol, 1,4 kg/dm³.

Problemas

1. ¿Cuánto pesa en el Sol un cuerpo de 100 kg de masa? ¿Y en la Luna?

R.: $\cong 2\,800\ \vec{kg}$; $17\ \vec{kg}$

2. ¿Qué aceleración adquiere un cuerpo de 10 kg por acción de una $F = 10\ \vec{kg}$?

R.: $9{,}8\ \frac{m}{s^2}$

3. Si la fuerza anterior actúa durante 10 s, ¿qué distancia recorre el cuerpo? ¿Qué velocidad final alcanza?

R.: $= 490$ m; $98\ \frac{m}{s}$

4. Expresar en todas las unidades el valor de una fuerza que actuando sobre un cuerpo que pesa 98 dyn le hace recorrer 10 cm en 2 s?

R.: $F = 0{,}5$ dyn $= 5 \times 10^{-6}$ N $= 51 \times 10^{-3}\ \vec{kg}$

5. ¿Qué fuerza, en N, habrá que aplicar, durante 3 s, a un cuerpo de 10 UT (m) para que su velocidad llegue a 30 cm/s?

R.: 9,8 N

6. ¿Cuál es la densidad y el peso específico del agua en la Luna?

R.: $1\ \frac{kg}{dm^3}$; $0{,}17\ \frac{\vec{kg}}{dm^3}$

7. ¿Cuál es la densidad de un cuerpo que pesa $80\ \vec{g}$ en el aire, y recibe un empuje de $10\ \vec{g}$ en el agua? ¿Cuál es su peso específico, en el sistema e.g.s.?

R.: $8\ \frac{g}{cm^3}$; $7\,840\ \frac{dyn}{cm^3}$

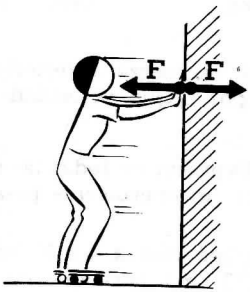
8. Un bloque de hierro de 10 cm por 20 cm por 5 cm es empujado por una $F = 15{,}6$ N. ¿Qué aceleración adquiere? ¿Qué distancia recorre en 1 minuto?

R.: $2\ \frac{m}{s^2}$; 3 600 m

15 EL PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

1) Cuando se dispara un arma de fuego, ésta retrocede ("culatazo").

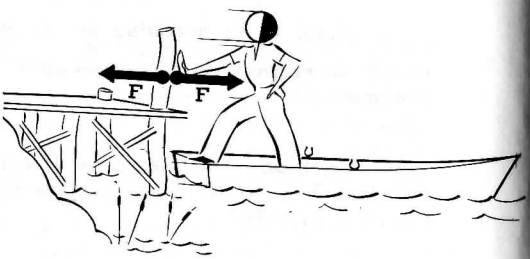
2) Si un patinador hace fuerza contra una pared, retrocede *como si la pared lo hubiera empujado a él.*



3) Cuando un botero quiere alejarse de la orilla, apoya el remo en ella y hace fuerza hacia adelante. El bote retrocede *como si lo hubieran empujado desde la orilla.*

4) Si se cuelga una pesa de un resorte, éste tira hacia arriba y equilibra el peso del cuerpo, que está dirigido hacia abajo. Si con un dinamómetro medimos el peso, y luego la fuerza que hace el resorte al estirarse, comprobaremos que *son iguales.*

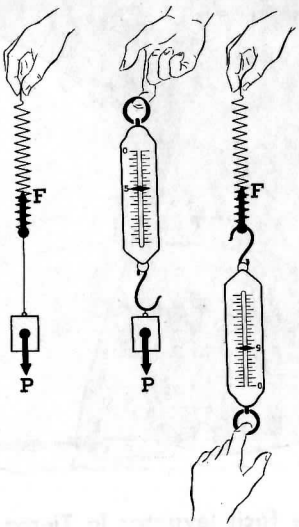
Estos ejemplos muestran que

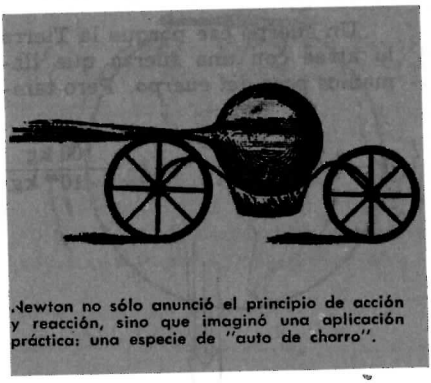


Principio de acción y reacción: siempre que un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro, éste reacciona con una fuerza igual y opuesta, aplicada sobre el primero.

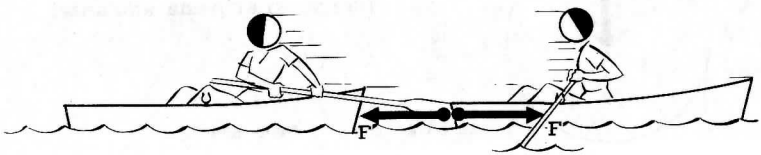
Éste es el tercer principio de la Dinámica, también enunciado por Newton. Su validez es absolutamente general, sean cuales fueren los cuerpos de que se trate, sólidos, líquidos o gases, y estén en reposo o en movimiento.

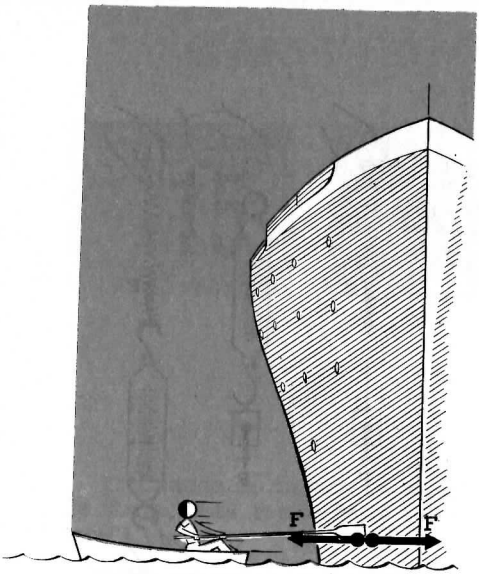
En muchos casos, el principio es evidente, como en el del resorte. En otros, en cambio, la reacción está más o menos escondida. En efecto: imaginemos que estamos en un bote y que con un remo aplicamos una fuerza contra un madero que está flotando. La acción: la fuerza aplicada al madero; la reacción... no la percibimos; ¡pero existe! Imaginemos que no es ya un madero donde apoyamos el remo, sino un bote de tamaño semejante al nuestro. Ahora sí advertimos la reacción, pues nuestro bote se mueve tanto como el otro, y en sentido contrario al de aquél. Supongamos ahora que estamos al lado de un transatlántico, y que en él apoyamos el remo; no advertiremos que se mueva, mientras que nuestro bote retrocede visiblemente. ¡Ahora, es la acción la que pasa inadvertida! Pero el hecho de que no advirtamos una u otra no significa que no existan ambas en todos los casos. Lo que sucede es muy sencillo: son dos fuerzas iguales aplicadas a cuerpos de masas muy diferentes, de modo que las aceleraciones que provocan son también muy distintas, y la del cuerpo de mayor masa puede pasar inadvertida por su pequeñez.





Newton no sólo anunció el principio de acción y reacción, sino que imaginó una aplicación práctica: una especie de "auto de chorro".





Es fácil levantar la Tierra . . .

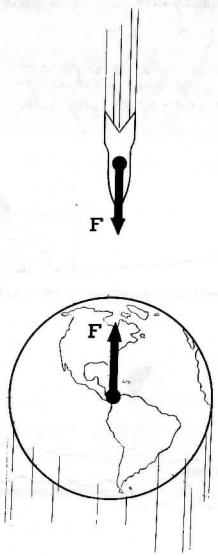
Un cuerpo cae porque la Tierra lo atrae con una fuerza que llamamos *peso del cuerpo*. Pero también éste atrae a la Tierra con una fuerza igual y contraria, y si bien el cuerpo cae hacia la Tierra, ésta sube hacia el cuerpo, aunque su movimiento es imperceptible. Comprobémoslo con un ejemplo: desde 50 000 metros de altura cae un cuerpo de 100 kg. Tardará en caer (admitimos que su movimiento sea uniformemente variado):

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,000\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} \cong 100^{\text{s}}.$$

Durante todo ese tiempo estuvo aplicada a la Tierra una fuerza de $100\ \vec{\text{kg}}$, que le imprime una aceleración $a = F/m$, donde m es la masa de la Tierra, aproximadamente igual a $6 \cdot 10^{24}$ kg. Recorre, pues, una distancia:

$$d = \tfrac{1}{2}\,at^2 = \tfrac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{100\ \vec{\text{kg}}}{6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} \cdot (100^{\text{s}})^2$$

$$\cong 10^{-18}\,m \cong 1 \text{ billonésimo de micrón}.$$



La bomba cae y la Tierra sube.

A cada paso que damos, la Tierra retrocede

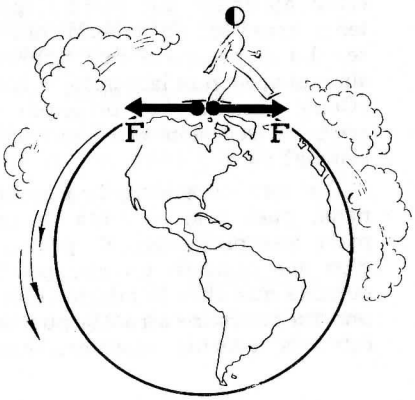
Es el mismo caso de esos equilibristas de circo (a veces focas amaestradas) que caminan sobre un gran globo: el equilibrista marcha hacia adelante, mientras que el globo retrocede rodando. Cuando caminamos, con el pie hacemos fuerza hacia atrás (acción), y la Tierra reacciona aplicándonos una fuerza igual hacia adelante.

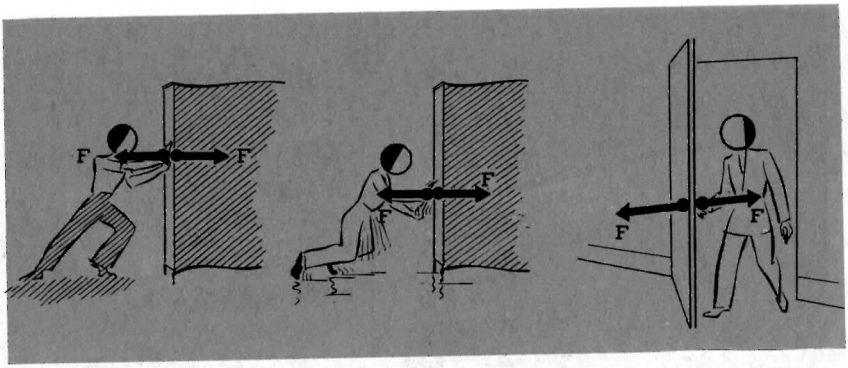
Un ejemplo "difícil"

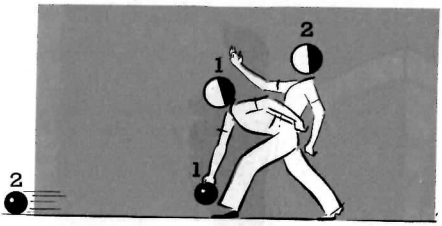
"Yo tengo una masa de aproximadamente 70 kg. Si empujo un mueble de unos 70 kg, y el piso no está resbaladizo, no encuentro dificultad en moverlo, pero no advierto en ningún momento la reacción de que habla el famoso principio. Sin embargo, en los ejemplos del bote quedamos de acuerdo en que cuando las masas de los cuerpos en juego son del mismo orden, se advierte fácilmente el movimiento de los dos." Ésta es una de las objeciones más frecuentes.

El quid de la cuestión está en que, como *el piso no es resbaladizo*, los pies "se adhieren" a él de tal manera, que el cuerpo del hombre y todo el planeta Tierra forman una sola masa. La acción se aplica al mueble y le imprime una aceleración que hace perceptible su movimiento; la reacción se aplica a un cuerpo cuya masa es la suma de la masa del que empuja y la masa de la Tierra: su movimiento (que existe) es imperceptible.

Si el piso está resbaladizo, el cuerpo del hombre no logra adherirse a la Tierra, y entonces la fuerza de reacción, aplicada a una masa pequeña, logra moverla perceptiblemente.







Otro ejemplo aclarado

Para abrir una puerta se le aplica una fuerza. A esa acción debe corresponder una reacción igual y opuesta. Por lo tanto, suele objetarse, como sobre la puerta están aplicadas *dos fuerzas* iguales y opuestas, no debería moverse. La experiencia nos muestra, sin embargo, que la puerta se abre. ¿Cómo conciliar el principio de acción y reacción con esta experiencia?

No hay necesidad de conciliar nada, pues sólo se trata de una mala interpretación. El principio dice que cuando un cuerpo (la persona que abre la puerta) ejerce una fuerza sobre otro (la puerta), éste (la puerta) reacciona ejerciendo una fuerza igual y opuesta *sobre el primero* (la persona). De modo que no hay dos fuerzas aplicadas en la puerta, sino dos fuerzas iguales aplicadas UNA EN LA PUERTA Y OTRA EN EL QUE LA ABRE.

EJ.: *Sobre un lago helado está de pie un hombre. iene en la mano una piedra de 1 kg, que arroja aplicándole durante 0,5 segundo una fuerza de 10 $\vec{kg}$. Calcular la velocidad con que sale la piedra, y la velocidad con que retrocede el hombre, cuya masa es de 60 kg.*

Velocidad de la piedra. La fuerza de 10 $\vec{kg}$, aplicada a la masa de 1 kg de la piedra, le imprime una aceleración:

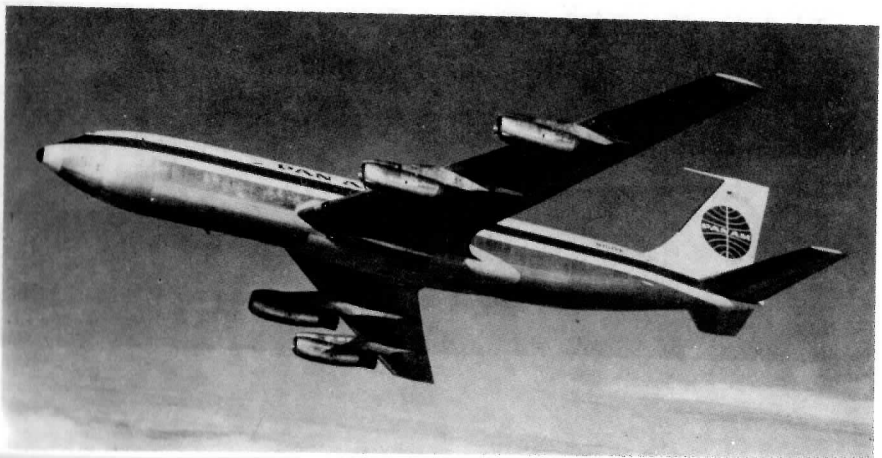
$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{10\ \vec{kg}}{1\ kg} = \frac{10 \cdot 9{,}8\ N}{1\ kg} = 98\ \frac{m}{s^2}.$$

Como esa aceleración dura 0,5 segundo, al cabo de ellos la velocidad alcanzada es de:

$$v_1 = a_1\, t = 98\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5^s = 49\ \frac{m}{s}.$$

Velocidad del hombre. La piedra reacciona aplicando sobre el

Avión de retropropulsión.



hombre una fuerza de 10 kg. Aplicada a la masa de 60 kg, le imprime una aceleración:

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{10 \cdot 9{,}8\ N}{60\ kg} = 1{,}63\ \frac{m}{s^2}.$$

Al cabo de los 0,5 segundos, la velocidad alcanzada es:

$$v_2 = a_2 t = 1{,}63\ \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5^s = 0{,}815\ \frac{m}{s}.$$

Impulso y cantidad de movimiento

El principio de acción y reacción nos dice que cuando un cuerpo de masa m_1 actúa sobre otro de masa m_2, entonces:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \text{ o bien: } \overrightarrow{m_1 a_1} = -\overrightarrow{m_2 a_2}$$

Si la interacción dura un lapso Δt, y durante él las fuerzas han sido constantes, podemos escribir:

$$\vec{F}_{21} \cdot \Delta t = -\vec{F}_{12} \cdot \Delta t;$$

o bien:

$$\overrightarrow{m_1 a_1} \cdot \Delta t = -\overrightarrow{m_2 a_2} \cdot \Delta t$$

es decir

$$m_1 \cdot \vec{\Delta} v_1 = -m_2 \cdot \vec{\Delta} v_2$$

Para cada masa, entonces, podemos decir:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{\Delta} v$$

es decir que la aplicación de la fuerza durante el lapso Δt se traduce en un cambio de la velocidad de la masa m. La importancia de estos productos ha hecho que se les dé un nombre especial a cada uno:

Definición de impulso

Se llama impulso $\vec{I}$ aplicado por una fuerza $\vec{F}$ durante un lapso Δt al producto de la fuerza por el lapso en que estuvo aplicada. En símbolos:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

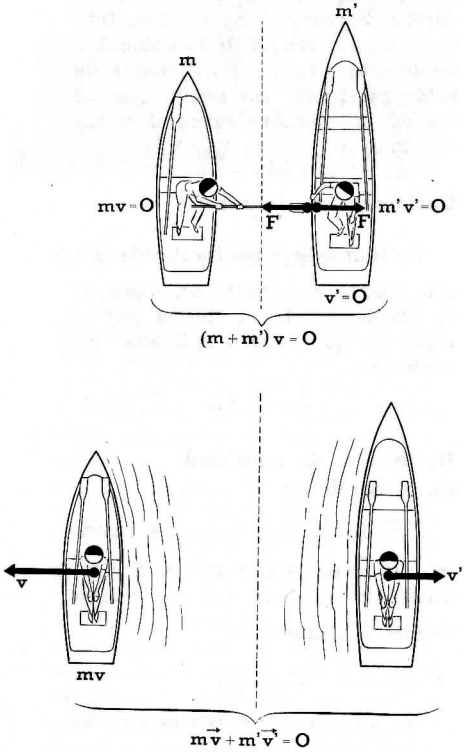
Definición de cantidad de movimiento

Se llama cantidad de movimiento $\vec{p}$ de una masa m al producto de su masa por su velocidad $\vec{v}$. En símbolos:

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Si un cuerpo experimenta un cambio $\vec{\Delta} v$ de su velocidad, entonces su cantidad de movimiento

El impulso de la fuerza imprime a la pelota una cierta cantidad de movimiento.



experimenta un cambio $\Delta \vec{p}$

$$\Delta \vec{p} = m \, \Delta \vec{v}$$

Con estas definiciones podemos expresar los resultados anteriores diciendo que *el impulso aplicado por una fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento que entonces experimenta el cuerpo*. En símbolos:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

La conservación de la cantidad de movimiento

Repitamos la expresión anterior:

$$m_1 \cdot \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \, \Delta \vec{v}_2$$

Con la definición de cantidad de movimiento ahora resulta

$$\Delta \vec{p}_1 = p - \Delta \vec{p}_2 \text{ o sea } \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

Esta expresión nos dice que cuando dos cuerpos interactúan entre sí, sea cual fuere la fuerza con que lo hagan, se provocan entre sí variaciones de cantidad de movimiento tales que su suma es nula. Entonces, si a la suma de las cantidades de movimiento la llamamos *cantidad de movimiento del sistema*, la expresión obtenida nos dice que la *interacción de dos masas no provoca ninguna variación de la cantidad de movimiento del sistema.*

Dicho de otra manera: *la cantidad de movimiento de un sistema aislado es constante.*

Éste es un resultado muy importante, porque sea cual fuere el problema que enfrentemos, de antemano sabemos que cuando se trata de dos cuerpos aislados que sólo interactúan entre sí, la suma de sus cantidades de movimiento es constante, aunque cada una varíe por su lado.

Consideremos dos cuerpos, de masas m y m', que están en reposo. El sistema formado por los dos, de masa $(m + m')$, tiene una cantidad de movimiento nula, pues su velocidad es nula:

$$(m + m') \, \vec{v} = 0 \qquad \text{(pues } \vec{v} = 0\text{)}.$$

Las masas m y m' pueden ser, por ejemplo, las de dos botes detenidos en medio de un río. Supongamos que el cuerpo de masa m aplica sobre el de masa m'

una fuerza F durante un tiempo t: le comunica así un impulso I, que le hace adquirir una cantidad de movimiento p':

$$\vec{I} = m' \vec{v}'.$$

La cantidad de movimiento del sistema, sobre el que no ha actuado una fuerza exterior, sino interior (sistema aislado), se ha mantenido constante.

$$\boxed{m \vec{v} + m' \vec{v}' = 0\,.}$$

Conociendo m, m' y v' se puede calcular v.

La cantidad de movimiento de cada cuerpo, considerados uno separado del otro, sí ha experimentado una variación, porque ha estado actuando una fuerza que es exterior a cada uno, pero que es interior para el sistema.

Composición de cantidades de movimiento

Consideremos que los dos botes del ejemplo anterior navegan paralelamente por el río, con la misma velocidad v. Cada uno tiene, pues, una cantidad de movimiento distinta de cero:

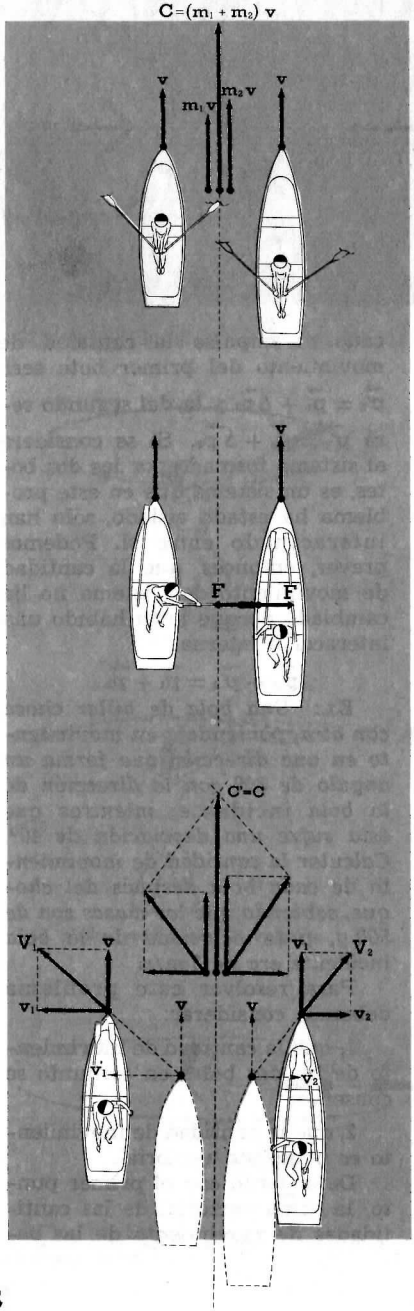
el primero tiene $p_1 = m_1 \vec{v}$;

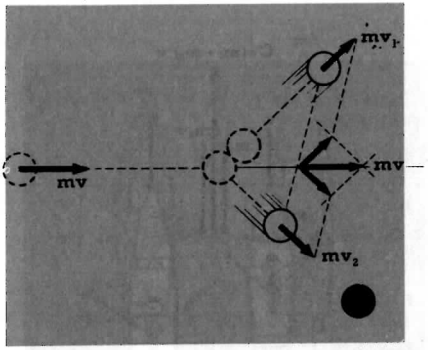
el segundo $p_2 = m_2 \vec{v}$.

Si en un instante dado desde el primer bote se aplica un impulso sobre el segundo, la cantidad de éste cambiará en $\Delta \vec{p}_2$; pero también cambiará la del primero en $\Delta \vec{p}_1$ de tal manera que

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0\,.$$

Como las cantidades de movimiento son vectores, se las compone como tales, y después de apli-





cado el impulso la cantidad de movimiento del primer bote será $\vec{p'}_1 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1$ y la del segundo será $\vec{p'}_2 = \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_2$. Si se considera el sistema formado por los dos botes, es un sistema que en este problema ha estado aislado, sólo han interactuado entre sí. Podemos prever, entonces, que la cantidad de movimiento del sistema no ha cambiado porque haya habido una interacción interna.

$$\vec{p'}_1 + \vec{p'}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

EJ.: *Una bola de billar choca con otra, poniéndola en movimiento en una dirección que forma un ángulo de 30° con la dirección de la bola incidente, mientras que ésta sufre una desviación de 40°. Calcular la cantidad de movimiento de cada bola después del choque, sabiendo que las masas son de 500 g, y la velocidad de la bola incidente era de 2 m/s.*

Para resolver este problema debemos considerar:

1, que la cantidad de movimiento de las dos bolas en conjunto se conserva;

2, que la cantidad de movimiento es magnitud vectorial.

De acuerdo con el primer punto, la suma vectorial de las cantidades de movimiento de las bolas, después del choque, debe ser igual a la cantidad de movimiento de la bola incidente. Se trata, pues, de una descomposición de un vector en dos direcciones dadas. Cada componente se calcula de acuerdo con la escala.

Una nueva definición de fuerza

De las definiciones anteriores resulta

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$$

lo cual concuerda –por supuesto– con lo dicho en la pág. 146: fuerza es todo aquello que puede modificar la velocidad de un cuerpo. Pero escrito de esta manera:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

se tiene una nueva definición, muy clara: *la fuerza aplicada a un cuerpo es la rapidez con que cambia su cantidad de movimiento.*

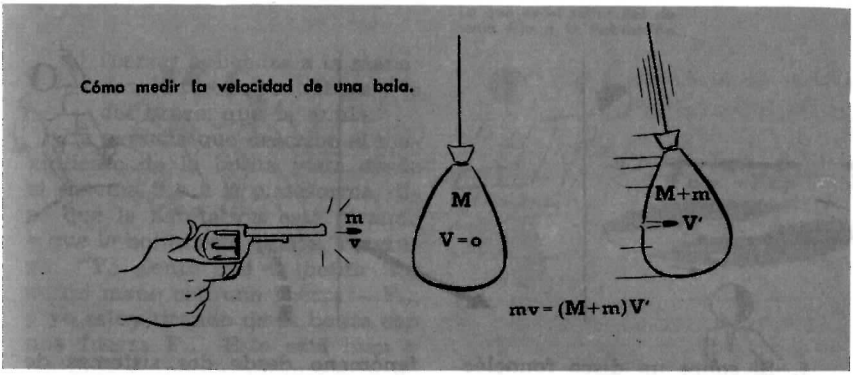
Medición de la velocidad de un proyectil

Una de las maneras de medir la velocidad de un proyectil de pistola o rifle es la siguiente: se dispara el proyectil contra un cuerpo de masa unas 1 000 veces mayor, que está suspendido de un modo que pueda oscilar (puede ser, por ejemplo, una bolsita de arena).

La cantidad de movimiento del sistema es la misma antes y después del impacto:

$$m\,v = (m + \mathrm{M})\,\mathrm{V}' \quad \therefore \quad v = \frac{m + \mathrm{M}}{m}\,\mathrm{V}'.$$

Se miden las masas del proyectil y del blanco, y la velocidad V' de éste después del impacto; la fórmula permite el cálculo de v.



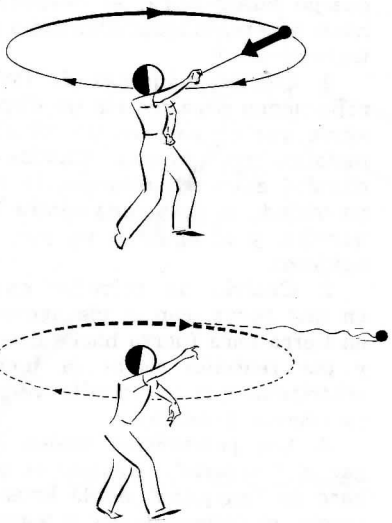
Las fuerzas centrípeta y centrífuga

Cuando se revolea una piedra sujeta por un hilo, es necesaria una fuerza para obligarla a describir una trayectoria circular. Si se rompe o se suelta el hilo, la piedra sigue en línea recta (prescindimos de la gravedad), en la dirección de la tangente. Cumple así con el principio de inercia: como nada la obliga a cambiar, se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Precisamente, para cambiar este movimiento en uno circular, es necesaria la utilización de una fuerza que, por estar dirigida hacia el centro de la circunferencia, se llama *fuerza centrípeta.*

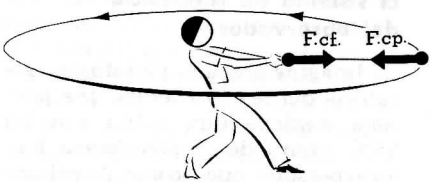
Es el mismo caso de un automóvil que entra en una curva: si no se lo obliga, aplicándole una fuerza centrípeta por medio del volante, el vehículo sigue en línea recta.

Pero, puesto que se aplica una fuerza (acción), el cuerpo reacciona aplicando sobre quien ejerce la fuerza centrípeta una fuerza (reacción) igual y opuesta, es decir, dirigida desde el centro hacia afuera: es la *fuerza centrífuga.*

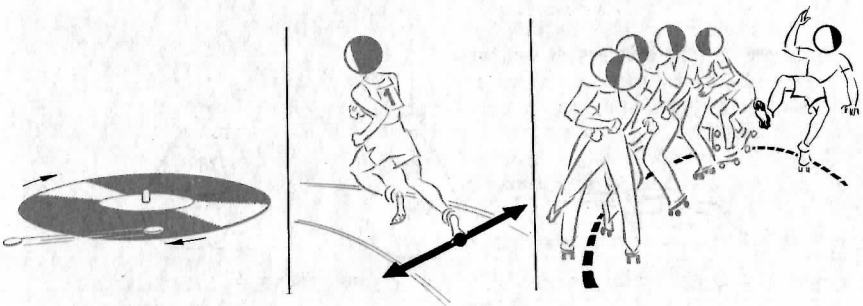
Tenemos innumerables ejemplos en la vida diaria:



La piedra escapa por la tangente.



La fuerza centrífuga la soporta el hombre; la centrípeta, la piedra.



1. Si sobre un disco fonoeléctrico se coloca una moneda o un cuerpo cualquiera, es despedido hacia afuera, tangencialmente a su trayectoria.

2. Ciertas máquinas de lavar ropa tienen para secarla un dispositivo que consiste en un cilindro metálico con agujeros. Cuando el cilindro entra en rotación, la ropa mojada es despedida contra las paredes, y el agua se va por los agujeros.

3. Cuando un corredor entra en una curva, con el pie apoyado en tierra hace fuerza hacia afuera, y por reacción recibe la fuerza centrípeta, que le permite vencer su inercia y doblar.

4. Los patinadores suelen jugar al "trencito". Cuando el que hace de "máquina" dobla bruscamente, el último de los integrantes de la fila es despedido con bastante violencia.

El sistema de referencia del observador

Imaginemos una plataforma giratoria desde cuyo centro una persona sostiene una bolita con un hilo. Fuera de la plataforma hay otra persona que –como la primera– observa lo que ocurre. Veamos cómo se describe un mismo fenómeno desde dos sistemas de referencia distintos: uno fijo a las paredes de la habitación, y el otro fijo a la plataforma giratoria.

La persona que describe el movimiento de la bolita visto desde el sistema fijo a la habitación dice que hay una plataforma girando que lleva consigo a la bolita; que si se la dejara sola (principio de inercia) la bolita se movería en línea recta y con velocidad constante, y se escaparía de la plataforma. Pero la bolita está ligada (recibe una fuerza) a la plataforma por un hilo que la obliga a describir una circunferencia. Nada tiene de extraño que al recibir una fuerza (centrípeta) la bolita adquiera una aceleración (centrípeta), que es la que permanentemente cambia la velocidad (su dirección), como lo establece el principio de masa. Claro está que así como la mano tira de la bolita con la fuerza centrípeta, la bolita tira de la mano con una fuerza igual y opuesta (principio de acción y reacción), $-F_{cp}$.

En resumen, desde el primer sistema de coordenadas se observa:

a) estado de movimiento de la bolita: *circular uniforme*;

b) fuerzas aplicadas a la bolita: *una sola, la fuerza centrípeta*;

c) fuerzas aplicadas a la mano: dos, la fuerza centrífuga y la del brazo, que la anula.

La persona que describe el movimiento de la bolita visto desde el sistema fijo a la plataforma, dice que la habitación está girando y que la bolita está quieta. Y agrega: "Yo siento que la bolita tira de mi mano con una fuerza $-F_{cp}$, y yo estoy tirando de la bolita con una fuerza F_{cp}. Esto está bien y me deja tranquilo porque está de acuerdo con el principio de acción y reacción. Pero el principio de masa me dice que si sobre la bolita actúa una fuerza, debe adquirir una aceleración... ¡pero yo no veo moverse a la bolita, que siempre ocupa la misma posición en mi sistema de referencia! Como yo tengo plena fe en los principios de la dinámica, el único remedio que queda para que no se derrumben es admitir que (aunque yo no veo nada más que mi fuerza F_{cp} aplicada a la bolita) sobre la bolita está actuando otra fuerza igual y opuesta a F_{cp}, que anula a ésta y mantiene a la bolita en reposo en mi sistema: es la *fuerza centrífuga* F_{cf}".

En resumen, desde el segundo sistema de coordenadas se observa:

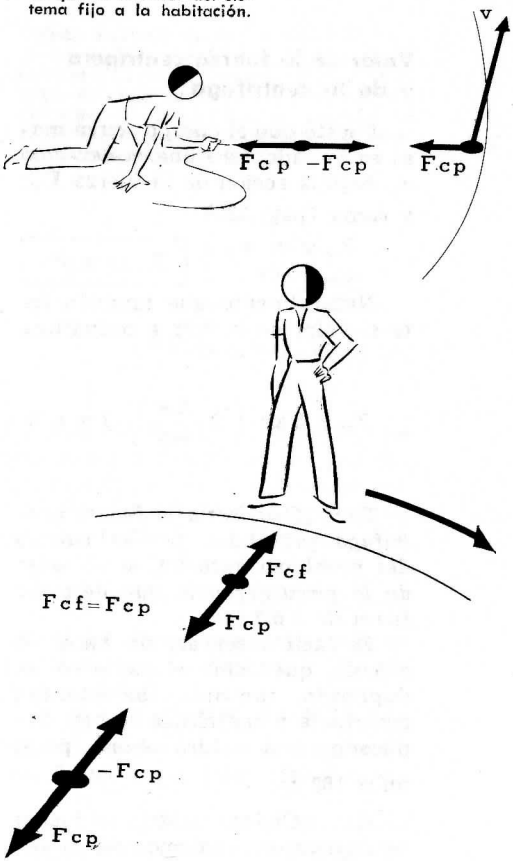
a) estado de movimiento de la bolita: *está en reposo*;
b) fuerzas aplicadas a la bolita: *dos, la centrípeta y la centrífuga*;
c) fuerzas aplicadas a la mano: *dos, la fuerza centrífuga y la del brazo, que la anula.*

Como se ve, sobre la bolita actúa una *sola fuerza* o bien *dos fuerzas*, según desde donde se la mire (desde qué sistema). Obsérvese la importancia que tiene, entonces, el sistema desde el cual se describe un fenómeno físico.

A veces se prefiere llamar *fuerza centrífuga* solamente a la que aparece sobre la bolita y se deja sin nombre a la fuerza de reacción $-F_{cp}$ que aparece sobre la mano del que sostiene el hilo.

Creemos que, entendido bien el punto, no hay inconveniente en llamar también fuerza centrífuga a la que soporta la mano (sea cual fuere el sistema de coordenadas elegido para describir el fenómeno físico).

Lo que ve el señor del sistema fijo a la habitación.



Lo que ve el señor de la plataforma.

Valor de la fuerza centrípeta y de la centrífuga

Puesto que el cuerpo –cuya masa es m– adquiere una aceleración a_{cp} bajo la acción de la fuerza F_{cp}: y como (pág. 137):

$$\left.\begin{aligned} F_{cp} &= m \cdot a_{cp} \\ a_{cp} &= \omega^2 r \end{aligned}\right\} \quad \boxed{F_{cp} = m\,\omega^2 r}$$

Naturalmente que también ése es el valor de la fuerza centrífuga.

EJ.: *Calcular la fuerza centrípeta a que está sometido un cuerpo de 5 kg que describe una circunferencia de 1 m de radio a razón de 2 vueltas por segundo.*

$$F_{cp} = m\,\omega^2 r = 5\ \text{kg} \cdot \left(2\ \frac{\text{vueltas}}{\text{seg}}\right)^2 \cdot 1\ \text{m}.$$

Hay que expresar ω en "radianes por segundo"; como 1 vuelta $= 2\,\pi$ radianes:

$$F_{cp} = 5\ \text{kg} \cdot \left(2\ \frac{2\,\pi}{\text{seg}}\right)^2 \cdot 1\ \text{m} = 5 \times 16\,\pi^2 \times 1\ \frac{s^2}{kg\ m} = 790\ \text{N} \cong 81\ \vec{\text{kg}}.$$

EJ.: *¿Cuál sería la fuerza centrífuga provocada por el cuerpo del problema anterior, si el radio de la circunferencia que describe fuera de 2 m?*

Es fácil observar, sin hacer el cálculo, que como el radio se ha duplicado, también las fuerzas centrípeta y centrífuga se han duplicado; ésta valdrá ahora, pues, unos 162 $\vec{\text{kg}}$.

EJ.: *¿Cuánto valdría la fuerza centrífuga, si el mismo cuerpo rotara a razón de 4 vueltas por segundo?*

Ahora ha variado la velocidad angular, que se ha hecho doble; como en la fórmula figura con exponente 2, una variación de 1 a 2, o de 1 a 3, o de 1 a n en la velocidad angular, provoca una variación de 1 a 4, o de 1 a 9, o de 1 a n^2 en la fuerza centrífuga. En nuestro caso, la fuerza centrífuga se habrá hecho 4 veces mayor, es decir, valdrá unos 320 kg. Comprobémoslo con el cálculo:

$$F_{cp} = m\,\omega^2 r = 5\ \text{kg}\left(4\ \frac{2\,\pi}{\text{seg}}\right)^2 \cdot 1\ \text{m} = 5 \times 16 \times 4\pi^2 \times 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{s^2}\ F_{cp} \cong 322\ \vec{\text{kg}}.$$

EJ.: *¿Cuánto valdría la fuerza centrífuga si un cuerpo de 10 kg describe una circunferencia de 1 m de radio a razón de 2 vueltas por segundo?*

Si ahora es una masa doble, la fuerza centrífuga, en igualdad de las demás condiciones, será también doble.

La aceleración de la gravedad y la rotación de la Tierra

La aceleración de la gravedad es máxima en los polos, y va disminuyendo a medida que nos acercamos al ecuador. Dimos como razón de esas variaciones el que la Tierra no es esférica, sino achatada en los polos, de modo que en ellos la distancia al centro de la Tierra es menor que en cualquier otra latitud. Pero hay otra razón más: la rotación de la

Tierra. Como consecuencia de ésta, todo cuerpo colocado en la superficie de la Tierra está sometido a una aceleración centrífuga (considerando al observador y su sistema de referencia fijos a la Tierra), que contribuye a la disminución del valor de g. La aceleración centrífuga es tanto mayor cuanto más cerca del ecuador se la considere, y en él adquiere su valor máximo, por ser máximo el radio de la circunferencia que describe. En los polos, en cambio, la aceleración centrífuga es nula, por tratarse de puntos del eje de rotación.

Problemas

1. Un cuerpo que pesa $10\ \vec{kg}$ está suspendido por un resorte, del techo de un ascensor. ¿Qué fuerza actúa sobre el resorte en los siguientes casos: *a)* Cuando el ascensor está en reposo; *b)* cuando sube con movimiento uniforme de $v = 20$ m/s; *c)* ídem cuando baja con esa misma v; *d)* cuando sube con aceleración constante de 1,2 m/s^2; *e)* ídem cuando baja con esa misma a.

R.: *a)* $11\ \vec{kg}$; *b)* $10\ \vec{kg}$; *c)* $10\ \vec{kg}$; *d)* $11{,}19\ \vec{kg}$; *e)* $8{,}8\ \vec{kg}$

2. Dos masas $m_1 = 20$ g y $m_2 = 30$ g están atadas a los extremos de una cuerda que pasa por una roldana. ¿Con qué aceleración se mueve el conjunto, y qué fuerza actúa sobre la cuerda?

R.: $a = 196$ cm/s^2; $F = 24\,520$ dinas

3. Un fusil dispara 20 balas por segundo sobre un blanco. La masa de cada bala es 10 g y la velocidad final 75 000 cm/s. ¿Qué fuerza actúa sobre el blanco?

R.: $15{,}3\ \vec{kg}$

4. Dos esferas de acero, de igual radio y masas 700 y 300 gramos, se mueven sobre un plano horizontal con velocidades 6 y 4 m/s. ¿Cuáles serán sus velocidades después del choque si se movían en el mismo sentido?; ¿cuáles si se movían en sentidos contrarios?

R.: *a)* 4,8 m/s; 6,8 m/s. *b)* 10 m/s; 0 m/s

5. Se hace girar un balde con agua en un plano vertical describiendo una circunferencia de 60 cm de radio. Calcular las velocidades tangencial y angular mínimas para que el agua no se derrame.

R.: 4,04 l/s; 2,4 m/s

6. Un ciclista describe, a 20 km/h, una curva de 30 m de radio. ¿Cuánto debe inclinarse para no caer?

R.: 6°

7. Un cuerpo colocado en el Ecuador Terrestre describe en un día una circunferencia de unos 6 700 km de radio. Calcular F_c si la masa del cuerpo era de 70 kg.

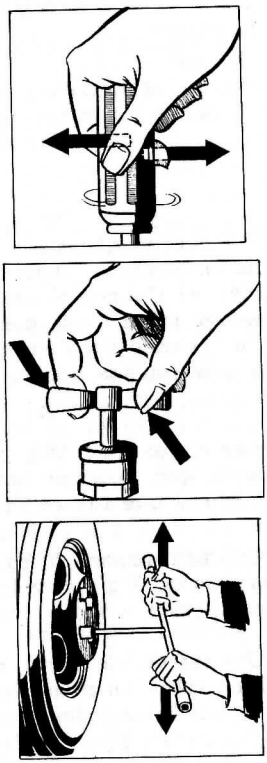
R.: 2,5 N; $0{,}25\ \vec{kg}$

16 DINÁMICA DE LAS ROTACIONES

¿Quién produce las rotaciones?

Para abrir una canilla, para hacer girar un destornillador, un tirabuzón, etc., se aplica un *par de fuerzas* paralelas entre sí y de sentidos opuestos. En cada caso, pues, la rotación es producida por un par de fuerzas.

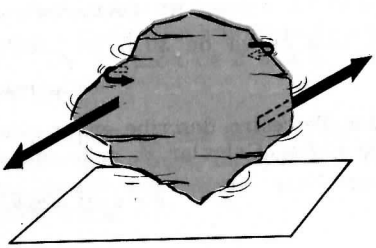
Puede objetarse que para abrir una puerta se aplica una fuerza, una sola, y que sin embargo la rotación se produce. Es verdad... pero hasta cierto punto. A la puerta se le aplica una fuerza F; la puerta aplica esa misma fuerza F (la transmite) a los goznes, y éstos reaccionan aplicando a la puerta una fuerza igual y opuesta $-F$. Y ahí tenemos a la puerta sometida a un par de fuerzas, F y $-F$.



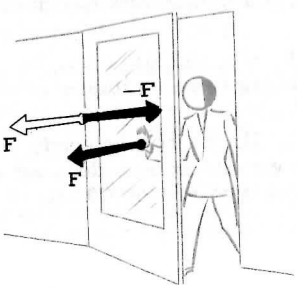
Cupla

Se llama cupla, a un par de fuerzas paralelas, de sentidos con-

Si se produce una rotación, hay una cupla responsable de ella.

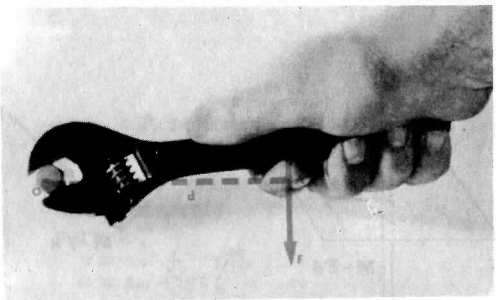


Una cupla "escondida".



trarios y de igual intensidad, aplicadas a un mismo cuerpo.

Siempre que se produzca la rotación de un cuerpo, hay una cupla responsable de esa rotación. Podrá la cupla estar más o menos escondida, pero la conclusión es inexorable: SI SE PRODUCE UNA ROTACIÓN, HAY UNA CUPLA RESPONSABLE.



Siempre que se produzca la rotación de un cuerpo, hay una cupla responsable de esa rotación.

Momento de una cupla

Volvamos al ejemplo de la puerta, y hagamos experiencias para averiguar de qué depende el efecto de una cupla.

1. Apliquemos nuestra fuerza F *lejos de los goznes*: la puerta se abre *con facilidad.*

2. Apliquemos la misma fuerza F, pero *en el medio de la puerta,* que también se abre, pero *con menos facilidad.*

3. Apliquemos la misma fuerza F, pero *cerca de los goznes*: la puerta se abre *dificultosamente.*

Como las fuerzas no han variado, es evidente que el efecto depende no sólo de la intensidad de las fuerzas, sino también *de la distancia entre ellas,* llamada *brazo de la cupla.*

DEFINICIÓN: *Se llama momento* M *de una cupla al producto de la intensidad* F *de las fuerzas que la componen, por el brazo* d *que las separa:*

$$M = F\,d.$$

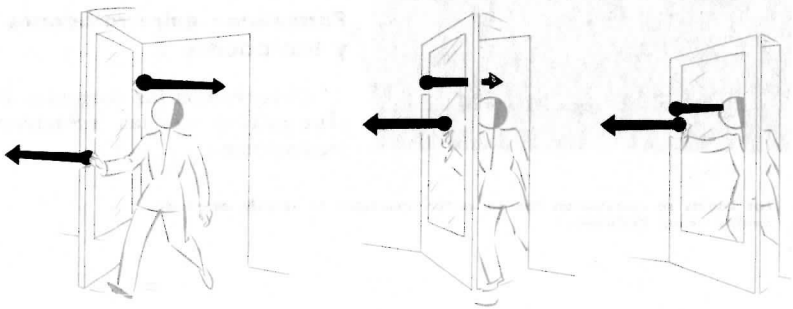
El momento de la cupla mide el efecto de la misma. Puede decirse que el momento es a la cupla, lo que la intensidad de una fuerza es a la fuerza.

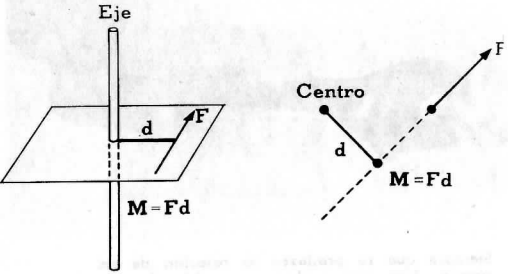
Momento de una fuerza

Es común y cómodo hablar del momento de la fuerza, y no del momento de la cupla, sobre todo cuando, como en el caso de la puerta, sólo es "visible" una de las dos fuerzas que componen la cupla. Se prescinde así de mencionar la otra componente, pero hay que tener bien presente que el momento de una fuerza y el momento de una cupla son una sola y misma cosa.

DEFINICIÓN: *Se llama momento de una fuerza con respecto a un eje* (en el cual está aplicada la otra componente de la cupla, de la que no se habla), *llamado eje de rotación, al producto de la*

El efecto depende de la fuerza y de su brazo; a su producto lo llamamos momento de la fuerza.



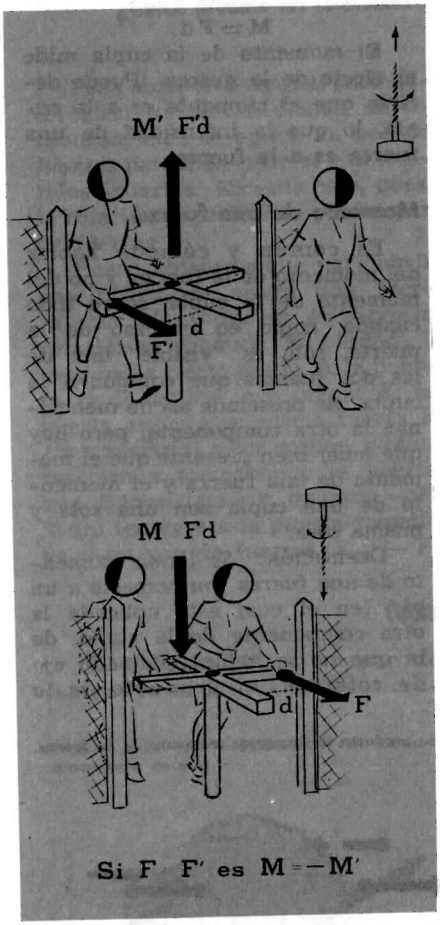


intensidad de la fuerza por la distancia entre la recta de acción de la fuerza y el eje.

$$M = F\,d.$$

Si la rotación se cumple alrededor de *un punto* y no de un eje:

DEFINICIÓN: *Se llama momento de una fuerza con respecto a un punto, llamado centro de momentos, al producto de la intensidad de la fuerza por la distancia del centro de momentos a la recta de acción de la fuerza.*



Las cuplas se representan con su vector momento: su sentido es el de avance de un tirabuzón.

Representación gráfica de una cupla

La cupla es magnitud vectorial, porque la rotación que produce tiene un eje, y ese eje tiene una dirección. Además, alrededor de un mismo eje la rotación puede cumplirse en un sentido o en el opuesto. Por lo tanto, una cupla se representa por medio de un vector, cuyas características son:

Dirección: la del eje de rotación (perpendicular al plano del par de fuerzas);

Sentido: se determina por la regla del tirabuzón (la misma que para el vector velocidad angular);

Medida: la medida de su momento: $F\,d$;

Punto de aplicación: cualquiera. Es lo que se llama vector libre.

Paralelismo entre rotaciones y traslaciones

Observemos las fórmulas de la cinemática de las rotaciones y traslaciones:

Traslaciones	*Rotaciones*
uniforme: $\frac{1}{2} d = v t$	uniforme: $\frac{1}{2} \alpha = \omega t$
$v =$ constante.	$\omega =$ constante.
uniformemente variado:	uniformemente variado:
$v = v_0 + a t$;	$\alpha = \omega_0 t + \gamma t^2$.
$d = v_0 t + a t^2$.	$\omega = \omega_0 + \gamma t$;

Obsérvese el estrecho paralelismo entre ambos conjuntos de fórmulas. Es natural que así sea, pues las definiciones que sirven como punto de partida tienen como única diferencia que en el movimiento de traslación se habla de distancias, mientras que en las rotaciones se habla de ángulos, pero las relaciones son las mismas.

Como veremos a continuación, esa semejanza entre rotación y traslación persiste también en la dinámica.

La inercia en las rotaciones

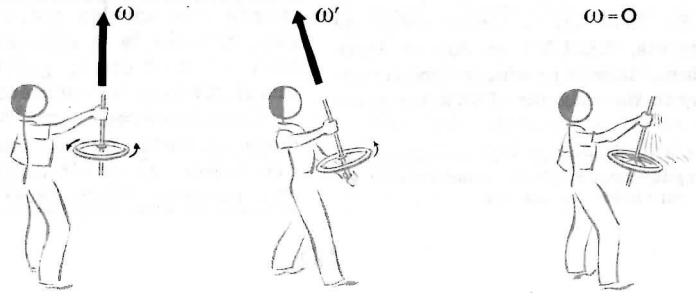
Cuando tratamos el principio de inercia, llegamos a la conclusión de que "todo cuerpo en reposo opone resistencia a ser puesto en movimiento; y si está en movimiento, a que se le cambie su velocidad".

Nos referíamos a las traslaciones, pero en las rotaciones sucede algo semejante. Para hacer girar un cuerpo, por ejemplo una de esas puertas giratorias que se encuentran en los grandes comercios, hay que aplicarle una cupla, pues si no, quedará en reposo; pero al hacerlo es bien sensible la resistencia de la puerta: *los cuerpos tienen inercia también para las rotaciones.*

Igual que en el caso de las traslaciones, sencillas experiencias nos permitirían comprobar que la inercia existe no sólo cuando se trata de poner en rotación a un cuerpo, sino también cuando se trata de disminuir o de aumentar su vector velocidad angular.

La palabra *vector* sugiere inmediatamente esta pregunta: ¿Se manifestará la inercia de las rotaciones cuando se trate tan sólo de cambiar la *dirección* del vector velocidad angular? Para responder, lo mejor es hacer una experiencia. Se toma una rueda y, sosteniéndola como indica el dibujo, se le aplica un movimiento de rotación lo más rápido posible. Ya se tiene el vector velocidad angular, cuya di-

Si la rueda tiene una velocidad angular, cuesta mover su eje; si la velocidad angular es nula es muy fácil cambiar la dirección del eje.



rección coincide con el eje de rotación; ahora hay que tratar de variar su dirección, lo que se logra aplicando una cupla como la indicada en el dibujo, y es bien perceptible la resistencia que la rueda opone a ese cambio.

Principio de inercia para las rotaciones: todo cuerpo en reposo permanecerá en reposo, y todo cuerpo en movimiento de rotación uniforme seguirá con ese movimiento, salvo que sobre él actúen cuplas exteriores que le obliguen a modificar esos estados.

Y lo mismo que para las traslaciones, ese enunciado puede sintetizarse así:

Todo cuerpo en rotación tiende a mantener constante su vector velocidad angular [1].

La experiencia diaria nos muestra, sin embargo, que todo cuerpo en rotación va disminuyendo su velocidad angular, hasta que finalmente se detiene. Pero el motivo es que no se pueden evitar cuplas retardatrices del movimiento, por el rozamiento con el eje de rotación, o con el punto de apoyo, o simplemente con el aire.

En 1948, en la Universidad de Virginia, EE. UU., el doctor Jesse Beams logró producir un movimiento de rotación de varias esferas, aprovechando la energía de un rayo de luz, alcanzando velocidades angulares enormes. Eliminó en gran parte el rozamiento sosteniéndolas en un vacío elevado, por medio de fuerzas magnéticas. Se ha calculado que una vez alcanzada una gran velocidad angular, cada esfera sería capaz, si se la dejara, de seguir unos dos años en rotación.

[1] Esta propiedad sólo es válida para cuerpos, con un eje de simetría, que giran alrededor de ese eje.

El momento de inercia

Cuando apareció el concepto de inercia, definimos la magnitud física que la mide: la masa del cuerpo, y hallamos la relación entre la fuerza aplicada y la aceleración que ésta imprime al cuerpo:

$$F = m\,a.$$

Hallaremos ahora la relación entre la cupla, agente motor de las rotaciones, y la aceleración angular que una cupla provoca, para determinar el factor que mide la inercia de un cuerpo en las rotaciones.

Si se ata una piedra en el extremo de un hilo, al hacerla girar la piedra opone resistencia. Pero todos sabemos que la *resistencia es tanto mayor cuanto mayor es el largo del hilo.* Esto es nuevo: para medir la inercia en las traslaciones, sólo interesa la masa; en las rotaciones, por lo visto, interesa la masa, claro está, pero también *la distancia al centro o eje de rotación.* Esto nos recuerda que en las rotaciones no sólo interesa la fuerza, sino también su momento; *¿tendrán las masas también su momento?*

Consideremos una bolita de masa m, sostenida por una varilla que puede girar alrededor de su otro extremo. Para hacer girar la

bolita le aplicamos una fuerza F, que le comunica una aceleración de traslación tangencial a:

$$F = m\,a.$$

Como nos interesa la rotación, consideremos no la fuerza F sino su momento $M = Fr$ respecto del eje de rotación y la aceleración angular γ en lugar de la aceleración tangencial a. Recordando que $a = \gamma r$, resulta:

$$Fr = m \cdot a \cdot r$$
$$Fr = m \cdot \gamma r \cdot r$$
$$Fr = m\gamma r^2$$

En definitiva:

$$M = mr^2 \cdot \gamma$$

La responsable del movimiento es la cupla M; la aceleración que provoca es γ; y la resistencia opuesta al movimiento está representada por el producto mr^2. Tal como dijimos antes, en las rotaciones interesa no sólo la masa del cuerpo, sino también su distancia al eje de rotación. Y así como al hablar de las fuerzas en las rotaciones llamamos momento de la fuerza al responsable de la rotación, llamaremos MOMENTO DE INERCIA a la parte responsable de la resistencia opuesta a la rotación.

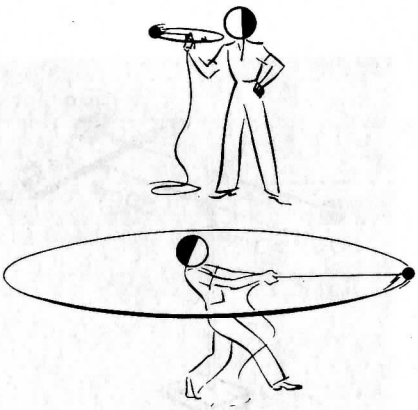
Llamando I al momento de inercia:

$$I = mr^2,$$

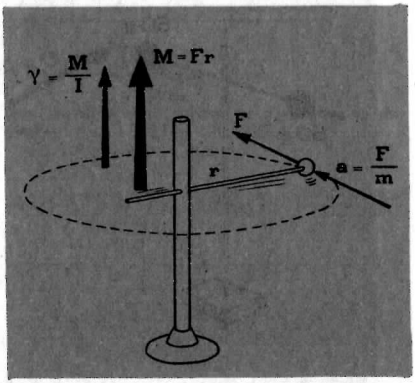
resulta:

$$M = I\gamma, \quad \text{y de ahí:} \quad \boxed{\gamma = \frac{M}{I}}$$

La aceleración angular de un cuerpo de momento de inercia I con respecto al eje de rotación, es directamente proporcional al momento M de la cupla aplicada, e inversamente proporcional al momento de inercia I.

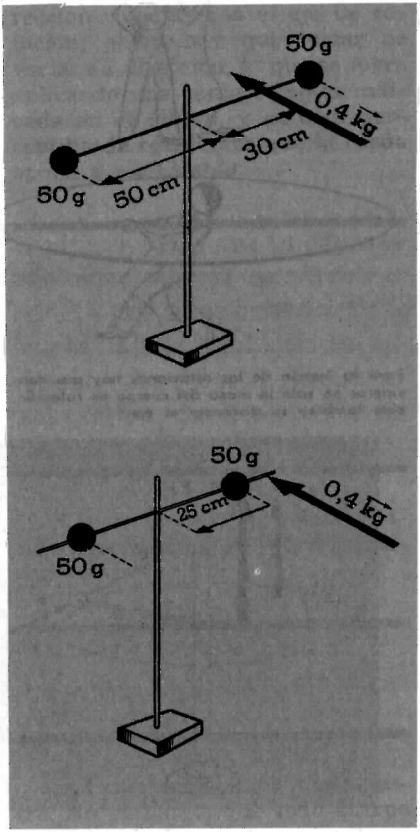


Para la inercia de las rotaciones hay que considerar no sólo la masa del cuerpo en rotación, sino también su distancia al eje.



EJ.: *Dos esferitas de 50 g están colocadas en los extremos de una varilla de 1 metro de largo, cuya masa despreciamos, que gira alrededor de su punto medio. Se aplica a la varilla, a 30 cm del eje de rotación, una fuerza perpendicular al plano determinado por la varilla y el eje, de 0,4 $\vec{kg}$ de intensidad. Calcular la aceleración angular del movimiento de rotación.*

Hay que calcular el momento de la fuerza, y el momento de inercia de las dos esferitas respecto del eje de rotación.



$M = Fr$; $I = I' + I'' = 2I' = 2md^2$.

Luego:

$$\gamma = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{2md^2} = \frac{0{,}4\ \vec{kg} \cdot 30\ cm}{2 \cdot 50\ g \cdot (50\ cm)^2}$$

Para que γ resulte expresada en $1/s^2$, hay que usar unidades de un mismo sistema, por ejemplo, el M.K.S.

$$\gamma = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}8\ N \cdot 0{,}3\ m}{2 \cdot 0{,}05\ kg \cdot (0{,}5\ m)^2} = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}25}\ \frac{1}{s^2} = 47{,}04\ \frac{1}{s^2}$$

La aceleración angular es aproximadamente de 47 radianes por segundo, en cada segundo.

EJ.: *Se deslizan las esferitas a lo largo de la varilla que las sostiene, hasta que distan 25 cm del eje de rotación, y se vuelve a aplicar la misma fuerza. Calcular la nueva aceleración angular.*

El momento de la fuerza no ha variado, pero sí el momento de inercia de las masas en rotación, de modo que:

$$\gamma' = \frac{M}{I'} = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}8\ N \cdot 0{,}3\ m}{2 \cdot 0{,}05\ kg \cdot (0{,}25\ m)^2} \cong 188\ \frac{1}{s^2}$$

Observemos que al disminuir a la mitad la distancia al eje de rotación, el momento de inercia disminuyó 4 veces; la aceleración angular aumentó 4 veces ($47 \cdot 4 = 188$), pues es inversamente proporcional al momento de inercia.

EJ.: *Se duplica el momento de la fuerza aplicada en el problema anterior. ¿Cuánto valdrá la nueva aceleración angular?*

Como la aceleración angular es *directamente proporcional* al momento de la fuerza aplicada, *al duplicarse ésta se duplica aquélla.* Compruébese realizando el cálculo.

OBSERVACIÓN: El momento de la fuerza puede duplicarse de dos maneras: 1, duplicando la fuerza; 2, duplicando el brazo. En efecto:

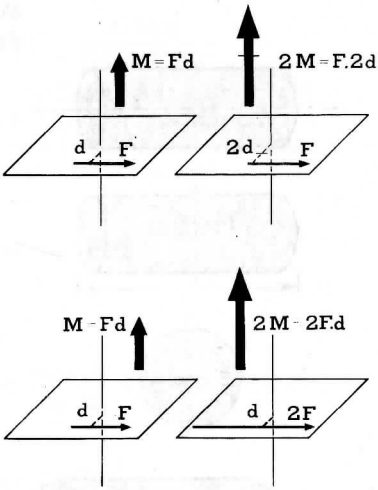
si $F \cdot r = M$, $2F \cdot r = 2M$,
o bien: $F \cdot r = M$, $F \cdot 2r = 2M$.

Los bailarines y el momento de inercia. Obsérvese a un bailarín cuando quiere girar rápidamente sobre sí mismo: abre los brazos, da el "envión" para girar, e inmediatamente *recoge los brazos contra el cuerpo.* ¿Para qué encoge los brazos? Para disminuir su distancia al eje de rotación, y con ello disminuir el momento de inercia. Con un mismo "envión" (una misma cupla) consigue así una mayor aceleración, y por lo tanto, una mayor velocidad angular.

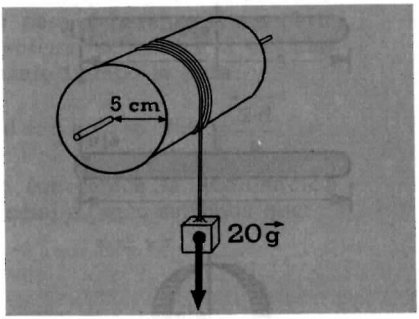
Cálculo de momentos de inercia

Al calcular el momento de inercia de, por ejemplo, un cilindro que gira alrededor de su eje, se presenta una dificultad: no hay inconveniente en medir la masa, pero, ¿qué se toma como distancia al eje de rotación? Si se tomara el radio del cilindro, se cometería un error, pues la mayor parte de la masa está más cerca. La solución es dividir al cilindro en pedacitos, calcular el momento de inercia mr^2 de cada pedacito y luego sumar esos momentos de inercia parciales. Así se hace el cálculo en la práctica, pero con procedimientos del Cálculo Infinitesimal que escapa al alcance de este libro.

Para resolver los problemas que plantearemos, damos en la página siguiente los momentos de inercia de varios sólidos con respecto a varios ejes.



Dos maneras de duplicar el momento de la cupla.



Ej.: *Del extremo del hilo de un carretel cilíndrico de radio* $r = 5\ cm$ *y peso* $P = 500\ \vec{g}$, *que puede girar alrededor de su eje, se cuelga una pesa de* $20\ \vec{g}$. *Calcular la aceleración angular del carretel.*

La relación que nos permitirá resolver el problema es:

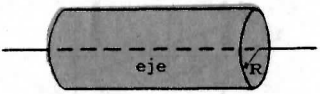
$$\gamma = \frac{M}{I}$$

Es necesario calcular M e I:

$$M = Fr;$$

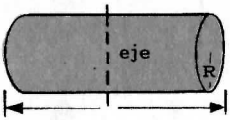
$$I = \frac{mr^2}{2}$$

Momentos de inercia de los sólidos



Cilindro: alrededor del eje.

$$\frac{M R^2}{2}$$

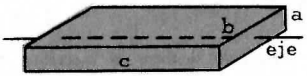


Cilindro: alrededor de un diámetro central.

$$\frac{M R^2}{4} + \frac{M l^2}{12}$$

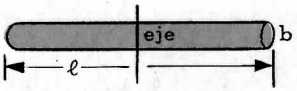
Esfera: alrededor de cualquier diámetro.

$$\frac{2}{5} M R^2$$



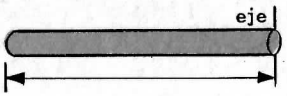
Paralelepípedo: alrededor de un eje central.

$$M \frac{a^2 + b^2}{12}$$



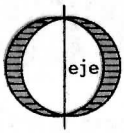
Barra delgada: alrededor de su eje perpendicular a su altura.

$$\frac{Ml^2}{12}$$



Barra delgada: alrededor de su eje, en uno de sus extremos.

$$\frac{ML^2}{3}$$

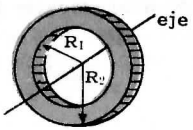


Aro: alrededor de su diámetro.

$$\frac{M R^2}{2}$$

Aro: alrededor de una línea tangente.

$$\frac{2}{3} M R^2$$



Anillo: alrededor de un eje; a través de su centro perpendicular al plano del anillo.

$$\frac{M}{2}\left(Rl^2 + R \frac{2}{2} \right)$$

Luego

$$\gamma = \frac{F\,r}{\frac{m\,r^2}{2}} = \frac{2\,F}{m\,r}$$

Y reemplazando por los valores conocidos:

$$\gamma = \frac{2 \cdot 20\,\vec{g}}{500\ g \cdot 5\ cm}$$

(¿Simplificaría usted $\vec{g}$ y g?) Hay que expresar las cantidades en un mismo sistema de unidades, por ejemplo, el M. K. S.:

$$20\,\vec{g} = 0{,}020\,\vec{kg} = 0{,}020 \times 9{,}8\ N = 0{,}196\ N$$
$$500\ g = 0{,}5\ kg$$
$$5\ cm = 0{,}05\ m.$$

Luego:

$$\gamma = \frac{2 \cdot 0{,}196\ N}{0{,}5\ kg \cdot 0{,}05\ m} = 15{,}68\,\frac{N}{kg \cdot m} = 15{,}68\,\frac{kg\ m/s^2}{kg \cdot m} = 15{,}68\,\frac{1}{s^2}$$

La aceleración angular es de 15,68 radianes por segundo, en cada segundo.

EJ.: *Calcular la velocidad de caída de la pesa del problema anterior, al cabo de 1 segundo de la partida.*

La v de la pesa es en cada instante la velocidad tangencial de los puntos de la superficie lateral del carretel:

$$v = \omega\,r.$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \gamma\,t,$$

de modo que:

$$v = \gamma\,t\,r = 15{,}68\,\frac{1}{s^2} \cdot 1^s \cdot 5\ cm = 78{,}4\ cm/s.$$

EJ.: *Calcular cuánto tardará en desenvolverse todo el hilo del carretel, cuya longitud es de 10 m.*

La pesa deberá recorrer 10 m; el problema se reduce a calcular en cuánto tiempo lo hará:

$$d = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2\,d}{a}}$$

No conocemos la aceleración tangencial a, pero sabemos que:

$$a = \gamma\,r,$$

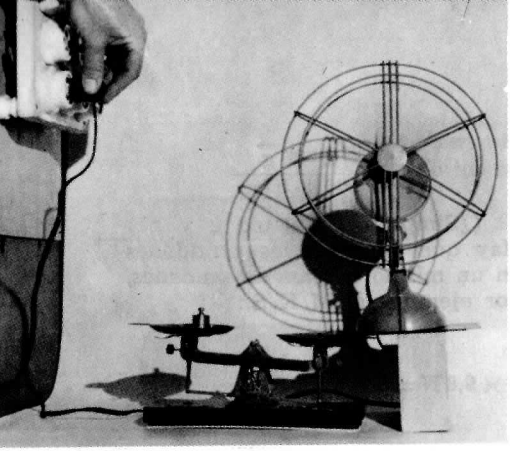
de modo que:

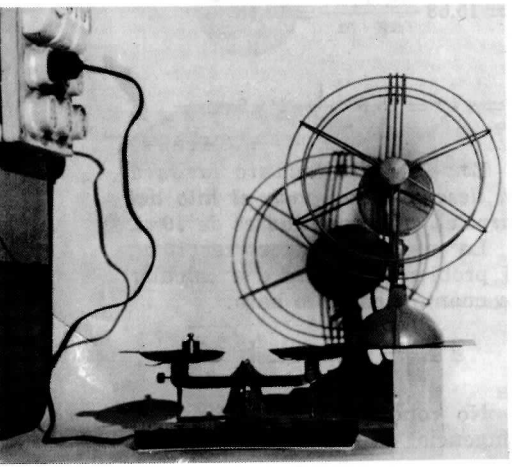
$$t = \sqrt{\frac{2\,d}{\gamma\,r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ m}{15{,}68\ 1/s^2 \cdot 5\ cm}} = \sqrt{\frac{2\,000\ cm}{78{,}4\ cm/s^2}} = \sqrt{25{,}5\ s^2}$$

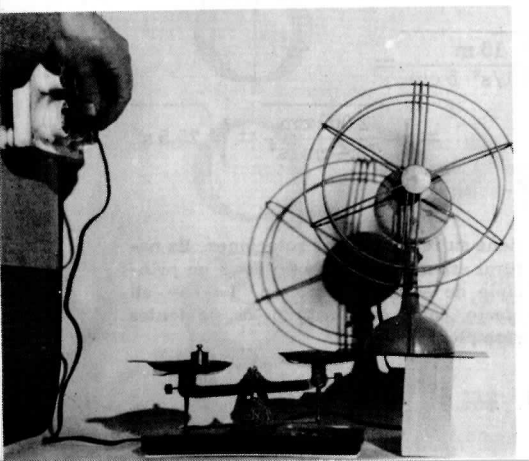
$$t \cong 5^s.$$

Acción y reacción en las rotaciones

Hemos visto hasta ahora cómo cada fórmula o principio de las traslaciones tiene su réplica en las rotaciones. Es natural esperar que haya en éstas un principio de acción y reacción. Lo hay, en efecto, como lo muestran los siguientes ejemplos:







1. Cuando se está sentado en un sillón de peluquería, o en un taburete de piano, si se intenta hacer girar el cuerpo en un sentido, se observa que el sillón, o el taburete, gira en sentido contrario.

2. Se puede realizar una sencilla experiencia casera con una balanza y un ventilador, como muestra la figura. El ventilador se apoya parte en el taco de madera y parte en la balanza. Al enchufar la ficha, una cupla se aplica a las paletas del ventilador, que comienzan a girar en cierto sentido. Simultáneamente se observa que la balanza, que estaba equilibrada, se desnivela, indicando que el cuerpo del ventilador ha girado ligeramente en sentido contrario al de rotación de las paletas.

Cuando éstas alcanzan su velocidad de régimen (movimiento uniforme, de modo que ya no hay cupla, o sea que la producida por el motor está equilibrada por la del roce), la balanza vuelve a su posición inicial, indicando que tampoco el cuerpo del ventilador está sometido a cupla alguna.

Si luego se desenchufa la ficha, se advierte, por medio de la balanza, que el cuerpo del ventilador gira en sentido contrario al anterior.

Principio de acción y reacción: siempre que un cuerpo aplique una cupla a otro, éste reacciona aplicando al primero una cupla igual y opuesta.

Impulso y cantidad de movimiento

El principio anterior nos dice que cuando un cuerpo interactúa con otro mediante cuplas, se verifica

Arriba: al enchufar, las paletas comienzan a girar en un sentido (en este caso, como las agujas del reloj), y el cuerpo del ventilador en sentido contrario, como lo revela la balanza. **Centro:** no hay cupla. Balanza en equilibrio. **Abajo:** al desenchufar, aparece una cupla de sentido opuesto al de la de arriba.

$\vec{M}_{21} = -\vec{M}_{12}$; o bien: $I_1\vec{\gamma}_1 = -I_2\vec{\gamma}_2$

Si la interacción dura un lapso Δt, y durante él las cuplas han sido constantes, podemos escribir:

$$\vec{M}_{21} \cdot \Delta t = -\vec{M}_{12} \cdot \Delta t\,;$$

o bien:

$$I_1\vec{\gamma}_1 \cdot \Delta t = -I_2\vec{\gamma}_2 \cdot \Delta t$$

es decir:

$$I_1 \cdot \Delta\vec{\omega}_1 = -I_2 \cdot \Delta\vec{\omega}_2$$

Para cada cuerpo, entonces, podemos decir:

$$\vec{M} \cdot \Delta t = I \cdot \Delta\vec{\omega}$$

es decir que *la aplicación de una cupla durante un lapso, se traduce en un cambio de la velocidad angular.* La importancia de estos productos ha hecho que se les dé un nombre especial a cada uno:

DEFINICIÓN DE IMPULSO DE ROTACIÓN O ANGULAR. *Se llama impulso angular I_r aplicado por una cupla M durante un lapso Δt, al producto de la cupla por el lapso en que estuvo aplicada.* En símbolos:

$$\vec{I}_r = \vec{M} \cdot \Delta t$$

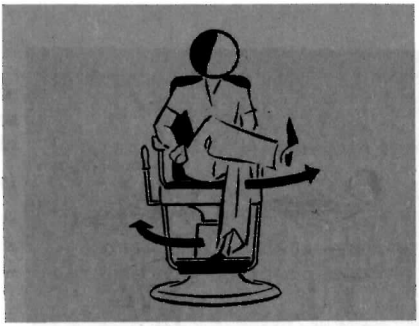
DEFINICIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE ROTACIÓN. *Se llama cantidad de movimiento de rotación L de un cuerpo, al producto de su momento de inercia por su velocidad angular.* En símbolos:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

NOTA: *Obsérvese que la cantidad de movimiento de rotación de un cuerpo depende del eje alrededor del cual consideramos el movimiento de rotación.*

Si un cuerpo experimenta una variación $\Delta\vec{\omega}$ de su velocidad angular, su cantidad de movimiento de rotación ha cambiado en $\Delta\vec{L}$:

$$\Delta\vec{L} = I \cdot \Delta\vec{\omega}$$



Con estas definiciones podemos expresar los resultados anteriores diciendo que *el impulso angular aplicado por una cupla es igual a la variación de la cantidad de movimiento de rotación que entonces experimenta el cuerpo.* En símbolos:

$$\vec{I}_r = \Delta\vec{L}$$

La conservación de la cantidad de movimiento de rotación

Repitamos la siguiente expresión, hallada anteriormente:

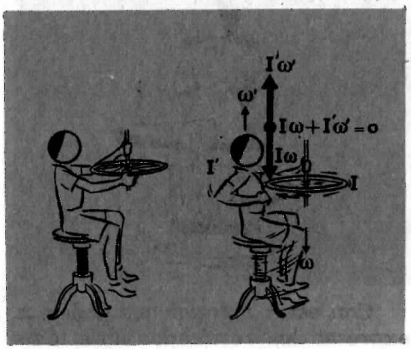
$$I_1 \cdot \Delta\vec{\omega}_1 = -I_2 \cdot \Delta\vec{\omega}_2$$

Con la definición de cantidad de movimiento de rotación, ahora resulta:

$$\Delta\vec{L}_1 = -\Delta\vec{L}_2$$

o sea: $\Delta\vec{L}_1 + \Delta\vec{L}_2 = 0$

Esta expresión nos dice que *cuando dos cuerpos interactúan entre sí mediante cuplas, se provocan entre sí variaciones de sus cantidades de movimiento de rotación cuya suma es nula.* Entonces, si a la suma de las cantidades de movimiento de rotación la llamamos *cantidad de movimiento de rotación del sistema*, la expresión obtenida nos dice que *la interacción de dos cuerpos no provoca ninguna variación de la cantidad*



de movimiento de rotación del sistema.

Dicho de otra manera: *La cantidad de movimiento de rotación de un sistema aislado es constante.*

Éste es un resultado muy importante, porque sea cual fuere el problema que enfrentemos, de antemano sabemos que cuando se trata de dos cuerpos aislados la suma de sus cantidades de movimiento de rotación es constante, aunque cada una varíe por su lado.

Supongamos a una persona sentada en un taburete, sosteniendo con una mano una rueda, como indica la figura. Antes de producir ningún movimiento, la cantidad de movimiento de rotación de la persona es cero, y lo mismo la cantidad de movimiento de la rueda.

Si la persona, con su otra mano, aplica una cupla y hace girar la rueda, recibe de ésta una cupla de momento igual y opuesto y se pone a girar en sentido contrario al de rotación de la rueda.

Si la cupla aplicada a la rueda tiene un momento $\vec{M}$, y estuvo aplicada durante un lapso t, la velocidad angular alcanzada es $\vec{\omega}$ tal que:

$\vec{M}t = I\vec{\omega}$, siendo I el momento de inercia de la rueda respecto de su eje.

Durante ese mismo lapso t, la persona soportó la aplicación de una cupla de momento $\vec{M}' = -\vec{M}$, que le comunicó una velocidad angular $\vec{\omega}'$ tal que:

$\vec{M}'t = I'\vec{\omega}'$, siendo I' el momento de inercia de la persona respecto de su eje de rotación. Como $\vec{M}' = -\vec{M}$, resulta:

$$I\vec{\omega} = -I'\vec{\omega}',$$

o sea:

$$\boxed{I\vec{\omega} + I'\vec{\omega}' = 0.}$$

La cantidad de movimiento del sistema formado por la persona y la rueda no ha variado por la aplicación de una cupla por parte de uno de los integrantes del sistema sobre el otro.

Supongamos que *otra persona* detiene la rotación del taburete; ahora la cantidad de movimiento angular del sistema anterior ha variado, pero a causa de la aplicación de una cupla por alguien exterior al sistema, y en vez de 0 vale ahora $I\vec{\omega}$.

La rueda sigue girando con velocidad angular $\vec{\omega}$, si ahora el hombre que la sostiene apoya su mano libre sobre la periferia de la rueda, para frenarla, le aplica al hacerlo una cupla de un cierto momento $\vec{M}_1$. La rueda reacciona aplicándole, a su vez, una cupla igual y opuesta, de momento $\vec{M}'_1 = -\vec{M}_1$, y el hombre y el taburete comienzan a girar en el mismo sentido de la rueda. Si la

cupla $\vec{M}_1$ estuvo aplicada durante un lapso t_1, al final del mismo la velocidad angular de la rueda es $\vec{\omega}_1$, y la velocidad angular del hombre y del taburete $\vec{\omega}'_1$. La cantidad de movimiento que perdió la rueda por la aplicación del impulso angular es:

$$\vec{M}_1 t_1 = I(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega})$$

y la cantidad de movimiento angular que recibió el hombre es:

$$\vec{M}'_1 t_1 = I'\vec{\omega}'_1.$$

Como los impulsos angulares son iguales y opuestos, resulta:

$$I(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) = -I'\vec{\omega}'_1 \quad \therefore \quad I\vec{\omega}_1 + I'\vec{\omega}'_1 = I\vec{\omega}$$

La suma de la cantidad de movimiento que ahora tiene la rueda, más la del hombre y el taburete, es igual a la que tenía la rueda antes de frenarla.

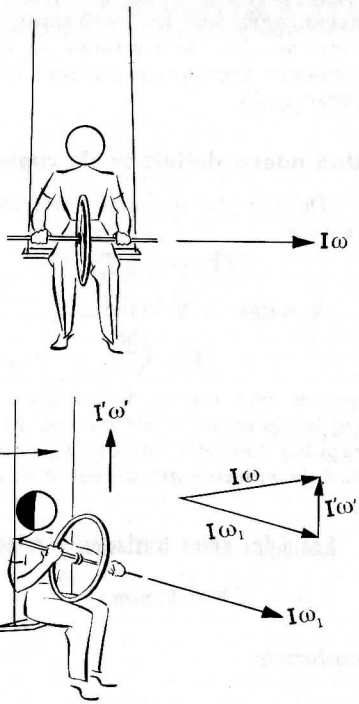
Como consecuencia de estos ejemplos, deducimos que:

Principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular: la cantidad de movimiento angular de un sistema se mantiene constante, siempre que sobre el sistema no actúen cuplas exteriores.

La cantidad de movimiento y el impulso angulares son *magnitudes vectoriales*. Cabe preguntarse, pues, si el principio de conservación comprende también el caso en que sólo hay una variación de la dirección del vector. Para responder, hagamos una experiencia, aunque sólo sea cualitativa.

Imaginemos nuevamente la persona de las experiencias anteriores, pero ahora sentada en una hamaca. La rueda, con su eje horizontal, está girando con velocidad $\vec{\omega}$ y cantidad de movimiento angular $I\vec{\omega}$: La hamaca y la persona están en reposo, de modo que su cantidad de movimiento es cero. La cantidad del sistema es, pues, la de la rueda:

$$I\vec{\omega}.$$



Se conserva el vector cantidad de movimiento.

Ahora la persona, que sostiene la rueda, con sus dos manos, le aplica una cupla para poner oblicuo el eje de rotación de la rueda. Inmediatamente la hamaca y la persona inician un movimiento de rotación con el sentido indicado en la figura, por lo cual, cuando deja de actuar la cupla, alcanza una cantidad de movimiento angular $I'\omega'$. La cantidad de movimiento de la rueda es ahora $I\vec{\omega}_1$, y la del taburete y la persona, $I'\vec{\omega}'$.

Como se trata de vectores, para hallar la cantidad de movimiento de todo el sistema debemos hacer la suma vectorial o geométrica, por medio de la regla del paralelogramo. La resultante es, otra vez, $I\omega$: *la cantidad de movimiento angular del sistema se ha conservado.*

Una nueva definición de cupla [1]

De las definiciones anteriores resulta

$$\vec{M} \cdot \Delta t = \Delta \vec{L}$$

Si dejamos $\vec{M}$ queda:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

que es una nueva definición: *La cupla aplicada a un cuerpo es la rapidez con que cambia su cantidad de movimiento de rotación.*

Analogías entre traslación y rotación

Traslación:

uniforme:

$$v = \frac{d}{t} \therefore d = vt.$$

$$v = \text{constante.}$$

uniformemente variada:

$$v \neq \text{constante.}$$

$$a = \frac{\Delta v}{t} \therefore \begin{cases} v = at \\ v = v_0 + at \end{cases}$$

$$d = \tfrac{1}{2} at^2$$

$$d = v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2$$

Principios:

Inercia: Todo cuerpo en traslación tiende a mantener su $\vec{v}$.

Masa:

$$a = \frac{F}{m}$$

Acción y reacción: Si un cuerpo aplica a otro una F, recibe de éste una $-F$.

Conservación de m v: Todo sistema conserva su cantidad de movimiento, siempre que no actúen sobre él fuerzas exteriores.

Rotación:

uniforme:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \therefore \alpha = \omega t.$$

$$\omega = \text{constante.}$$

uniformemente variada:

$$\omega \neq \text{constante.}$$

$$\gamma = \frac{\Delta \omega}{t} \therefore \begin{cases} \omega = \gamma t \\ \omega = \omega_0 + \gamma t \end{cases}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \gamma t^2$$

$$\alpha = \omega_0 t + \tfrac{1}{2} \gamma t^2$$

[1] Recomendamos releer la pág. 180.

Principios:

Inercia: Todo cuerpo rígido en rotación tiende a mantener su $\vec{\omega}$.

Momento de inercia:

$$\gamma = \frac{M}{I}$$

Acción y reacción: Si un cuerpo aplica a otro un M, recibe de éste un $-M$.

Conservación de $I\omega$: Todo sistema conserva su cantidad de movimiento de rotación, siempre que no actúen sobre él cuplas exteriores.

Los principios de la dinámica

(Diálogo entre los personajes del capítulo VII: un físico y su amigo. El amigo acaba de leer los capítulos de dinámica y se dirige al físico.)

Amigo: Esta parte del libro es bastante mala.

Físico: ¿Mala?

A.: Para mí, sí. Y para todo aquel que desee seguir un orden rigurosamente lógico en el estudio de la física. Y te voy a dar las razones:

Primero: los autores comienzan por definir a masa como cantidad de materia. Pero no dicen qué es cantidad de materia.

Después la definen como cociente entre fuerza y aceleración. Pero no han definido lo que es fuerza. Luego, todo se reduce a un círculo vicioso.

F.: Tienes razón. Pero... dime: ¿no notaste algo parecido en cinemática?

A.: ¿En cinemática?... No.

F.: Sin embargo, no han definido lo que es tiempo.

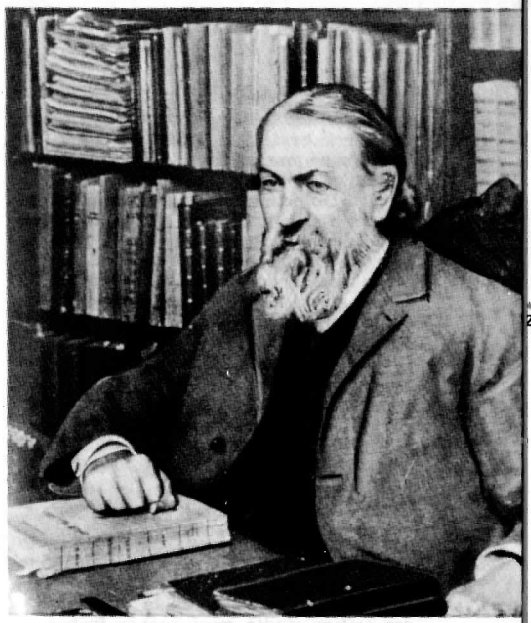
(El amigo se queda mirando al físico...)

A.: Tienes razón... No lo advertí.

F.: Sin embargo, ¿tuviste alguna dificultad en comprender la cinemática?

A.: Ninguna. Confieso que me sorprende un poco... Pero, ¡claro!, ¿quién no sabe lo que es el tiempo?

F.: Me haces acordar a... creo que fue Santo Tomás, quien dijo: "El tiempo es eso que, cuando no me preguntan lo que es, sé lo que es, pero dejo de saberlo en cuanto me lo preguntan". Y volviendo a la masa, ¿entendiste lo que quiere decir "cantidad de materia"?



Ernst Mach.

A.: Entenderlo, sí; pero es necesaria una definición lógica y correcta de masa. ¿Existe alguna?

F.: Sí, pero es bastante abstracta, como verás, y precisamente por eso los autores han preferido comenzar por una definición incorrecta, más bien imprecisa, pero que, como bien dijo un profesor italiano, "es la única que da un significado concreto y sensible de la palabra masa". Y no olvides que el libro es para muchachos que se inician en la física, de modo que no se les debe dar desde un principio una definición abstracta, pues se corre el riesgo de que no la comprendan, por precisa que sea la definición. ¿Y qué te parece definir la masa como cociente entre fuerza y aceleración?

A.: Estamos en las mismas, porque no se ha definido lo que es fuerza.

F.: Sí, se dio una definición: "todo aquello que varía la velocidad de un cuerpo".

A.: Es cierto, como una consecuencia del principio de inercia. Pero... ¿quieres decirme *qué significa* el principio de inercia? Porque en su enunciado entra la palabra *fuerza, que no ha*

sido definida. Si luego quieres definir la fuerza basándola en el principio de inercia, de nuevo estarás en un círculo vicioso.

F.: Objeción correcta. Eddington, el famoso físico y filósofo inglés, dijo que si del enunciado se suprime la palabra *fuerza*, el principio de inercia queda reducido a: "Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme... a menos que no persevere".

A.: ¿No ves? ¿Y cómo quieres que yo entienda algo de física?

F.: ¡Claro que entiendes! Si no fuese así, no se te presentarían estas dudas. El solo hecho de que las tengas, significa que comprendes de qué se trata.

A.: Pero, en definitiva, ¿qué es la masa?

F.: Fue un gran físico y filósofo austríaco el que puso orden en todo esto: Ernst Mach. Hizo una severa crítica de los principios de la dinámica, y esa crítica rindió muy buenos frutos.

A.: ¿Cómo hizo para definir la masa?

F.: Imagínate dos carritos, con las ruedas muy pulidas y bien aceitadas para eliminar el rozamiento. Entre sí comprimen un resorte. En determinado momento sueltas el resorte, que impulsa a los carritos en sentidos opuestos; mides la aceleración de cada uno y efectúas su cociente. Si repites la operación, cuantas veces quieras, siempre hallarás el mismo cociente. Si cambias el resorte, pero no los carritos, las aceleraciones serán distintas, pero el cociente de las nuevas aceleraciones será igual al cociente anterior.

A. (Dudando.): ... Si tú, o Mach, lo dicen ...

F.: Es así. Si quieres puedes comprobarlo, haciendo la experiencia y midiendo. Estos resultados no se pueden demostrar, se obtienen de la experiencia, y Mach los enunció como un principio, más o menos así:

Dos puntos materiales, A *y* B, *aislados suficientemente de otros puntos (para que éstos no perturben el movimiento de aquéllos), y actuando el uno sobre el otro, se comunican aceleraciones vectoriales* a_A *y* a_B *que tienen la misma recta de acción y sentidos opuestos, y tales que el cociente de sus medidas es constante.* Es decir:

$$\frac{a_A}{a_B} = \text{constante.}$$

E inmediatamente formula la siguiente

DEFINICIÓN: *El cociente de las aceleraciones,* $\frac{-a_A}{a_B}$, *con signo negativo, se llama masa del segundo cuerpo con respecto al primero:*

$$m_B = \frac{-a_A}{a_B}$$

A.: ¿Por qué el signo negativo?

F.: Como las aceleraciones son de sentidos opuestos, una es positiva y la otra negativa. Para que el cociente sea positivo, se coloca el signo menos.

A.: Bueno... parece que está bien. Por lo menos, usa un concepto, como *aceleración*, que ya se ha definido perfectamente. Pero oye: ¿cuál es la unidad que toma para medir la masa del segundo cuerpo?

F.: La definición te lo está diciendo: la masa de A.

A.: ¡Pero si no sabe cuánto vale!

F.: Al decir así, significa que a la masa de A le asigna el valor 1, por definición. Si B recibe una aceleración doble que la de A, el cociente de las aceleraciones vale $\frac{1}{2}$, y la masa de B es la mitad de la de A, es decir, tiene masa $\frac{1}{2}$.

A.: ¿$\frac{1}{2}$ qué? ¿No dices en qué unidad: gramos, kilogramos o cualquier otra cosa?

F.: Simplemente, $\frac{1}{2}$ de la masa de A; si –por ejemplo–, es el kilogramo patrón, entonces la masa de B es $\frac{2}{1}$ kg.

A. (Piensa, y luego de un rato, lentamente): Sí, parece que esa definición es buena. ¿Y cómo se sabe cuándo dos masas son iguales?

F.: Muy sencillo: cuando las aceleraciones recíprocas son iguales. Como ves, ya puedes medir masas si mides aceleraciones. Como comprenderás, si tomas un tercer cuerpo, C, puedes determinar su masa, m_C. Y luego encontrarás que:

El cociente de las aceleraciones recíprocas es igual al cociente de sus respectivas masas medidas con respecto a una misma unidad, pero con el signo negativo:

$$\frac{m_C}{m_B} = -\frac{a_B}{a_C} \quad \therefore \quad m_C\, a_C = -m_B\, a_B .$$

A.: ¡Ah! ¿Y ahí aparece el producto de masa por aceleración? ¡Entonces ese producto se puede definir como la

fuerza que actuó sobre cada cuerpo! ¡Ahora sí veo claro!

F.: Como ves, la definición rigurosamente lógica de masa de un cuerpo, trae como consecuencia inmediata la definición de fuerza:

DEFINICIÓN: *Se llama fuerza que actúa sobre un cuerpo al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que adquiere.*

A.: ¡Óyeme un segundo!: La igualdad

$$m_C\, a_C = -\, m_B\, a_B$$

significa que la fuerza que actúa sobre el cuerpo B es igual y opuesta a la fuerza que actúa sobre el cuerpo C, ¿verdad?

F.: Ni más ni menos.

A. (Excitado.): Pero entonces, esa igualdad no significa otra cosa ... ¡claro, pues!, no significa otra cosa que el principio de acción y reacción ...

F.: Vas cayendo de sorpresa en sorpresa ...

A. (Sin escucharle.): Y... ¡más todavía!: Si la definición de fuerza dice que es igual a masa por aceleración, si la fuerza es nula, la aceleración es nula también; por lo tanto, si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza, ese cuerpo no es acelerado ... ¡ y también salió el principio de inercia! ¡Esto sí que está bueno!

F.: Lo que está bueno es el trabajo de Mach, ¿no te parece?

A. (Con admiración.): ¡Realmente! Una vez definida la masa, lo demás sale solo.

F.: De acuerdo. Pero, honradamente, dime: ¿hubieras comprendido todo tan fácilmente, y hubieras tú mismo, solo, sacado todas las conclusiones que sacaste, si antes no te hubieran comenzado por decir que la masa de un cuerpo es su cantidad de materia?

A.: Por lo menos reconozco que me hubiera costado mucho más comprenderlo, y ... confieso que es probable que en mitad de la lectura la hubiera dejado a un lado, por no saber adónde iba a parar.

F.: Bueno, pero ahora yo te voy a hacer una pregunta, sobre algo de lo cual no te has dado cuenta aún. Comprendiste ahora los principios de la dinámica, ¿verdad?

A. (Escudriñándolo con sospecha.): ... Por lo menos, creo que sí.

F.: Y... ¿en qué sistema de coordenadas son válidos?

A.: ¿Cómo? En cualquiera ...

F.: Te voy a leer algo, pues no podría yo plantearlo con tanta claridad y concisión como lo hace su autor. Es un trozo del libro *La Física, aventura del pensamiento*, de Einstein e Infeld.

A.: ¿Einstein, el autor de la Teoría de la Relatividad?

F.: El mismo. Te prestaré el libro con una condición: que lo leas pensando cada oración, cada palabra. Está tan bien escrito, que se puede leer de corrido, pero, eso sí, con mucha atención. Oye:

"Imaginemos a un grave hombre "de ciencia que cree que el principio de "inercia puede ser comprobado experi- "mentalmente. Con tal objeto impulsa "pequeñas esferas sobre un plano ho- "rizontal, tratando en lo posible de eli- "minar el roce, y nota que el movi- "miento se hace más uniforme a medida "que la mesa y las esferas se hacen más "pulidas. En el preciso momento en que "está por proclamar el principio de "inercia, alguien resuelve jugarle una "pesada broma.

"Nuestro físico trabaja en un labo- "ratorio sin ventanas y sin comunica- "ción alguna con el exterior. El bro- "mista instala un mecanismo que puede "hacer girar la sala de trabajo alrede- "dor de un eje que pasa por su centro. "Apenas comienza la rotación, el físico "adquiere nuevas e inesperadas expe- "riencias. Las esferas, que tenían un "movimiento uniforme, empiezan re- "pentinamente a alejarse del centro de "la sala.

"El mismo físico siente una fuerza "extraña, que lo empuja hacia la pa- "red, es decir, experimenta la misma "sensación que tenemos al describir rá- "pidamente una curva, viajando en tren "o en automóvil, o yendo en una cale- "sita o tiovivo. Todos sus resultados "anteriores quedan destrozados.

"Nuestro físico tendrá que descartar, "junto con el principio de inercia, to- "das las leyes mecánicas. El principio "de inercia era su punto de partida; si "éste no vale, tampoco valdrán todas "las conclusiones posteriores. Un obser- "vador recluido toda su vida en la sala "giratoria, y obligado por lo tanto a "realizar en ella todas sus experiencias, "llegaría a leyes de la mecánica dife- "rentes de las nuestras. Si, por otra "parte, entra en el laboratorio con un "profundo conocimiento y una firme "creencia en los principios de la Física, "su explicación de la aparente banca- "rrota de las leyes de la mecánica se "basará en la suposición de que la pie-

" za gira. Con experiencias mecánicas " apropiadas, el investigador podría de- " terminar, inclusive, cómo gira la sala.

" ¿Por qué nos interesamos tanto por " el observador en su laboratorio rodan- " te? Sencillamente porque nosotros, en " nuestra Tierra, estamos en cierto mo- " do en las mismas condiciones. Desde " el tiempo de Copérnico sabemos que " la Tierra gira sobre su eje, en su mo- " vimiento alrededor del Sol. Aun cuan- " do esta simple idea, tan clara para to- " do el mundo, no haya permanecido " intacta durante el progreso de la cien- " cia, dejémosla por ahora y aceptemos " el punto de vista de Copérnico. Si " nuestro observador de la sala gira- " toria no pudo confirmar las leyes de " la mecánica, lo mismo debiera pasar- " nos a nosotros sobre la Tierra; pero la " rotación de la Tierra es comparativa- " mente lenta, por lo cual el efecto no " es muy acentuado. No obstante, hay " varios hechos que indican una peque- " ña desviación de las leyes de la mecá- " nica, y la concordancia de estas dis- " crepancias entre sí puede ser conside- " rada precisamente como una prueba de " la rotación de la Tierra.

" Infortunadamente, es imposible co- " locarnos entre la Tierra y el Sol, para " probar la exacta validez del principio " de inercia y tener una visión de la " rotación de la Tierra. Esto se puede " realizar únicamente en la imaginación. " Todas nuestras experiencias tienen " que ser realizadas sobre la Tierra. " Este hecho se expresa a menudo más " científicamente diciendo: la Tierra es " nuestro sistema de coordenadas . . .

" De todo lo que acabamos de expo- " ner resulta que todos los enunciados " físicos que hasta aquí hicimos eran " incompletos. No nos habíamos perca- " tado del hecho de que todas las obser- " vaciones deben ser realizadas en un " cierto sistema de coordenadas, y en lu- " gar de describir su estructura, hacía- " mos caso omiso de su existencia. Por " ejemplo, cuando escribíamos «un cuer- " po animado de movimiento uniforme», " debíamos realmente haber escrito: «un " cuerpo animado de movimiento uni- " forme, relativo a un determinado sis- " tema de coordenadas . . .» El caso de " la cámara giratoria nos enseñó que los " resultados de las experiencias mecá- " nicas pueden depender del sistema de " coordenadas elegido.

" Las mismas leyes de la mecánica " no pueden ser válidas para dos siste- " mas de coordenadas que giran uno res- " pecto al otro. Por ejemplo, si la su- " perficie del agua de una pileta de na- " tación, formando uno de los sistemas " de coordenadas, es horizontal, la su- " perficie del agua de otra pileta, que " constituye el segundo sistema de coor- " denadas, toma la forma curva caracte- " rística de un líquido que se hace girar " alrededor de un eje.

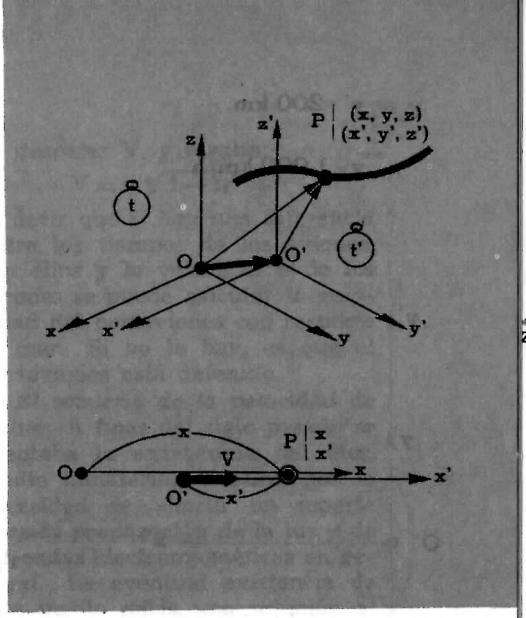
" Al formular las leyes principales de " la mecánica omitimos un punto impor- " tante: No especificamos para qué sis- " tema de coordenadas eran válidas. Por " esta razón, toda la mecánica clásica " está en el aire, pues no sabemos a qué " andamiaje se refiere. Dejemos, sin " embargo, esta dificultad por el mo- " mento. Haremos la suposición, algo " incorrecta, de que las leyes de la me- " cánica valen en todo sistema de coor- " denadas rígidamente unido a la Tierra. " Esto lo hacemos con el objeto de fi- " jar un sistema de coordenadas, elimi- " nando así la ambigüedad a que nos re- " feríamos. Aun cuando nuestra afirma- " ción de que la Tierra es un sistema " de referencia apropiado no es del to- " do exacta, la aceptaremos por el mo- " mento.

" Admitimos, pues, la existencia de " un sistema de coordenadas para el " cual las leyes de la mecánica son vá- " lidas. ¿Es éste el único? Considere- " mos un sistema de coordenadas que " se mueve uniformemente en relación " al «buen» sistema de coordenadas, es " decir, para el cual son válidas las le- " yes de la mecánica. Por ejemplo, un " tren o un vapor ideal, moviéndose " con una suavidad deliciosa a lo largo " de una línea recta, y con una veloci- " dad constante. Sabemos, por la expe- " riencia diaria, que ambos sistemas " son «buenos», que experiencias físicas " realizadas sobre un tren o un vapor " con tal movimiento, dan exactamente " los mismos resultados que si las reali- " záramos sobre la Tierra. Pero si el " tren detiene o acelera repentinamente " su marcha, o si el mar está agitado, " suceden cosas imprevistas. En el tren, " las valijas caen de los estantes; en el " vapor, las mesas y las sillas se despla- " zan de su sitio y los pasajeros se ma- " rean. Desde el punto de vista físico, " esto significa, sencillamente, que las " leyes de la mecánica no pueden ser " aplicadas a dichos sistemas de coor- " denadas, es decir, que son sistemas de " coordenadas «malos».

" Este resultado puede ser expresa-
" do por el llamado *principio de relati-
" vidad de Galileo*, que dice: *Si las le-
" yes de la mecánica son válidas en un
" sistema de coordenadas, entonces tam-
" bién se cumplen en cualquier sistema
" de coordenadas que se mueve unifor-
" memente con relación al primero.*

Si tenemos dos sistemas de coordenadas que se desplazan uno respecto del otro no uniformemente, entonces las leyes de la mecánica no pueden ser válidas para ambos.

Sistemas de coordenadas "buenos", esto es, como dijimos, para los que se cumplen las leyes de la mecánica, se denominan *sistemas inerciales*. El problema de si existe o no un sistema inercial lo dejamos, por ahora, a un lado. Pero *si admitimos la existencia de un sistema tal*, entonces *habrá un número infinito de ellos*. En efecto: *Todo sistema de coordenadas que se mueva uniformemente respecto del primero, es también un sistema inercial.*



Relatividad

La teoría de la relatividad

Solo queremos presentar los primerísimos aspectos de la teoría, y lo hacemos convencidos de que un estudiante secundario con curiosidad está en condiciones de entenderlos.

La posición de un punto, vista desde dos sistemas

Desde Córdoba –donde ubicamos el sistema O (x)– parte un automóvil –donde ubicamos el sistema O' (x')– que se mueve con M. R. U. a 80 km/h. Desde ambos sistemas de referencia se estudia el movimiento de una avioneta que vuela sobre el camino.

Supongamos que desde Córdoba, mediante un radar, se ubica la avioneta a 140 km de distancia, en una medición hecha a la media hora de haber partido el automóvil. Es decir: $x = 140$ km; $t = 0{,}5$ h. Con esos datos el observador ubicado en Córdoba puede calcular cuál es la posición x' de la avioneta medida desde el automóvil:

$$x' = x - V\,t =$$
$$= 140 \text{ km} - 80 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} =$$
$$= 140 \text{ km} - 40 \text{ km} = 100 \text{ km}$$

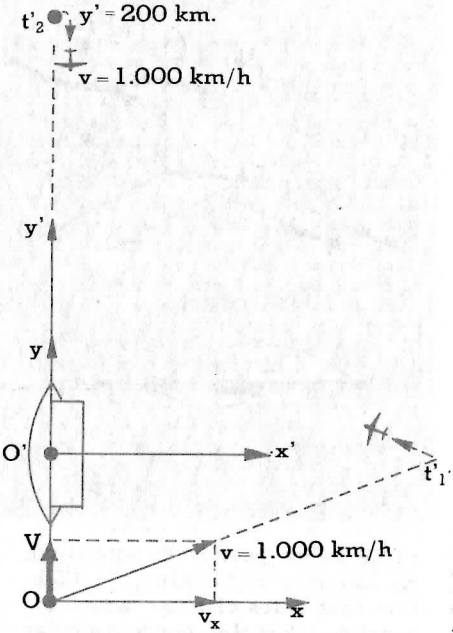
Si el automóvil también está provisto de radar, encontrará que, efectivamente, la posición de la avioneta medida desde el automóvil, es 100 km.

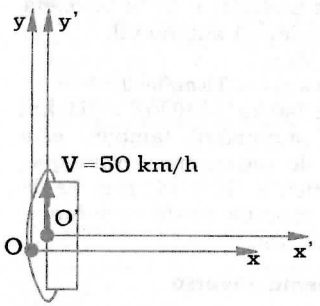
El problema inverso

El problema inverso es el siguiente: el observador del automóvil mide la posición de la avioneta, x', en un instante arbitrario t' después de su partida; conoce la velocidad V' con que Córdoba se aleja y quiere calcular qué posición x medirá el observador de Córdoba.

El mismo razonamiento del problema directo nos dice que ahora

$$x = x' + \text{O O'} =$$
$$= x' - \text{O'O} = x' - \text{V}'t'$$





Como $V' = -V$, *si admitimos* que desde que el automóvil partió de Córdoba su reloj marcha igual que el reloj que quedó en Córdoba, entonces será $t' = t$. Con ello resulta

$$\boxed{x = x' + Vt}$$

Efectivamente: si $x' = 100$ km es la posición medida en el instante $t' = t = 0{,}5$ h, el observador del auto calculará

$$x = 100 \text{ km} + 80 \text{ km/h} \cdot 0{,}5 \text{ h} = 140 \text{ km}$$

El problema del portaviones. Un portaviones –sistema $O'(x', y')$– avanza hacia el norte con una velocidad $V = 50$ *km/h* medida desde tierra –sistema $O(x, y)$–. En un instante dado –en el que se supone que los dos sistemas de coordenadas coinciden– de su cubierta despegan dos aviones, uno hacia el norte y el otro hacia el este, a $v = 1\,000$ *km/h*. Ambos aviones avanzan hasta alejarse a *200 km* del portaviones y regresan a él. Calcular los tiempos empleados por cada avión.

Consideremos el avión que parte hacia el este. Para que se encuentre siempre exactamente al este del portaviones, su $\vec{v}$ debe tener una componente en la dirección norte igual a la velocidad $\vec{V}$ del portaviones. Por tanto, su velocidad tiene una componente hacia el este $v_x = \sqrt{v^2 - V^2}$. Entonces el tiempo que tarda en alejarse 200 km del avión es $t'_1 = 200 \text{ km}/v_x$. Y es evidente que el tiempo de retorno, $t''_1 = t'_1$; por tanto

$$t_1 = t'_1 + t''_1 = 2 \cdot 200 \text{ km}/\sqrt{v^2 - V^2}$$

Consideremos el segundo avión, que vuela hacia el norte. Sea t'_2 el instante en que se encuentra a *200 km* del portaviones; luego emprende el retorno, vuela t''_2 y llega de regreso al portaviones. Medida desde el sistema O' (portaviones), la velocidad del avión es $v - V$, de modo que en alejarse 200 km tarda $t'_2 = 200 \text{ km}/(v - V)$. Por otra parte, el lugar del encuentro, medido desde el sistema O tiene una ordenada y que es igual a lo que avanzó el avión en el tiem-

po t'_2 menos lo que retrocedió en el tiempo t''_2:

$$y = v\,t'_2 - v\,t''_2$$

Por otra parte esa ordenada es igual a lo que ha avanzado el portaviones en el tiempo $(t'_2 + t''_2)$:

$$y = \mathrm{V}\,t'_2 + \mathrm{V}\,t''_2$$

Si igualamos los segundos miembros:

$$v\,t'_2 - v\,t''_2 = \mathrm{V}\,t'_2 + \mathrm{V}\,t''_2$$

es posible despejar t''_2:

$$t''_2 = \frac{v - \mathrm{V}}{v + \mathrm{V}}\,t'_2$$

Como de antes ya conocemos el valor de $t'_2 = 200\ \mathrm{km}/(v - \mathrm{V})$, reemplazando resulta:

$$t''_2 = \frac{200\ \mathrm{km}}{v + \mathrm{V}}$$

Sumando $t'_2 + t''_2$ tenemos el tiempo total que duró el vuelo del avión 2:

$$t_2 = 200\ \mathrm{km}\left(\frac{1}{v - \mathrm{V}} + \frac{1}{v + \mathrm{V}}\right) = 200\ \mathrm{km}\,\frac{2\,v}{v^2 - \mathrm{V}^2}$$

Si hacemos el cociente entre los tiempos empleados por los dos aviones, encontramos:

$$t_1 / t_2 = \sqrt{(v^2 - \mathrm{V}^2)}/v = \sqrt{1 - \mathrm{V}^2/v^2}$$

Por tanto, el avión *1* llega antes de regreso que el *2*; y obsérvese que ello es independiente de la distancia (200 km) que se hayan alejado del navío.

Observación. Si $\mathrm{V} = 0$, entonces $t_1/t_2 = 1$, y los dos aviones regresan simultáneamente. Recíprocamente: si los aviones regresan simultáneamente, el portaviones está detenido, pues $\mathrm{V} = 0$.

De la fórmula anterior se puede despejar V, y resulta:

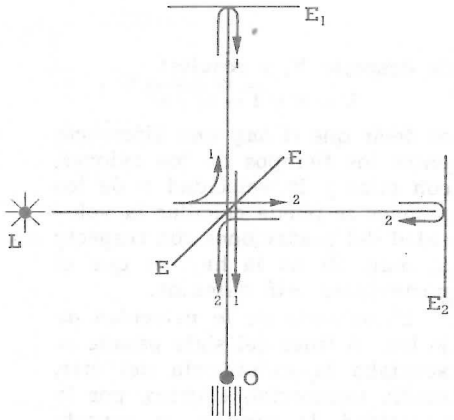
$$\mathrm{V} = v\sqrt{1 - t_1^2/t_2^2}$$

es decir que *si hay una diferencia* entre los tiempos de los aviones, con ellos y la velocidad v de los aviones se puede calcular la velocidad del portaviones con respecto al mar. Si no la hay, es que el portaviones está detenido.

El misterio de la velocidad de la luz. A fines del siglo pasado se aceptaba la existencia del éter, medio inmaterial, elástico, por la necesidad de admitir un soporte para la propagación de la luz y de las ondas electromagnéticas en general. La eventual existencia de este medio daría una solución al problema de la elección de un sistema de coordenadas para describir desde él, como un sistema absoluto, los fenómenos físicos en general, comenzando por los movimientos. Se tendría así un sistema privilegiado, y un movimiento referido a ese sistema sería un movimiento absoluto.

Michelson y Morley, dos físicos norteamericanos, prepararon, a fines del siglo pasado, una delicadísima experiencia para medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter. Si tenían éxito en su trabajo, medirían la velocidad de la Tierra; si no lo tenían, quedaría planteada la duda sobre la existencia misma del éter.

En esencia el experimento está esquematizado en la figura: una fuente luminosa L envía un haz sobre un espejo semitransparente EE; en éste el haz se divide, pues en parte lo atraviesa y en parte se refleja. La primera parte del haz incide sobre el espejo E_1, y la segunda sobre el E_2. Ambas vuelven sobre el EE, y nuevamente



en parte lo atraviesan y en parte se refleja, como consecuencia de lo cual en O, donde está colocado el observador, se tienen dos haces superpuestos, lo que da origen a que se observen franjas de interferencia (tomo II, pág. 141). Estas franjas permitirán decidir si uno de los haces ha viajado con velocidad mayor o menor que el otro... o si ambos se propagaron con la misma velocidad.

El problema es enteramente análogo al del portaviones: el mar y la atmósfera son ahora el éter, en donde viaja el portaviones, que ha sido reemplazado por nuestro planeta, la Tierra. ¿Cuáles son los aviones?, pues los dos rayos de luz que "salen" del espejo EE, se alejan a la distancia $EE_1 = EE_2$ y retornan, mientras la Tierra avanza en el "éter"... ¡si es que éste existe! ¿Dónde están los relojes que miden los tiempos empleados por los aviones, transformados ahora en rayos de luz? Pues en el sistema de franjas de interferencia. La analogía es, pues, completa. Se disponen los espejos de modo que uno de ellos esté en la dirección en que la Tierra avanza en su órbita alrededor del Sol; el otro, transversalmente. Se realiza la experiencia, se observan las franjas... ¡Y SE COMPRUEBA EXPERIMENTALMENTE QUE LOS DOS RAYOS LLEGAN DE VUELTA SIMULTÁNEAMENTE!

Este resultado significa que: o bien, 1) la Tierra está en reposo con respecto al éter (apenas uno piensa en la rotación de la Tierra sobre sí misma, y en la velocidad que debería tener una estrella que está a 1 000 años luz para describir una circunferencia de ese radio en 1 día, para desechar esa posibilidad); o bien, 2) la luz se propaga en todas direcciones con la misma velocidad, independientemente de la velocidad que pueda tener la fuente.

La experiencia se ha repetido, variando una y otra vez las condiciones en que se realiza, en distintas épocas del año, y nunca se ha medido ninguna diferencia entre los tiempos empleados por los dos haces. ¿Será que la diferencia es tan pequeña que el dispositivo experimental preparado por Michelson y Morley es insuficientemente sensible para detectarla? La diferencia es pequeña, en efecto: la velocidad de la luz es 3.10^{10} cm/s; la de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, 3.10^{6} cm/s. Por tanto, $t_1/t_2 = \sqrt{1-(3.10^6/3.10^{10})^2} = \sqrt{1-10^{-8}} = \sqrt{0{,}999\,999\,99} \cong 0{,}999\,999\,98\ldots$ pero Michelson y Morley estaban preparados para detectar esa diferencia, y ¡100 veces menores aún!

¿Qué significa ese resultado negativo? Significa que, independientemente del sistema de coordenadas desde donde se la mida, la luz tiene la misma velocidad para todos los observadores. La conclusión es verdaderamente extraña: ¿Cómo

es posible que si yo arrojo hacia adelante una bala a 1 000 m/s, mientras viajo en un avión a 1 000 m/s, un observador que está en tierra no mida 2 000 m/s? Muchos ejemplos "prácticos" como éste se podrán dar... pero lo que LA EXPERIENCIA PRUEBA es que cuando el proyectil que se arroja es UN RAYO DE LUZ, entonces el comportamiento de éste es tal que cualquier observador que mida la velocidad del rayo de luz encontrará siempre el mismo valor: $c = 3.10^{10}\ cm/s$. No hay discusión: *¡así está hecha la naturaleza...!*

La teoría de la relatividad. El joven Albert Einstein, físico de 25 años, examinó muy cuidadosamente la situación en estos problemas, la experiencia de Michelson, las teorías de los físicos de la época, entre ellos Lorentz, y expuso su teoría de la relatividad en 1905. Partió de dos postulados:

1. *Si se toman como sistemas de referencias dos sistemas que se mueven uno con respecto al otro con movimiento uniforme rectilíneo, las leyes de la física son descriptas desde los dos sistemas mediante conjuntos de ecuaciones que tienen la misma forma.*

Esto significa que no hay ningún sistema de referencia privilegiado.

2. *La velocidad de la luz es la misma medida desde cualquier sistema.*

¿Por qué esperamos tiempos desiguales? En el ejemplo del portaviones calculamos que la razón de los tiempos de los dos aviones es $\sqrt{1-(V/v)^2}$, cuando ambos se alejan a la misma distancia del barco. Como esa razón es diferente de *1*, los tiempos son distintos y por eso esperábamos, como Michelson y Morley, que los rayos de luz no regresaran simultáneamente al espejo. Pero... ¿cuál fue el punto de partida para llegar a esa conclusión? Nuestro punto de partida fueron las fórmulas que permiten calcular la **velocidad del** avión con respecto al mar y con respecto al portaviones, y las que permiten calcular las distancias recorridas por los aviones, medidas desde un sistema fijo al mar y desde un sistema fijo al portaviones. Esas fórmulas, llamadas *transformaciones de Galileo*[1], son

$$\text{TGD}\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases} \qquad v' = v - V$$

$$\text{TGI}\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' \end{cases} \qquad v = v' + V$$

Insistamos: ¿cuál es el problema que resuelven estas fórmulas? Un punto P se mueve con respecto a un sistema O y también con respecto a otro sistema O'. El sistema O', a su vez, se mueve con velocidad V con respecto al O. En el instante t, el observador de O mide la abscisa de P y encuentra el número x. El problema es: con esos datos, y sabiendo que el sistema O' se mueve con velocidad V con respecto al O, calcular qué abscisa atribuirá a P el observador de O', y qué tiempo señalará su propio reloj.

En un instante dado, el punto P lanza un destello luminoso que es visto por los dos observadores, de O y de O', y ambos anotan lo que señalan sus relojes, t y t' respectivamente, lo que señalan

[1] Sólo escribimos una de las 3 coordenadas: TGD = Transformación de Galileo directa; TGI = Transformación de Galileo inversa.

sus abscisas, x y x', respectivamente, y lo que señalan "sus velocímetros", v y v', respectivamente (imaginémoslos dotados de aparatos que permitan leer la velocidad de un punto que se mueve en cada sistema, y llamémoslos velocímetros). Puen bien: las TGD permiten *calcular* lo que se mide en O' *conociendo* lo que se mide en O; las TGI permiten *calcular* lo que se mide en O *conociendo* lo que se mide en O'. Hagamos resaltar una cosa: las TG dicen algo que *"es trivial"*, que el tiempo transcurre lo mismo en un sistema que en el otro ($t = t'$), lo cual parece una perogrullada, y es tan sólo una inexactitud... En efecto: el resultado negativo de la experiencia de Michelson y Morley indica que las fórmulas usadas y que hacen esperar una diferencia en los tiempos de llegada de los dos rayos de luz, están mal; y están mal, simplemente porque los rayos de luz regresan simultáneamente, *probado experimentalmente*. Y entonces, ¿cuál es la transformación correcta? La siguiente, debida a Lorentz, en donde c es la velocidad de la luz[1].

$$\text{TLD} \begin{cases} x' = \dfrac{x - \mathrm{V}t}{\sqrt{1 - \mathrm{V}^2/c^2}} \\ t' = \dfrac{t - \mathrm{V}x/c^2}{\sqrt{1 - \mathrm{V}^2/c^2}} \end{cases} \qquad v' = \frac{v - \mathrm{V}}{\sqrt{1 - \dfrac{v\,\mathrm{V}}{c^2}}}$$

$$\text{TLI} \begin{cases} x = \dfrac{x' + \mathrm{V}t'}{\sqrt{1 - \mathrm{V}^2/c^2}} \\ t = \dfrac{t' + \mathrm{V}x'/c^2}{\sqrt{1 - \mathrm{V}^2/c^2}} \end{cases} \qquad v = \frac{v' + \mathrm{V}}{\sqrt{1 + \dfrac{v'\,\mathrm{V}}{c^2}}}$$

Seguramente lo más extraño de estas transformaciones es la afirmación que si un acontecimiento duró t segundos en un sistema, en otro sistema, cuya única diferencia con el primero es que se mueve con respecto a él, la duración t' del *mismo* acontecimiento NO es la misma.

Cómo se usan las TL
La contracción de una longitud

EJEMPLO. Se tiene una barra rígida AB cuya longitud se quiere medir desde dos sistemas, O y O', el segundo de los cuales se mueve con velocidad V con respecto al primero (y éste con $-\mathrm{V}$ con respecto a aquél).

Primer caso: la barra está fija al O. En el sistema O no hay problema, pues cada vez que se lea la abscisa del extremo A se encontrará el número x_1, y cada vez que se lea la abscisa del extremo B se encontrará el número x_2, porque la barra está quieta. Entonces, independientemente de en qué instante t se mida, la longitud es $(x_2 - x_1)$.

En O' la situación es diferente: como la barra se mueve con res-

[1] TLD = Transformación de Lorentz directa; TLI = Transformación de Lorentz inversa.

pecto a O', el mismo extremo A tendrá diferentes abscisas a medida que el tiempo transcurre. En un instante t'_1 se mide la posición de A y se obtiene x'_1; si la posición de B se mide en *otro* instante $t'_2 \neq t'_1$, se encontrará una abscisa x''_2, pero $(x''_2 - x'_1)$ NO ES LA LONGITUD de la regla, porque entre t'_1 y t'_2 ella se ha movido... Es claro, entonces, que para medir la longitud de la regla desde el sistema que está en movimiento, es *esencial* que las lecturas de las abscisas de los extremos se hagan simultáneamente, en el mismo instante t'. Teniendo presente esta observación y examinando las TL se advierte que la que conviene usar para calcular $(x'_2 - x'_1)$ es la TLI, pues en ella figura t' y se puede imponer $t'_1 = t'_2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + V t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x_2 &= \frac{x'_2 + V t'_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Demos valores numéricos: sea $x_2 - x_1 = 100$ cm; $V = 10^5$ km/s = 10^{10} cm/s. Entonces es $\sqrt{1 - V^2/c^2} = \sqrt{1 - (10^{10}/3.10^{10})^2} = \sqrt{1 - 1/9} =$

$$= \sqrt{\sqrt{8/9}} \cong \sqrt{0{,}8889} \cong 0{,}94.$$

Luego, $$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) \cdot 0{,}94 = 94 \text{ cm}$$

La misma barra que medida en reposo (desde O) tiene una longitud de 100 cm, medida en movimiento (desde O') tiene una longitud de 94 cm. ¡Pero obsérvese que la velocidad del movimiento es ⅓ de la de la luz! Para velocidades del orden de las de los más veloces aviones o aun cápsulas espaciales, las diferencias de longitudes son pequeñísimas: de ahí que no estemos acostumbrados a ellas, y nos sorprendemos.

OBSERVACIÓN: Supongamos que, inadvertidamente, usáramos la TLD de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} x'_2 &= \frac{x_2 - V t_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x'_1 &= \frac{x_1 - V t_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

que se contradice con el resultado anterior, pues sería $x'_2 - x'_1 = 100 \text{ cm}/0{,}94 \cong 106$ cm. ¿Dónde está el error? Al restar y anular $V t_2 - V t_1$ estamos admitiendo que $t_2 = t_1$, o sea que la medición en O se hace leyendo simultáneamente las abscisas de ambos extremos,

Pero si examinamos la transformación de tiempos advertiremos que el reloj de O′ señala

$$t'_1 = \frac{t_1 - V x_1/c^2}{1 - V^2/c^2}$$

cuando el observador de O′ ve al observador de O leer la abscisa x_1 en el instante t_1; y el mismo reloj de O′ señala

$$t'_2 = \frac{t_2 - V x_2/c^2}{1 - V^2/c^2}$$

cuando el observador de O′ ve al observador de O leer la abscisa x_2 en el instante t_2.

La lectura de abscisas por el observador de O es simultánea en O, pero no es simultánea en O′, pues si bien $t_1 = t_2$, es $x_1 \neq x_2$ y así resulta $t'_1 \neq t'_2$.

Ello se debe a que para leer simultáneamente el observador de O usa –naturalmente– rayos de luz, y el hecho de que ellos se propagan con la misma velocidad c con respecto a los dos sistemas, provoca esta sorpresa.

Segundo caso: la barra está fija al O′. ¿Cómo verá ahora el observador O a la barra fija en O′? Pues también la verá contraída. En efecto: consideremos la T L D, pues en ella figura el tiempo medido en el sistema con respecto al cual la barra se mueve, y se debe exigir que la medición se haga simultáneamente en los dos extremos: $t_1 = t_2$.

Tendremos, entonces:

$$\left.\begin{aligned} x'_2 &= \frac{x_2 - V t_2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ x'_1 &= \frac{x_1 - V t_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \quad x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

... ¡y ahora es el observador O que encuentra que la barra se ha contraído a 94 cm!

En general, entonces, si un cuerpo medido en reposo tiene una longitud L_o medido cuando se mueve con velocidad V tiene una longitud L

$$\boxed{L = L_o \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Ésta es la llamada *contracción de Lorentz* de las longitudes.

Observación: Sean dos barras exactamente iguales. Una la entregamos al observador O, la otra al O′. Los sistemas se ponen en movimiento y pedimos información a los observadores:

Informe de O: MI barra mide 100 cm; la del sistema O′ mide 94 cm.

Informe de O′: MI barra mide 100 cm; la del sistema O mide 94 cm.

La mayor velocidad es la de la luz

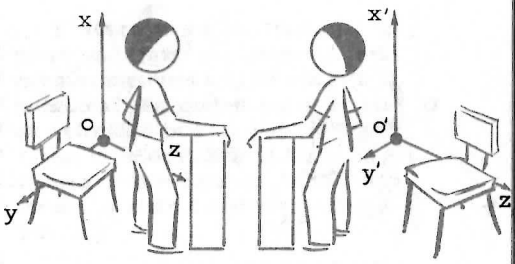
Supongamos que uno de los sistemas alcanzara la velocidad de la luz. En ese caso sería $V = c$, y se advierte que la longitud de una barra que se moviera con esa velocidad sería... ¡nula!

Ningún cuerpo puede, por tanto, alcanzar y menos superar, la velocidad de la luz.

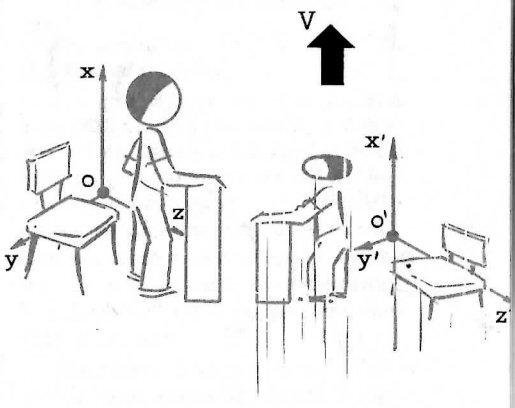
La dilatación del tiempo

Imaginemos un péndulo oscilando en el sistema O, en un lugar de abscisa x_1. El observador del sistema ve que la aguja de su reloj señala el instante t_1 cuando el péndulo cruza por su posición de equilibrio, y que señala al instante t_2 cuando vuelve a cruzarla cumpliendo 1 oscilación. El período del péndulo es, por tanto, $t_2 - t_1$. Observemos que durante todo el tiempo el péndulo (digamos su soporte, para mayor claridad) ha estado ubicado en el punto de abscisa x_1 (hacemos abstracción del movimiento de la masa pendular).

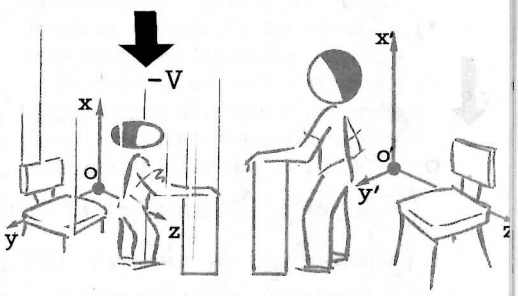
El observador del sistema O' también mide el período del mismo péndulo; él ve que su reloj señala t'_1 cuando ve que el péndulo cruza su posición de equilibrio, y también ve que en ese instante la abscisa es x'_1. Luego ve que la aguja de su reloj señala t'_2 cuando se cumple una oscilación, y que –como el péndulo en este sistema se mueve– en este instante la abscisa del péndulo es x'_2.



En reposo



Lo que ve O.



Lo que ve O'

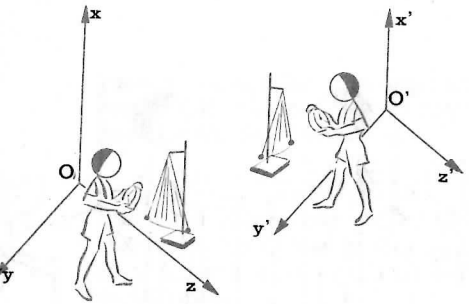
Usemos la TLD:

$$t'_2 = \frac{t_2 - V x_2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

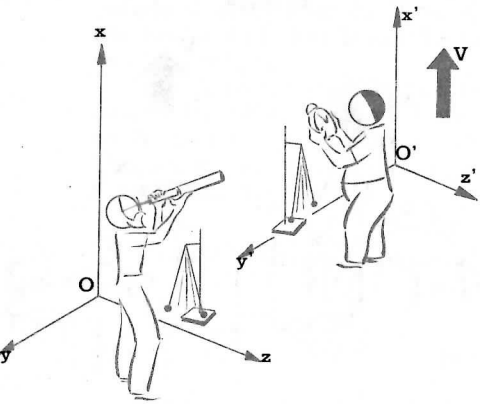
$$t'_1 = \frac{t_1 - V x_1/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\therefore\ t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

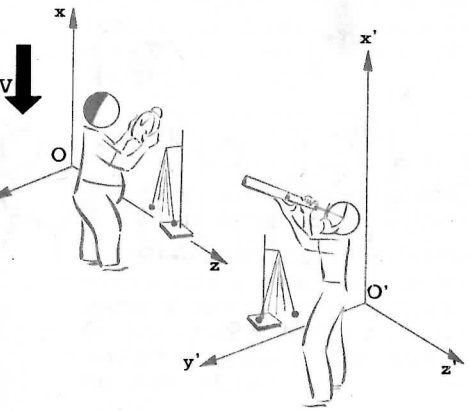
pues $x_1 = x_2$



Los dos sistemas están en reposo.



a) Lo que muchos años después ve O con un poderoso telescopio.



b) Lo que muchos años después ve O' con un poderoso telescopio.

Es decir que la duración $T = t_2 - t_1$ de la oscilación del péndulo medida desde el sistema O, y la duración del mismo fenómeno, $T' = t'_2 - t'_1$ medida desde el sistema O' en movimiento con respecto a O, NO SON IGUALES. El tiempo depende desde donde se lo mida.

EJERCICIO: Dejamos como ejercicio al lector verificar que si se lleva el mismo péndulo al sistema O' y se lo fija en él, será el observador de O quien lo vea oscilar más lentamente.

EJEMPLO: Calculemos el período T' que se mide desde O', de un péndulo que fijo en O tiene un período T medido desde O. (Supongamos que los sistemas son los del ejemplo de pág. 207, o sea $V = 10^{10}$ cm/s).

De acuerdo con la TLD:

$$T' = T / \sqrt{1 - V^2/c^2} =$$
$$= 2 \text{ s} / 0{,}94 = 2{,}13 \text{ s}$$

OBSERVACIÓN: Sean dos péndulos exactamente iguales. Medidos los dos en reposo tienen un período $T = 2$ *segundos*. Uno de ellos se lo entregamos al observador O; el otro al O'. Se ponen en movimiento los sistemas, y pedimos información a los observadores:

Informe de O: *MI péndulo tiene un período* $T = 2$ *segundos; al de O' lo veo oscilar más lentamente: tiene un período de 2,13 segundos.*

Informe de O': *MI péndulo tiene un período* $T' = 2$ *segundos; al de O lo veo oscilar más lentamente: tiene un período de 2,13 segundos.*

Todos estos problemas resueltos por la Teoría de la Relatividad no son pura especulación teórica sin validez en la vida diaria, por

una razón muy simple: la física moderna ha invadido la vida diaria. Son muchos los países que tienen ciclotrones, y para que el ciclotrón funcione bien, las órbitas de las partículas aceleradas deben ser calculadas con las fórmulas de la relatividad de Einstein; si se usaran las de Galileo, simplemente el ciclotrón no andaría. El lector puede pensar: "bueno, pero ¡qué me interesa a mí, hombre de la calle, la órbita de una partícula en un ciclotrón! ... que se ocupen los físicos de ella". Efectivamente, los físicos son quienes se ocupan de ella, y así pueden preparar los radioisótopos con que el médico trata una enfermedad... ¡de ese mismo hombre de la calle!; o el ingeniero agrónomo estudia la fisiología de un cereal y obtiene mejores especies. Y así se pueden multiplicar los ejemplos.

En el campo de la física se puede dar un ejemplo bien demostrativo de lo INDISPENSABLE que es usar esta teoría para explicar lo que ocurre en la naturaleza. En efecto:

Ejemplo: la vida media de un mesón μ. Los rayos cósmicos al chocar con los núcleos de los átomos de la atmósfera, crean, a unos 10 km de altura, una clase de partículas llamadas *mesones* μ, cuya existencia dura alrededor de $t' = 2 \cdot 10^{-6}$ *segundos.*

Y ahora viene la paradoja: al nivel del mar se observan esos mismos mesones μ. ¿Dónde está la paradoja? En que, a pesar de que su velocidad es $V' = 2{,}99 \cdot 10^{10}$ *cm/s* (¡casi la velocidad de la luz!), en el tiempo t' que dura su "vida" cada mesón alcanza a recorrer una distancia h':

$$h' = V t' = \\ = 2{,}99 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \\ = 5{,}98 \cdot 10^{4} \text{ cm} \cong 600 \text{ m}$$

y sin embargo han "nacido" ¡a 10 000 m de altura!

Lo que ocurre es que lo que hemos llamado *vida media del mesón* es un lapso medido desde un sistema con respecto al cual el mesón está en reposo, al que llamaremos *sistema de la partícula.* Con respecto a ese sistema la Tierra se mueve con la velocidad $V = 2{,}99 \cdot 10^{10}$ cm/s de período, medido en reposo.

Entonces, ¿cuánto dura la "vida" del mesón medida desde la Tierra?; es decir, medida desde un sistema con respecto al cual el mesón está en movimiento. Recordando el ejemplo de los péndulos, podremos prever que el reloj fijo a la Tierra marcará una duración t mayor que la duración t' que marcará el reloj fijo a un mesón en movimiento. En efecto:

$$t = t' / \sqrt{1 - V^2/c^2} = 2.10^{-6}\text{s} / \sqrt{1 - (2{,}99/3)^2} = 2.10^{-6}\text{s} / \sqrt{1 - 0{,}997^2} = \\ = 2.10^{-6}\text{s} / \sqrt{1 - 0{,}994} = 2.10^{-6}\text{s} / \sqrt{0{,}0060} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ segundos.}$$

Y en ese tiempo el mesón recorre una distancia h que, medida desde la Tierra, vale:

$$h = V t = 2{,}99 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \cdot 25 \cdot 10^{-6}\text{s} \cong 75 \cdot 10^{4} \text{ cm} \cong 7\,500 \text{ m}$$

... y la paradoja se desvaneció.

La masa de un cuerpo no es constante

Otra de las conclusiones sorprendentes de la teoría es que la masa de un cuerpo no es algo invariable cuya medida es constante e independiente de dónde y cuándo se la mida. Por el contrario, la masa de un cuerpo depende del sistema desde donde se la mida. Tampoco aquí deduciremos la fórmula que vincula la masa de un cuerpo con la velocidad del sistema desde donde se la mide, sino que aprenderemos a usarla. Si un cuerpo tiene una masa m medida desde un sistema con respecto al cual el cuerpo está en reposo, la masa m' medida desde otro sistema que se mueve con velocidad V con respecto al primero es

$$m' = m / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

EJEMPLO: *La masa de un electrón, medida desde un sistema con respecto al cual el electrón está en reposo, es* $m = 9.10^{-28}$ *g. Mediante un acelerador de electrones, se bombardea un blanco con electrones que han alcanzado una velocidad* $V = 2{,}99.10^{10}$ *cm/s. Calcular su masa medida desde el sistema del laboratorio.*

Calculando resulta:

$$\sqrt{1 - V^2/c^2} \cong 0{,}08\,;$$

por tanto será:

$$m' = m/0{,}08 = 9.10^{-28}\,g/8.10^{-2} = 1{,}1.10^{-26}\,g$$

Es evidente, como ya lo hemos señalado, que las variaciones que introduce el factor $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ se hacen apreciables sólo cuando las velocidades son una fracción apreciable de la velocidad de la luz. Sugerimos al lector que haga una tabla con el valor de la raíz para velocidades iguales a 1 %, 5 %, **10 %, 50 %**, 90 %, 99 % y 99,99 % de la de la luz.

OBSERVACIÓN: Si un cuerpo pudiera alcanzar la velocidad de la luz, su masa sería infinita, porque la raíz se anula.

Masa y energía

Otra de las conclusiones de la teoría de la relatividad es que la masa y la energía son equivalentes, es decir, que la masa se puede transformar en energía, y recíprocamente. La fórmula que las vincula es

$$E = mc^2$$

que significa que si un cuerpo de masa m se pudiera transformar íntegramente en energía, la cantidad de energía obtenida sería ésa. Por ejemplo, si se pudiera transformar íntegramente en energía *1 gramo*, se obtendrían

$$E = 1\,g \cdot (3.10^{10}\,cm/s)^2 = 1\,g \cdot 9.10^{20}\,cm^2/s^2 = 9.10^{20}\,erg = 9.10^{15}\,J =$$
$$9.10^{15} \cdot 3.10^{-7}\,kWh = 27 \cdot 10^{12}\,kWh$$

Si esa transformación se realizara en 1 segundo, la potencia empleada sería

$$P = 75.10^8\,kW$$

Para comparar, digamos que todas las usinas de Buenos Aires realizan juntas, diariamente, un trabajo (o sea consumen una ener-

gía) de 10^5 kWh, aproximadamente. En 1 gramo de materia hay, pues, una energía de $27.10^{12}/10^5 = 27 \cdot 10^7 =$ ¡270 millones de veces mayor!

La energía en reposo. La energía $E = mc^2$ es la que tiene una masa m en donde la masa ha sido medida desde un sistema cualquiera. Si la masa se mide desde un sistema con respecto al cual ella está en reposo, el valor que se obtiene es m_o y a ese valor lo llamamos *masa en reposo* del cuerpo en cuestión.

Esto significa que la energía de un cuerpo medida en reposo es

$$E_o = m\,c^2 - m_o\,c^2$$

Entonces la diferencia entre la energía de un cuerpo cuando está en movimiento y cuando está en reposo es

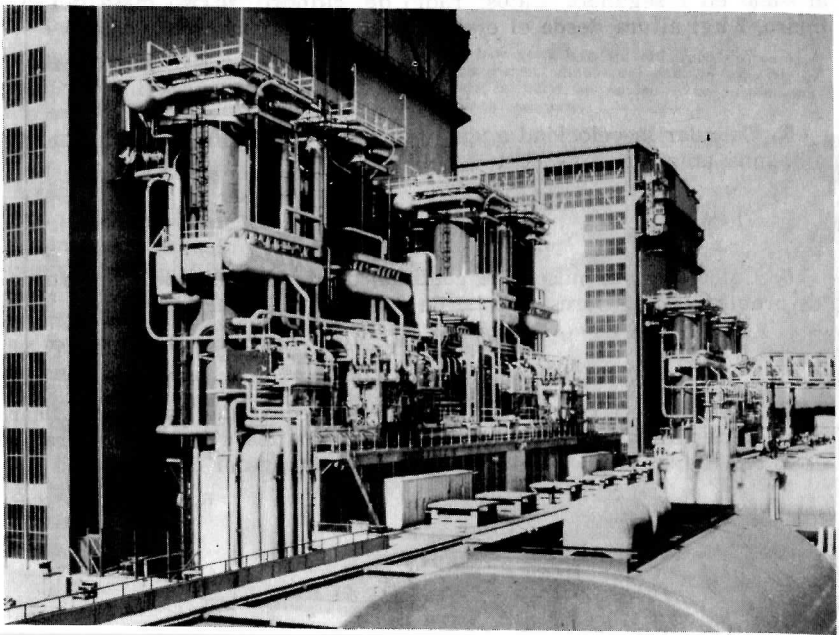
$$\Delta E = E - E_o = mc^2 = m_o c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,c^2 - m_o c^2$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\,V^2/c^2$, resulta aproximadamente

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\,m_o c^2$$

y este resultado es muy reconfortante porque... ¿qué otra cosa es el exceso de la energía en movimiento sobre la energía en reposo, sino la familiar energía cinética?

Parte de una fábrica productora de plutonio, en Marcaule (Francia).



Problemas

1. Una esferita de 2 cm de radio y 250 g de masa gira alrededor de un eje que está a 2 m de su centro. En cierto momento se le aplica una fuerza de 2 $\vec{kg}$, perpendicularmente al plano determinado por el eje de rotación con la esfera. ¿Qué aceleración angular adquiere la esfera?

R.: $\gamma = 39{,}2\ \frac{1}{s^2}$

2. Calcular qué ángulo, en grados sexagesimales, describe la esferita del problema 1, en 2 segundos.

R.: 78,4 radianes $\cong$ 4 492°

3. ¿Es grande el error que se comete en el problema anterior, al considerar la esferita como un punto? *a)* En caso que se quiera calcular el ángulo solamente en grados; *b)* hasta minutos.

R.: *a)* no; *b)* sí: más de 9'

4. Un cilindro colocado horizontalmente puede girar alrededor de su eje. En su periferia se enrolla un hilo, del que se hace pender una pesa que pone en movimiento al cilindro. Se quiere que la pesa llegue al suelo en 1 segundo. Datos: radio del cilindro, 10 cm; masa del cilindro, 2 kg; altura desde el eje hasta el suelo, 60 cm.

R.: $\mathbf{F} = 122{,}4\ \vec{g}$

5. Calcular la velocidad angular final de la rotación del cilindro del problema anterior.

R.: $\omega = 12\ \frac{1}{s}$

6. Calcular el impulso y la cantidad de movimiento del cilindro de los problemas anteriores al cabo de 0,5 segundos y al final.

R.: 0,00612 $\vec{kg} \times m \times s$; 0,01224 $\vec{kg} \times m \times s$

7. Una bicicleta corre a 18 km/h. Sus ruedas, que para simplificar suponemos cilíndricas y homogéneas, tienen una masa de 2 kg y un radio de 25 cm. Calcular la cantidad de movimiento angular de cada una.

R.: $1{,}25\ kg \times m^2 \times \frac{1}{s}$

17 ESTÁTICA

¿Qué es la estática?

De acuerdo con lo estudiado en los capítulos correspondientes, la dinámica estudia las relaciones entre la fuerza, o la cupla, aplicada a un cuerpo, y la aceleración, de traslación o de rotación, respectivamente, que éste adquiere. *La estática*, en cambio, *estudia las condiciones que deben cumplirse para que un cuerpo sobre el que actúan fuerzas o cuplas, o fuerzas y cuplas a la vez, quede en equilibrio.* Pero, ¿qué significa que un cuerpo está en equilibrio?

DEFINICIÓN: *Un cuerpo está en equilibrio cuando se halla en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.*

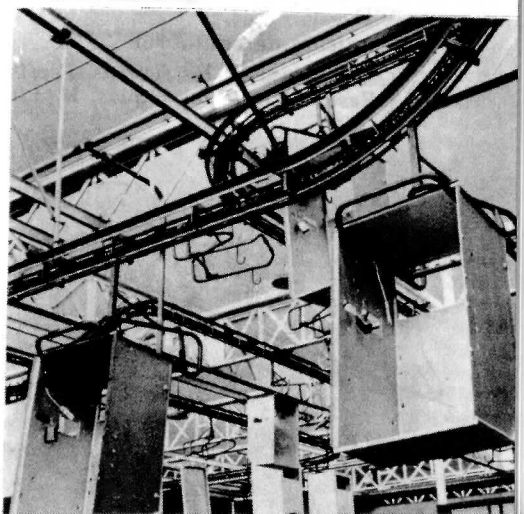
En dinámica llegamos a la conclusión[1] de que un cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme cuando sobre él no actúa *ninguna fuerza.* Sin embargo, es evidente que un cuerpo puede estar sometido a dos fuerzas, o a dos cuplas, y seguir en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme; más todavía: en los trenes y automóviles, para que el movimiento sea rectilíneo y uniforme, es imprescindible la fuerza del motor para anular el rozamiento. Pero la contradicción es sólo aparente. Veamos:

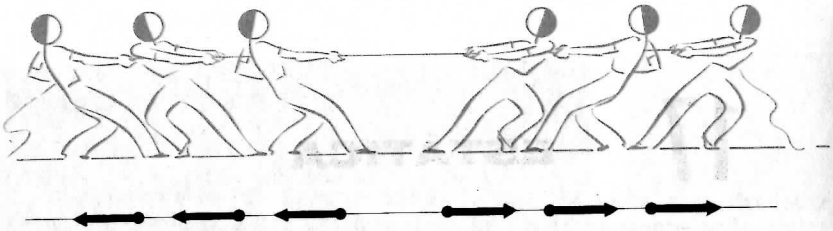
[1] Ver pág. 149.

Sistema de fuerzas o de cuplas

Se dice que un cuerpo está sometido a un *sistema* de fuerzas, o de cuplas, cuando está sometido a varias fuerzas, o a varias cuplas.

Cinta transportadora en una línea de montaje de gabinetes: un cuerpo está en equilibrio cuando se halla en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.





Vectores con la misma recta de acción y sentidos opuestos.

Resultante de un sistema

Siempre es posible hallar una fuerza, o una cupla, que aplicada al cuerpo produzca exactamente el mismo efecto que todo el sistema. Esa fuerza, o cupla, única, se llama *resultante del sistema.*

Está claro, ahora, que si la resultante del sistema es nula, a pesar de haber aplicadas allí todo un conjunto de fuerzas o de cuplas, el cuerpo seguirá en equilibrio.

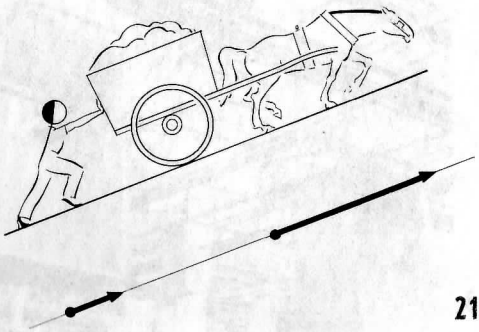
Condición general de equilibrio

Para que un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas y a un sistema de cuplas esté en equilibrio, la resultante de las fuerzas y la resultante de las cuplas deben ser nulas.

Condición de equilibrio

$$\begin{cases} \textit{Resultante de las fuerzas}, \ R = 0. \\ \textit{Resultante de las cuplas}, \ M = 0. \end{cases}$$

En símbolos:



Vectores con la misma recta de acción y el mismo sentido.

Por lo tanto, el problema por resolver, para poder determinar el equilibrio de un cuerpo, consiste en calcular las resultantes de fuerzas y de cuplas. Felizmente es sencillo, y ya conocemos las soluciones en varios casos. En efecto: tanto las fuerzas como las cuplas son *vectores*, de modo que para hallar la resultante hay que componerlos, tal como se componen los vectores, ya sean velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc.

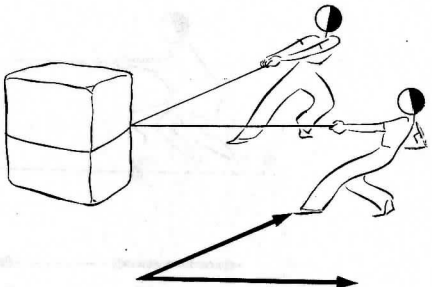
Resultante de un sistema de vectores

Se presentan diversos casos:

1. Todos los vectores tienen la misma recta de acción:
   a) con sentido opuesto;
   b) con el mismo sentido.
2. Todos los vectores son concurrentes.
3. Todos los vectores son paralelos:
   a) tienen el mismo sentido;
   b) tienen sentidos opuestos.
4. Los vectores son cualesquiera.

Cuerpo rígido. Un cuerpo es rígido cuando no se deforma por grandes que sean las fuerzas apli-

cadas, es decir, cuando la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos permanece invariable. En todo lo que sigue sólo trataremos de fuerzas aplicadas a cuerpos rígidos.



Vectores concurrentes.

Vectores con la misma recta de acción y sentidos opuestos

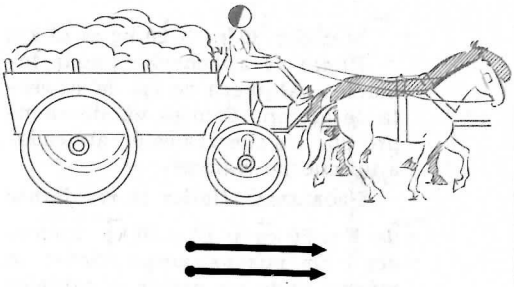
Tal como vimos en el caso de composición de velocidades, aceleraciones, etc., la resultante de dos vectores que tienen la misma recta de acción[1] y sentidos opuestos tiene las siguientes características:

Recta de acción: la de las componentes;

Sentido: el de la componente mayor;

Medida: la diferencia de las medidas de las componentes;

Punto de aplicación: cualquiera de los de su recta de acción.



Vectores paralelos y del mismo sentido.

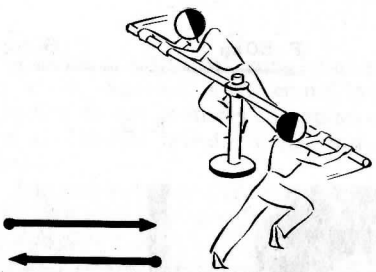
Fuerzas

PROBLEMA: *Dos chicos juegan una cinchada; el de la izquierda tira con una fuerza* $F = 20\ \vec{kg}$, *y el de la derechа, con* $F' = 30\ \vec{kg}$. *Hallar gráficamente la resultante.* (Hacer el dibujo, a escala; por ejemplo, $E = 10\ \vec{kg}/cm$).

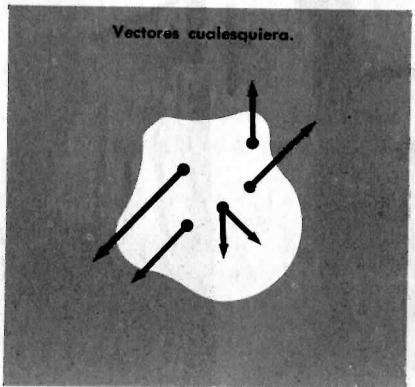
Es evidente que gana el de la derecha por $10\ \vec{kg}$; la resultante tiene, pues, las siguientes características:

Recta de acción: la de las componentes (señalada por la soga);

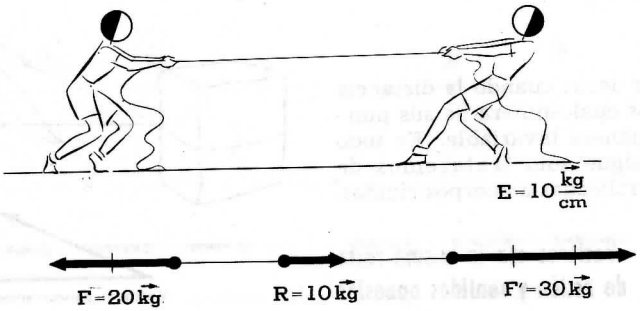
Sentido: el de la mayor fuerza (hacia la derecha);



Vectores paralelos y de sentidos opuestos.



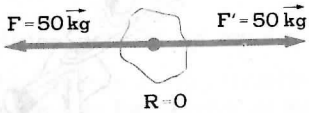
[1] No bastaría decir "la misma *dirección*", pues podrían ser rectas paralelas pero no coincidentes, y el problema sería distinto.



Medida: 30 kg $-$ 20 kg $=$ 10 kg;

Punto de aplicación: puede tomarse cualquiera de los de su recta de acción. Esto es válido siempre que las fuerzas estén aplicadas a un cuerpo rígido.

PROBLEMA: *Hallar la resultante de* $F = 50\ kg$ *y* $F' = 50\ kg$, *aplicadas a un mismo cuerpo; tienen la misma recta de acción y sentidos opuestos.* (Hacer el dibujo a escala; por ejemplo, E = 25 kg/cm.)



Es evidente que el cuerpo queda en equilibrio, pues la resultante mide 0 kg.

Este resultado, tan sencillo, es sin embargo muy importante, pues nos dice que para equilibrar un cuerpo sometido a una fuerza, basta aplicarle otra igual, con la misma recta de acción y sentido opuesto.

Un cuerpo sometido a dos fuerzas iguales y opuestas está en equilibrio.

Esto explica nuestro interés en saber calcular la resultante de un sistema de fuerzas, pues conociéndola, para que el cuerpo sometido a ese sistema quede en equilibrio, hay que aplicarle una fuerza igual y opuesta a la resultante del sistema.

Cupla con momentos respecto de un mismo eje de rotación.

Cuplas con momentos respecto de un mismo eje de rotación [1]

PROBLEMA: *Un chico quiere abrir una puerta y otro cerrarla. El primero aplica una cupla mediante una fuerza* $F' = 30\ kg$ *que*

[1] Aquí conviene decir cuál es el *eje de rotación* –el mismo que el de los componentes– en lugar de señalar sólo la dirección, pues podría tratarse de ejes paralelos.

dista $d' = 50$ *cm del eje de rotación de la puerta; el otro aplica una cupla mediante una fuerza* $F'' = 40 \vec{kg}$ *a* $d'' = 25$ *cm del eje. Hallar la resultante.* (Hacer la representación gráfica con las siguientes escalas: para las fuerzas, $E_1 = 4 \vec{kg}/mm$; para los momentos, $E_2 = 1\,500 \vec{kg} \cdot cm/cm$).

Gana el primero, pues la cupla que aplica tiene un momento

$M' = F' d' =$

$= 30 \vec{kg} \cdot 50 \text{ cm} = 1\,500 \vec{kg} \cdot \text{cm}$,

mientras que el momento de la cupla aplicada por el segundo vale

$M'' = F'' d'' =$

$= 40 \vec{kg} \cdot 25 \text{ cm} = 1\,000 \vec{kg} \cdot \text{cm}$.

El momento resultante M de las dos cuplas tiene, pues, las siguientes características:

Eje de rotación: el mismo que el de las componentes;

Sentido: el de la cupla mayor, M';

Medida:

$M = M' - M'' = 500 \vec{kg} \text{ cm}$;

Punto de aplicación: es un vector libre; no tiene punto de aplicación determinado.

PROBLEMA: *Hallar el momento resultante de dos cuplas de sentidos opuestos aplicadas a un mismo cuerpo. La primera es producida por un fuerza* $F' = 35 \vec{kg}$ *aplicada a 45 cm del eje de rotación del cuerpo; la segunda, por* $F'' = 63 \vec{kg}$ *aplicada a 25 cm del eje.*

La primera cupla tiene un momento

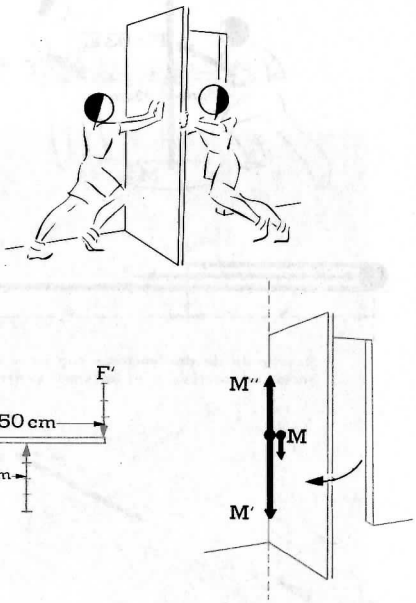
$M' = F' d' =$

$= 35 \vec{kg} \cdot 45 \text{ cm} = 1\,575 \vec{kg} \cdot \text{cm}$,

y la segunda,

$M'' = F'' d'' =$

$= 63 \vec{kg} \cdot 25 \text{ cm} = 1\,575 \vec{kg} \cdot \text{cm}$.



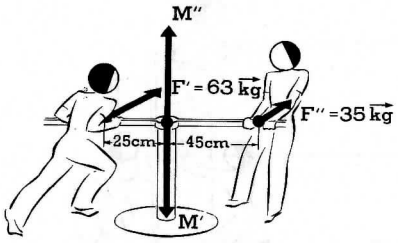
Ambos momentos son iguales en valor absoluto, pero como los sentidos de sus vectores son opuestos, el cuerpo quedará en equilibrio.

Un cuerpo sometido a dos cuplas opuestas e iguales está en equilibrio.

Cuando un cuerpo está sometido a un sistema de cuplas cuya resultante no sea nula, para mantenerlo en equilibrio se deberá introducir una nueva cupla, opuesta e igual a la resultante del sistema.

Vectores con la misma recta de acción y el mismo sentido

La resultante de dos o más vectores con la misma recta de acción y el mismo sentido tiene las siguientes características:



Recta de acción: la misma que los componentes;

Sentido: el mismo que los componentes;

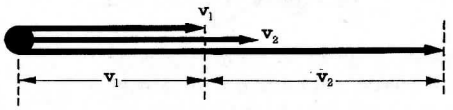
Medida: la suma de las medidas de los componentes;

Punto de aplicación: cualquiera de los de su recta de acción.

Fuerzas

EJ.: *Un caballo tira de un carro con una fuerza de 100 $\vec{kg}$, mientras que el carrero lo empuja con una fuerza de 50 $\vec{kg}$. Hallar la resultante.*

Evidentemente, la resultante tiene la misma recta de acción, el mismo sentido, y mide 150 $\vec{kg}$.

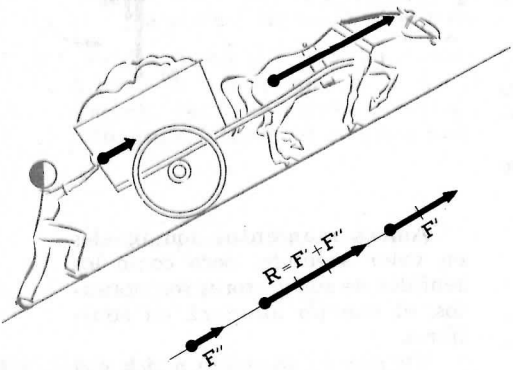


Resultante de dos vectores con la misma recta de acción y el mismo sentido.

Cuplas

EJ.: *Dos hombres, valiéndose de una barra, tratan de levantar un peso, para lo cual uno aplica una fuerza $F' = 50\ \vec{kg}$ a $d' = 1{,}2$ m del centro de rotación, y el otro una $F'' = 60\ \vec{kg}$ a $d'' = 1$ m. Calcular el momento de la cupla resultante.*

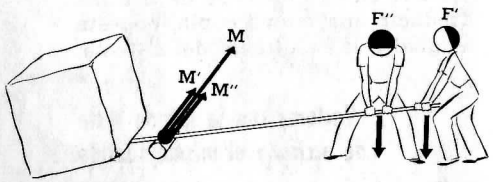
Será:



$$M = M' + M'' = F' \cdot d' + F'' \cdot d'' = 50\ \vec{kg} \cdot 1{,}2\ m + 60\ \vec{kg} \cdot 1\ m =$$
$$= 60\ kg \cdot m + 60\ \vec{kg} \cdot m = 120\ \vec{kg} \cdot m$$

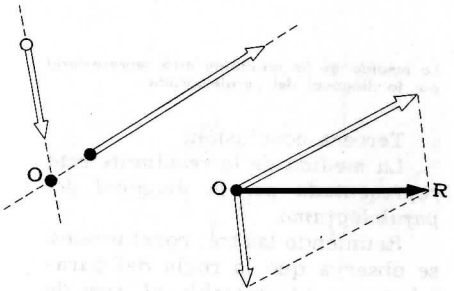
Vectores concurrentes

Composición de dos vectores concurrentes



Dos vectores son concurrentes cuando sus rectas de acción se cortan en un punto.

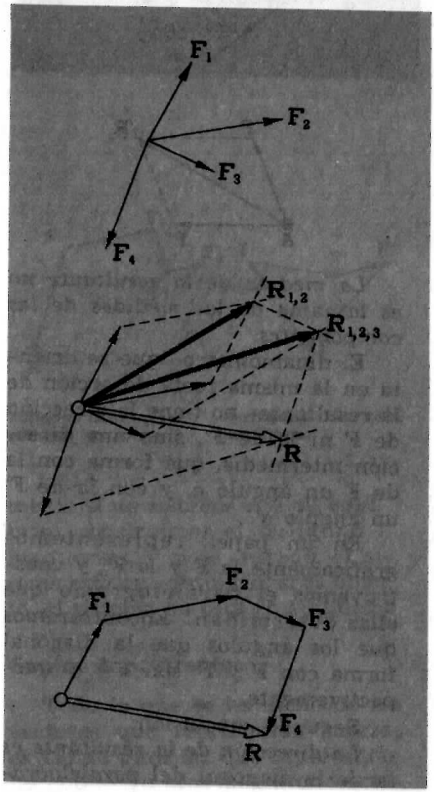
Tal como en el caso de dos velocidades, la resultante de un sistema de dos vectores concurrentes está dada por la diagonal del paralelogramo que ellos determinan.



Composición de dos vectores concurrentes. (Regla del paralelogramo.)

Composición de varios vectores concurrentes

Para hallar su resultante se puede aplicar repetidamente la regla del paralelogramo, o bien construir el polígono de vectores. Es evidente la ventaja de este último método, pues su sencillez disminuye las posibilidades de error.

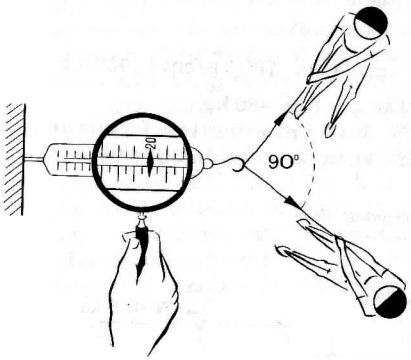


Composición de varios vectores concurrentes. (Polígono de vectores.)

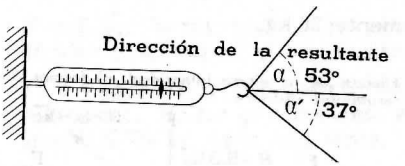
Fuerzas concurrentes

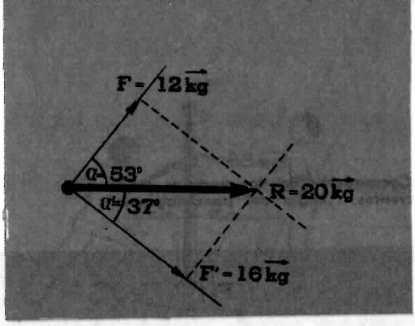
Comprobación de la validez de la regla del paralelogramo. Imagínese un gran dinamómetro con uno de sus extremos fijado en una pared; del otro tiran dos chicos con fuerzas $F = 12\ \vec{kg}$, y $F' = 16\ \vec{kg}$, que forman entre sí un ángulo de 90°. En primer lugar se comprobará que el dinamómetro indica que el sistema aplicado sobre él hace una fuerza de $20\ \vec{kg}$ (intensidad o medida de la resultante).

Primera conclusión:

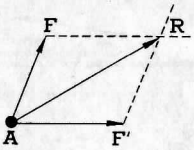


Fuerzas concurrentes actuando sobre un dinamómetro.





La medida de la resultante está representada por la diagonal del paralelogramo.



La medida de la resultante no es la suma de las medidas de las componentes.

El dinamómetro –que se orienta en la misma recta de acción de la resultante– no tiene la dirección de F ni la de F′, sino una dirección intermedia, que forma con la de F un ángulo α, y con la de F′ un ángulo α′.

En un papel, representemos gráficamente la F y la F′, y construyamos el paralelogramo que ellas determinan. Encontraremos que los ángulos que la diagonal forma con F y F′ son α y α′, respectivamente.

Segunda conclusión:

La dirección de la resultante es la de la diagonal del paralelogramo que determinan los vectores F y F′.

Si se mide la longitud de la diagonal del paralelogramo, se observará que en la escala adoptada para representar a las fuerzas equivale a una fuerza de exactamente 20 $\vec{kg}$.

Tercera conclusión:

La medida de la resultante está representada por la diagonal del paralelogramo.

Reuniendo las tres conclusiones, se observa que la regla del paralelogramo es aplicable al caso de la composición de fuerzas concurrentes.

EJ.: *Hallar gráficamente la resultante de las fuerzas* $F = 250\ \vec{kg}$ *y* $F' = 300\ \vec{kg}$, *aplicadas en el punto* A, *que forman entre sí un ángulo de* 60°.

Con una escala apropiada para el dibujo, por ejemplo: $E = 200\ \vec{kg}/cm$, la fuerza F estará representada por un vector de:

$$\frac{F}{E} = \frac{250\ \vec{kg}}{200\ \vec{kg}/cm} = 1{,}25\ cm,$$

y la F′, por otro vector de:

$$\frac{F'}{E} = \frac{300\ \vec{kg}}{200\ \vec{kg}/cm} = 1{,}5\ cm.$$

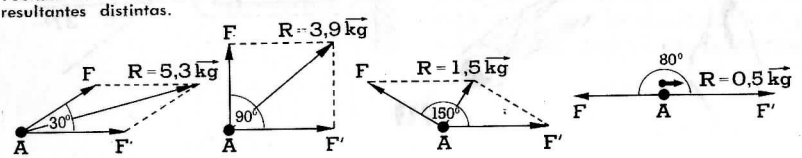
Si dibuja el paralelogramo de las fuerzas, y se traza la diagonal que pasa por el punto de aplicación A; su longitud, que es de 2,4 cm, representa en la escala adoptada una fuerza de:

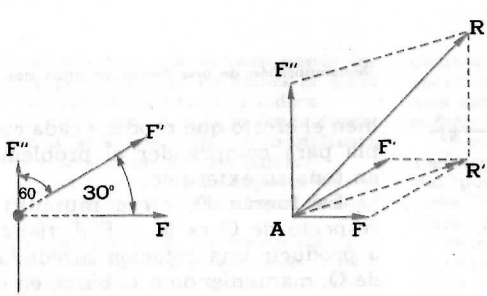
$$R = 2{,}4\ cm \cdot E =$$
$$= 2{,}4\ cm \cdot 200\ \vec{kg}/cm = 480\ \vec{kg}.$$

Luego, $R = 480\ \vec{kg}$.

Si las componentes formaran entre sí un ángulo distinto de 60°,

Fuerzas de la misma intensidad, al formar ángulos distintos, tienen resultantes distintas.

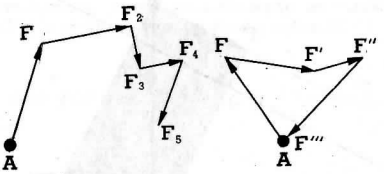




la resultante, como se observa en los dibujos siguientes, sería distinta, tanto en intensidad como en dirección.

EJ.: *Mediante sogas, dos chicos tiran de un carro con fuerzas* $F = 20\ \vec{kg}$ *y* $F' = 20\ \vec{kg}$, *que forman entre sí un ángulo de 120°. Calcular gráficamente la resultante.*

Hágase la representación gráfica, y nadie se sorprenda de que la resultante valga ... también $20\ \vec{kg}$.



Polígono abierto: resultante no nula.

Polígono cerrado: equilibrio.

Composición de varias fuerzas concurrentes

EJEMPLO: *Hallar la resultante del sistema* $F = 2\ \vec{kg}$, $F' = 3\ \vec{kg}$ *y* $F'' = 3{,}5\ \vec{kg}$, *tales que* $\widehat{FF'} = 30°$ *y* $\widehat{F'F''} = 60°$, *por aplicación repetida del paralelogramo de las fuerzas, y por aplicación del polígono de las fuerzas. Comparar ambos métodos.*

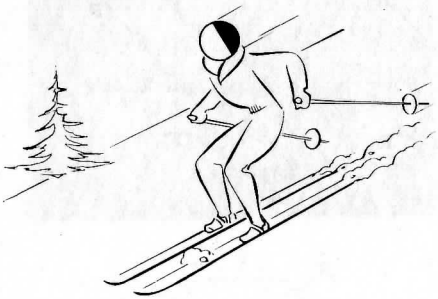
Suponemos que el sistema está aplicado a un cuerpo rígido, de modo que sus puntos de aplicación pueden desplazarse a lo largo de sus respectivas rectas de acción.

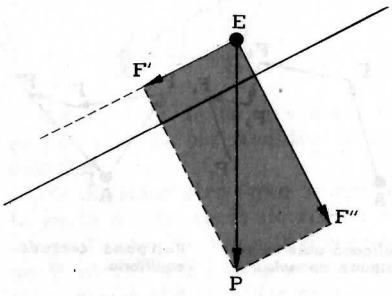
¿Qué significaría el hecho de que el extremo del último vector trazado coincidiera con el punto de aplicación A? Pues que la resultante del sistema es nula, es decir que el sistema está en equilibrio. Hemos descubierto así un método bastante cómodo de saber gráficamente si un sistema está en equilibrio: construimos el polígono de las fuerzas, y si es cerrado, el sistema está en equilibrio; si es abierto, el sistema no está en equilibrio

Cuplas concurrentes

Todo lo que se ha dicho de los vectores que representan fuerzas es válido para los que representan las cuplas (u otra magnitud vectorial cualquiera).

EJ.: *Una barra de 2 m de longitud que puede girar libremente alrededor de uno de sus extremos, que está fijo, está apoyada sobre un plano horizontal. En su extremo libre se aplica una fuerza* $F' = 5\ \vec{kg}$, *horizontal y perpendicular a la barra; y otra fuerza* $F'' = 6\ kg$, *vertical y perpendicular a la barra. Hallar gráficamente el momento de la cupla resultante.*





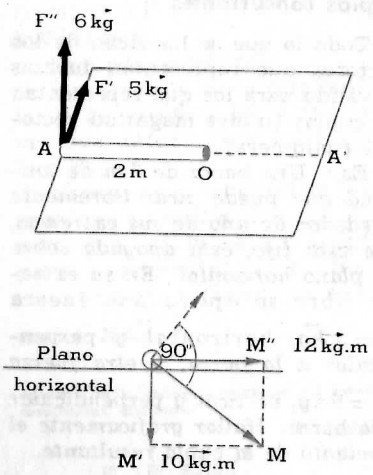
Sabemos que basta construir el paralelogramo y trazar la correspondiente diagonal; luego, la escala nos dará la medida del momento. Pero conviene que observemos bien el efecto que produce cada cupla para comprender el problema en toda su extensión.

La fuerza F', cuyo momento respecto de O es $M' = F' d$ tiende a producir una rotación alrededor de O, manteniendo a la barra en el plano horizontal. El vector momento M' es, pues, vertical.

La fuerza F'', cuyo momento respecto de O es $M' = F' d$, tiende a producir una rotación alrededor de O, manteniendo a la barra en el plano horizontal. El vector momento M' es, pues, vertical.

La fuerza F'', cuyo momento respecto de O es $M'' = F'' d$, tiende a producir una rotación en un plano vertical. Como M'' es un vector perpendicular a ese plano, es horizontal.

El vector momento resultante M es un vector oblicuo; por lo tanto, la rotación de la barra se efectúa en un plano oblicuo perpendicular al vector momento resultante.



Descomposición de una fuerza en otras dos direcciones dadas

Observemos el esquiador de la figura. Desde lo alto de una ladera se ha dejado deslizar, y por su propio peso se va moviendo de manera tal, que a veces alcanza velocidades increíbles [1].

Pero, pensemos un poco en lo que hemos aprendido de física y en lo que acabamos de decir. Sabemos que la *única fuerza* que actúa sobre el esquiador es *su propio peso*, que es una fuerza *vertical* y de sentido hacia abajo. Parecería que en estas condiciones, el cuerpo debería moverse en la dirección y sentido de la fuerza que le está aplicada. Sin embargo, la evidencia es terminante: el esquiador se desliza *paralelamente a la*

[1] En Bariloche, varios esquiadores han superado los 100 km/h.

ladera, mientras que su paso queda señalado por surcos en los cuales la nieve ha sido *aplastada contra la ladera.*

Es decir, que si bien la única fuerza aplicada es el peso, ella se manifiesta descomponiéndose en dos partes:

1, *una fuerza F' paralela a la ladera, y cuyo efecto consiste en hacer deslizar al esquiador;*

2, *una fuerza F'' perpendicular a la ladera, que aprieta al esquiador contra el suelo, y es la que aplasta la nieve a su paso.*

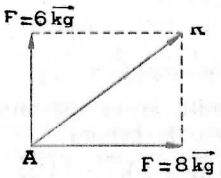
Es evidente, después de haber visto el origen de estas dos fuerzas, que si las componemos, su resultante ha de ser el peso del esquiador.

Pero en nuestro caso, el problema es distinto, y precisamente el opuesto: conocemos el peso del esquiador, y queremos saber cuánto vale la fuerza F' y cuánto la F''.

Para esto basta construir un paralelogramo, del que conocemos una diagonal (el peso), y las direcciones de dos lados consecutivos (una de ellas es paralela a la ladera, y la otra, perpendicular a la misma). Por el extremo de la diagonal se trazan paralelas a los lados, hasta cortarlos; los puntos de intersección determinan, con el punto de aplicación del peso, las componentes buscadas. Es exactamente el mismo caso de descomposición de una velocidad en dos direcciones, y el procedimiento es aplicable a cualquier magnitud vectorial.

PROBLEMAS: *Hallar la resultante de dos fuerzas* $F = 6\ \vec{kg}$ *y* $F' = 8\ \vec{kg}$, *que forman entre sí un ángulo de 90°.*

Solución gráfica



Escala: $4\ \frac{kg}{cm}$

Solución analítica

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2\,FF'\cos \widehat{FF'}$$

$$R^2 = (6\ \vec{kg})^2 + (8\ \vec{kg})^2 + 2{,}6\ \vec{kg} \cdot 8\ \vec{kg} \cdot \cos\ 90^\circ$$

$$R^2 = 36\ \vec{kg}^2 + 64\ \vec{kg}^2 + 0 = 100\ \vec{kg}^2$$

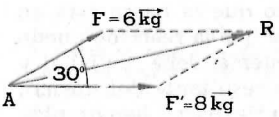
$$R = 10\ \vec{kg}.$$

En este caso, podríamos haber aplicado directamente el teorema de Pitágoras, por tratarse de un triángulo rectángulo:

$$R^2 = F^2 + F'^2.$$

Resolver el mismo problema cuando las fuerzas forman ángulos de: a) 30°; *b)* 150°; *c)* 180°; *d)* 0°.

a) Solución gráfica



Solución analítica

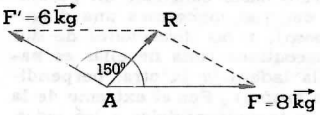
$$R^2 = 36\ \vec{kg}^2 + 64\ \vec{kg}^2 + 2.6\ \vec{kg} \cdot 8\ \vec{kg} \cdot \cos 30^\circ$$

$$R^2 = 36\ \vec{kg}^2 + 64\ \vec{kg}^2 + 2.6\ \vec{kg} \cdot 8\ \vec{kg} \cdot 0{,}866$$

$$R^2 = 100\ \vec{kg}^2 + 83{,}136\ \vec{kg}^2 = 183{,}136\ \vec{kg}^2$$

$$R \cong 13{,}5\ \vec{kg}.$$

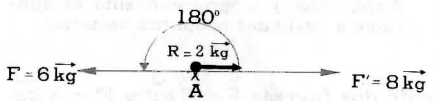
b) Solución gráfica



Solución analítica

$$R^2 = 36\ \vec{kg}^2 + 64\ \vec{kg}^2 + 2.6\ \vec{kg} \cdot 8\ \vec{kg} \cdot \cos 150^\circ$$
$$R^2 = 100\ \vec{kg}^2 + 2.6\ \vec{kg} \cdot 8\ \vec{kg} \cdot (-8{,}66)$$
$$R^2 = 100\ \vec{kg}^2 - 96\ \vec{kg}^2 \cdot 0{,}866$$
$$R^2 = 100\ \vec{kg}^2 - 83{,}136\ \vec{kg}^2$$
$$R^2 = 16{,}864\ \vec{kg}^2$$
$$R \cong 4{,}1\ \vec{kg}.$$

c) Solución gráfica



Solución analítica

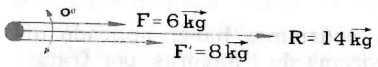
Se está en un caso límite: las fuerzas son opuestas; por lo tanto:

$$R = F' - F = 8\ \vec{kg} - 6\ \vec{kg} = 2\ \vec{kg}.$$

A pesar de ser un caso límite, la fórmula general sigue siendo válida:

$$R^2 = 64\ \vec{kg}^2 + 36\ \vec{kg}^2 + 2.8\ \vec{kg} \cdot 6\ \vec{kg} \cdot \cos 180^\circ =$$
$$= 100\ \vec{kg}^2 + 2.8\ \vec{kg} \cdot 6\ \vec{kg} \cdot (-1) = 100\ \vec{kg}^2 - 96\ \vec{kg}^2 = 4\ \vec{kg}^2$$
$$R = 2\ \vec{kg}.$$

d) Solución gráfica



Solución analítica

Otro caso límite, en el que también vale la fórmula general:

$$R = F + F' = 6\ \vec{kg} + 8\ \vec{kg} = 14\ \vec{kg}.$$

Estos problemas evidencian que la resultante depende no sólo de la intensidad de las componentes, sino también del ángulo que forman.

Composición de fuerzas paralelas y del mismo sentido

El problema que nos proponemos resolver consiste en determinar la resultante de un sistema de fuerzas paralelas y del mismo sentido. Existe una manera sencilla de conseguir fuerzas paralelas para hacer experiencias: los pesos de los cuerpos en un mismo lugar.

Consideremos una barra rígida apoyada en su punto medio; de un lado le colgamos 3 pesas de 50 $\vec{g}$ cada una, y la barra se inclina. Pretendemos restablecer el equilibrio con sólo dos pesas, y lo logramos colgándolas como indica la figura.

La barra está sometida a un sistema de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido; pero ese sistema está anulado por la reacción del soporte, puesto que la barra está en reposo. Para que la reacción pueda anular al sistema, debe ser igual y opuesta a la resultante del mismo; al equilibrar la barra hemos ubicado la recta de acción de la resul-

tante: es la vertical que pasa por el punto de apoyo.

Para medir la resultante, quitamos el apoyo y colgamos la barra por su centro, de un dinamómetro; éste señala una fuerza de $250 \vec{g}$.

En conclusión:

La medida de la resultante es igual a la suma de las medidas de las componentes.

La dirección y el sentido de la resultante son, evidentemente, los de las componentes. Falta determinar su punto de aplicación. Ya lo conocemos –es O–, pero queremos hallar una relación entre las medidas de las componentes y las de los segmentos, a fin de determinar el punto de aplicación sin tener que hacer ensayos cada vez.

Observemos que el efecto que produce la fuerza F es una rotación de la barra alrededor de O; el de F', una rotación en sentido opuesto. De modo que para que haya equilibrio, las dos rotaciones deben compensarse[1].

El momento de la fuerza F es $F \cdot AO$, y el de F', es $F' \cdot A'O$; debe cumplirse, pues, que:

$$F \cdot AO = F' \cdot A'O .$$

(Prescindimos de los signos, que son opuestos, porque nos interesa el valor absoluto.)

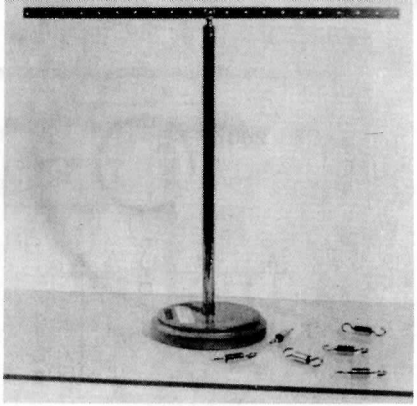
Esa igualdad puede escribirse en forma de proporción:

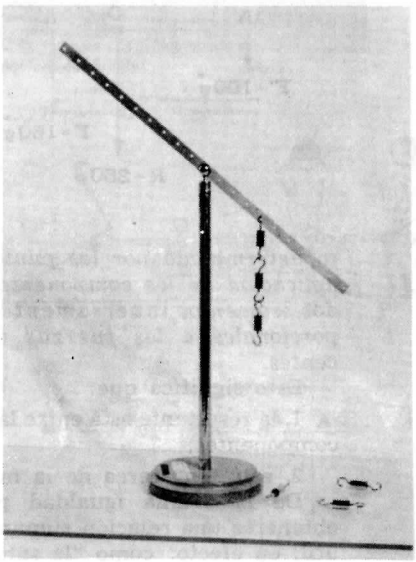
$$\frac{F}{A'O} = \frac{F'}{AO}$$

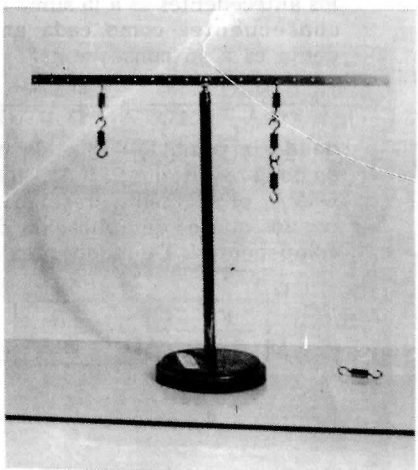
lo que significa que:

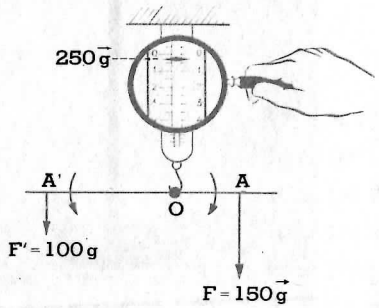
La resultante divide al segmen-

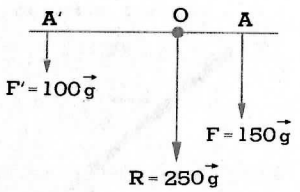
[1] También podría decirse: para que la barra no esté en rotación, el momento de la resultante respecto del punto de apoyo, debe ser nulo: $M = R \cdot d = o$, y como $R \neq o$, debe ser $d = o$, es decir, R debe pasar por el punto de apoyo.











to determinado por los puntos de aplicación de las componentes, en dos segmentos inversamente proporcionales a las fuerzas adyacentes.

Esto significa que:

1, la resultante está entre las dos componentes;

2, está más cerca de la mayor.

De la última igualdad puede obtenerse una relación sumamente útil; en efecto: como "la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente":

$$\frac{F}{O'A} = \frac{F'}{AO} = \frac{F + F'}{A'O + AO}$$

donde la suma $F + F'$ es la medida de la resultante R, y $A'O + AO = A'A$, el segmento determinado por los puntos de aplicación de las componentes. De modo que:

$$\boxed{\frac{F}{A'O} = \frac{F'}{AO} = \frac{R}{A'A}}$$

Relación de Stevin

Relación de Stevin: "Cada fuerza es directamente proporcional al segmento determinado por los puntos de aplicación de las otras dos".

En resumen: la resultante de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido tiene las siguientes características:

Medida: la suma de las medidas de las componentes;

Dirección: la misma que las componentes;

Sentido: el mismo que las componentes;

Punto de aplicación: es un punto tal, que se cumple la relación de Stevin.

EJ.: *Un cuerpo está sometido a dos fuerzas paralelas y del mismo sentido,* $F' = 3\ \vec{kg}$ *y* $F'' = 5\ \vec{kg}$, *aplicadas en A' y A'', tales que* $A'A'' = 1$ *m. Determinar la resultante.*

La intensidad es la suma de las intensidades de las componentes:

$$R = F' + F'' = 3\ \vec{kg} + 5\ \vec{kg} = 8\ \vec{kg}.$$

La dirección y el sentido son los mismos que los de las componentes; para determinar el punto A de aplicación, utilizamos la relación de Stevin:

$$\frac{F'}{AA''} = \frac{F''}{AA'} = \frac{R}{A'A''}$$

Considerando las dos últimas razones, y despejando A'A:

$$AA' = \frac{F'' \cdot A'A''}{R} =$$

$$= \frac{5\ \vec{kg} \cdot 1\ m}{8\ \vec{kg}} = 62{,}5\ cm.$$

Es decir, que el punto A está a 62,5 cm de A', y por lo tanto, a 37,5 cm de A''.

Demuéstrese que el momento de R respecto de O es igual a la suma de los momentos de F' y F'' respecto de O.

Método gráfico

Consideremos un caso concreto: $F' = 24\ \vec{kg}$ y $F'' = 12\ \vec{kg}$ son dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, aplicadas en A' y A'', respectivamente, siendo $A'A'' = 60$ cm.

En un papel, hagamos una representación gráfica del sistema eligiendo escalas convenientes, que pueden ser:

$$E_1 = 20\ \frac{cm}{cm};\quad E_2 = 2\ \frac{\vec{kg}}{mm}\ ^{1}.$$

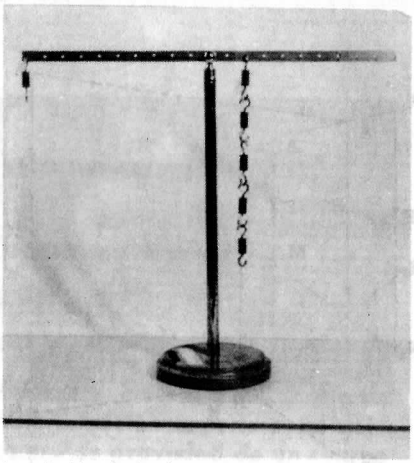
El procedimiento para determinar la resultante es el siguiente:

1. Sobre la recta de acción de F' se toma un segmento, M''N'', igual al que representa a F'';
2. Sobre la recta de acción de F'' se toma un segmento, M'N', igual que el que representa a F';
3. Se trazan los segmentos M''N' y N''M', que se cortan en un punto P;
4. Se traza por P la recta paralela a las componentes, que corta al segmento A'A'' en A, punto de aplicación de la resultante.

Composición de más de dos fuerzas

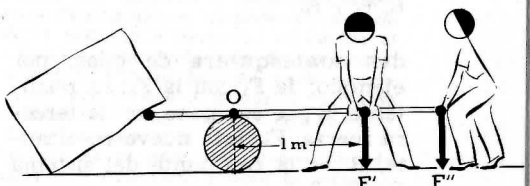
Sea el sistema F_1, F_2, F_3; para hallar su resultante se componen

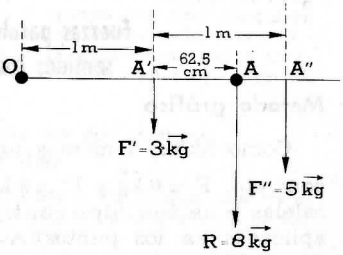
[1] $E_1 = 20\ \frac{cm}{cm}$ es la escala para representar las longitudes, y significa que 20 cm "de la realidad" están representados en "cada cm" del dibujo, así como $E_2 = 2\ \frac{\vec{kg}}{mm}$ es la escala para representar las fuerzas, y significa que $2\ \vec{kg}$ están representados en cada mm del dibujo.

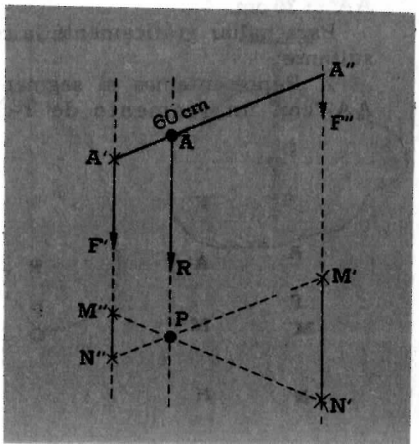


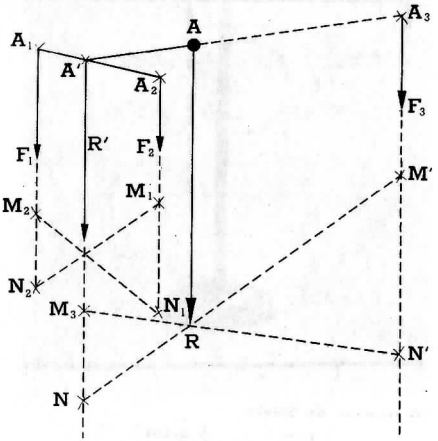
La relación de Stevin:

$$\frac{1\ \text{pesa}}{2\ \text{agujeros}} = \frac{5\ \text{pesas}}{10\ \text{agujeros}}$$









Composición gráfica de tres fuerzas paralelas: F_1, F_2 y F_3.

dos cualesquiera de ellas; por ejemplo: la F_1 con la F_2; su resultante, R', se compone con la tercera fuerza, F_3; esta nueva resultante, R, es la resultante del sistema F_1, F_2, F_3.

Fuerzas paralelas de sentidos contrarios

Método gráfico

Como antes, tomemos un caso concreto: $F = 6\ \vec{kg}$ y $F' = 9\ \vec{kg}$, paralelas y de sentidos contrarios, aplicadas en los puntos A y A'; $AA' = 30$ cm.

Para hallar gráficamente la resultante:

1, Representemos el segmento AA' con un segmento de 1 cm (escala: $30\ \frac{cm}{cm}$);

2, Aplicado en A, trazamos un vector de 6 mm de longitud, que representa a F (escala: $1\ \frac{\vec{kg}}{mm}$);

3, Aplicado en A', y con la misma escala, trazamos un vector de 39 mm, que representa a F', paralelo y de sentido contrario al anterior;

4, Sobre la recta de acción de F, y en cualquier lugar de la misma, trazamos un segmento $M'N' = F'$;

5, Sobre la recta de acción de F', y en cualquier lugar de la misma, trazamos un segmento $MN = F$;

6, Se trazan los segmentos MM' y NN', cuya intersección es el punto O;

7, Por O se traza una paralela a las fuerzas dadas, que corta a la recta AA', en el punto P, punto de aplicación de la resultante;

8, Aplicado en P, con el sentido de F' (que es la mayor de las componentes) y con una longitud de 3 mm, se traza un vector que representa a la resultante del sistema.

En resumen: las características de la resultante R de un sistema de dos fuerzas paralelas y de sentidos opuestos, F_1 y F_2, son:

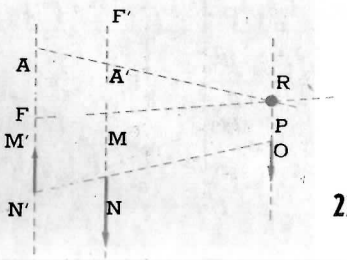
Medida: la diferencia de las medidas de las componentes;

Dirección: la de las componentes;

Sentido: el de la componente mayor;

Punto de aplicación: es un punto tal que se cumple la relación de Stevin.

Ej.: *Hallar la resultante de dos fuerzas paralelas,* $F = 30\ \vec{kg}$ *y* $F' = 50\ \vec{kg}$, *de sentidos contrarios.*



Una cupla es un par de fuerzas paralelas iguales y de sentidos opuestos.

aplicadas en los puntos A *y* A′ *separados por 66 cm.*

La intensidad de la resultante es:

$$R = F' - F = 50\ \vec{kg} - 30\ \vec{kg} = 20\ \vec{kg}.$$

Si llamamos P al punto de aplicación de la resultante, se cumple:

$$\frac{F}{A'P} = \frac{F'}{AP} = \frac{R}{AA'}$$

Considerando las dos últimas razones iguales, y despejando AP:

$$AP = \frac{F' \cdot AA'}{R} = \frac{50\ \vec{kg} \cdot 66\ cm}{20\ \vec{kg}} = 165\ cm.$$

El punto de aplicación está fuera del segmento AA′, del lado de F′, que es la componente mayor, y a 165 cm de A.

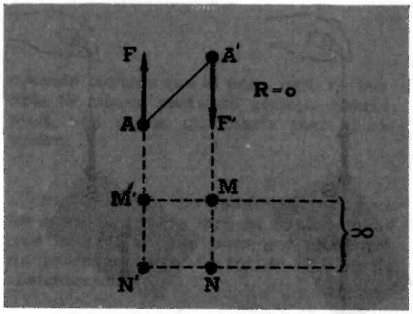
Un caso particular: las cuplas

Si consideramos un sistema de dos fuerzas paralelas y de sentidos opuestos, pero de medidas iguales, al tratar de hallar la resultante encontraremos que:

1, la medida de la resultante es nula, pues $F - F = 0$;

2, el punto de aplicación de la resultante no se puede determinar gráficamente, pues las rectas cuya intersección lo determinaría, son paralelas. Suele decirse, también, que el punto de aplicación está en el infinito.

Sin embargo, un cuerpo sometido a un sistema tal no estaría en equilibrio, a pesar de que la resultante es nula, porque ese sistema no es ni más ni menos que una cupla, tal como hemos definido a ésta en la página 180.

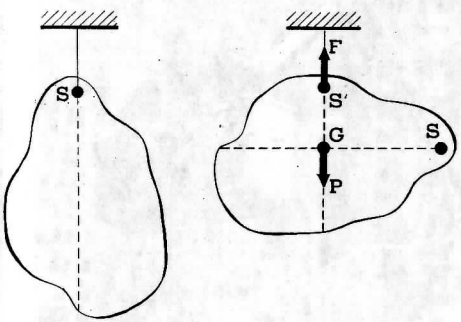


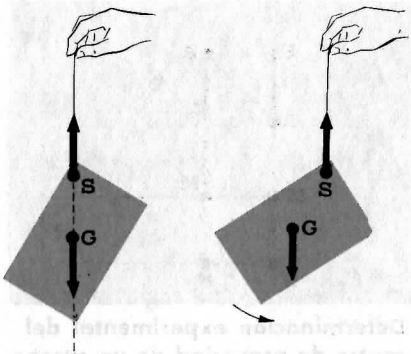
Determinación experimental del centro de gravedad de un cuerpo

El centro de gravedad es el punto en donde está aplicado el peso del cuerpo. Para determinar su posición se procede de la siguiente manera: se cuelga el cuerpo de uno cualquiera de sus puntos S, y cuando ha quedado en reposo se traza la vertical que pasa por el punto de suspensión. Como el cuerpo está en equilibrio, el peso y la fuerza que hace el soporte en el punto de suspensión son iguales y opuestos. Luego, la recta de acción del peso, que contiene el centro de gravedad, es la mencionada vertical. Se cuelga el cuerpo por otro cualquiera de sus puntos, S′, y se traza la nueva vertical, que en su intersección con la anterior determina G, el centro de gravedad.

Equilibrio de los cuerpos suspendidos

Observemos la figura que muestra el cartón suspendido por un hilo. El cartón está en equilibrio.





Como se trata del caso de dos fuerzas, deben ser opuestas, es decir, tienen la misma intensidad, sentidos opuestos, y *la misma recta de acción*. Pero con esto último estamos diciendo que el centro de gravedad pertenece a la recta que determina el hilo.

¿Qué sucedería si G no perteneciera a esa recta? Pues que las dos fuerzas aplicadas tendrían la misma intensidad, sentidos opuestos y distintas rectas de acción. Es decir: formarían una cupla, y esa cupla haría girar el cartón, llevándolo a la posición de equilibrio. Claro está que antes de quedar en ella, oscilaría un rato.

En consecuencia: *Para que un cuerpo suspendido esté en equilibrio, la vertical que pasa por el punto de suspensión debe pasar por el centro de gravedad.*

Equilibrio estable. Si el punto de suspensión está por encima del centro de gravedad, el equilibrio se llama *estable*, pues siempre que se separe el cuerpo de esa posición, al dejarlo otra vez libre, oscilará un rato y volverá a la posición primitiva.

Equilibrio inestable. Si el punto de suspensión está por debajo del centro de gravedad, el equilibrio es *inestable*, pues apenas se separa de esa posición al cuerpo, pasa a la posición de equilibrio estable.

Equilibrio indiferente. Si se elige como punto de suspensión el centro de gra-

¿Cómo explicamos el equilibrio de la carlinga . . .? ¿. . . y de la piedra?

vedad, el cuerpo estará siempre en equilibrio, sea cual fuere la posición en que se lo dejare, pues siempre la vertical que pasa por el punto de suspensión pasará por el centro de gravedad.

Equilibrio de los cuerpos apoyados

Observemos el primero de los tres cilindros de la figura reproducida al pie de página: está en equilibrio. Para sostenerlo, la mesa hace una fuerza opuesta al peso del cilindro, o sea, una fuerza de igual intensidad, de sentido opuesto, y que tiene *la misma recta de acción que el peso del cilindro.*

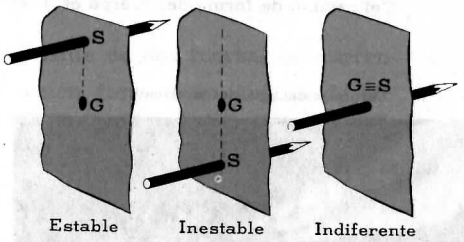
Mientras la vertical que pasa por el centro de gravedad pase por un punto interior a la base, la mesa podrá hacer una fuerza opuesta al peso. Pero ¿qué sucedería si el centro de gravedad perteneciera a una vertical que pasa por fuera de la base? La fuerza de la mesa seguiría siendo de igual intensidad y de opuesto sentido que el peso, pero no tendría la misma recta de acción: habría, pues, una cupla, que haría caer el cilindro.

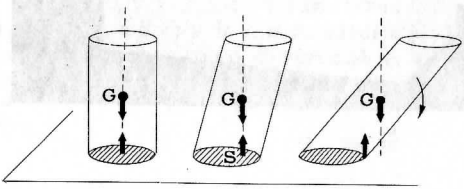
Por lo tanto: *La condición para que un cuerpo apoyado esté en equilibrio, es que la vertical que pasa por el centro de gravedad caiga dentro de la base de sustentación.*

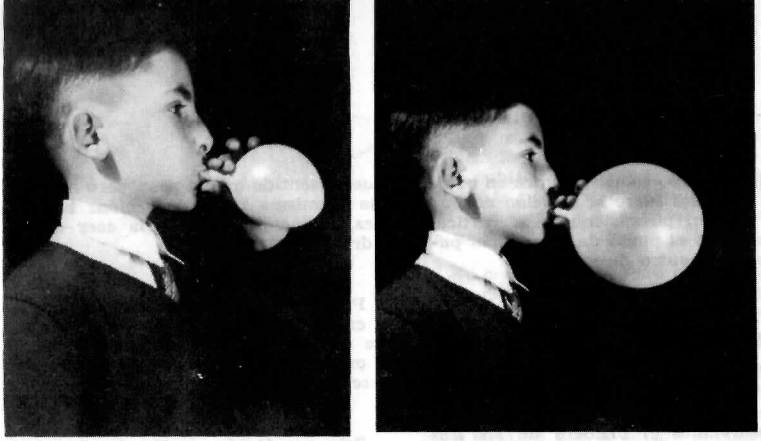
Esta condición puede dar lugar a figuras que a primera vista parecerán paradójicas, pero que se limitan, juiciosamente, a obedecer a la condición de equilibrio. Obsérvese el equilibrio de los tenedores.

¿Y cómo explicamos el equilibrio de una silla, que está apoyada en *cuatro patas*? Pues, sencillamente, porque en cada pata hay una reacción del piso, y la resultante de las cuatro reacciones es opuesta al peso. En estos casos se considera base de sustentación al polígono convexo que tiene por vértices los puntos de apoyo.

"Misterios" del equilibrio: el centro de gravedad del corcho y de los tenedores pertenece a la vertical que pasa por el punto donde el palillo se apoya en el vaso . . . y los tenedores quedan en equilibrio.







Deformación por variación del volumen.

Los cuerpos deformables: la ley de Hooke

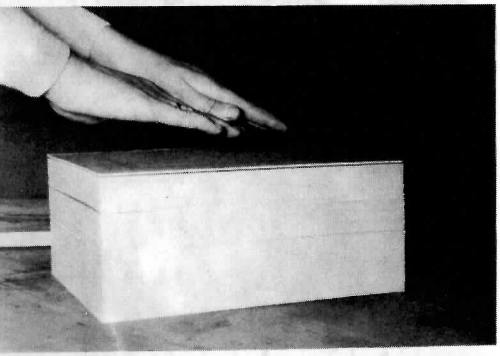
Hasta ahora hemos tratado con cuerpos rígidos: por grandes que fueran las fuerzas aplicadas, no producían en ellos ninguna deformación, es decir, las distancias entre sus puntos permanecían invariables. En la Naturaleza no existe ningún cuerpo rígido, pues todos se deforman algo cuando se les aplica una fuerza, por pequeña que sea.

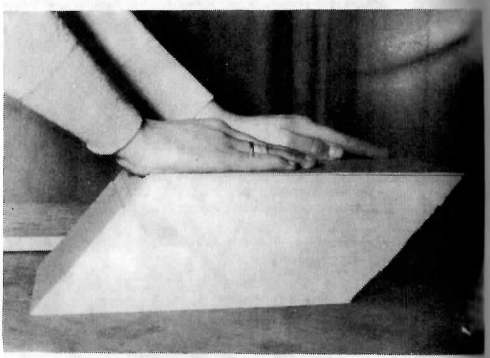
Robert Hooke, en 1676, experimentando encontró la ley que cumplen los cuerpos elásticos, y la expresó diciendo: "el cambio de forma del cuerpo es directamente proporcional a la fuerza deformante". Pero no se ocupó de definir qué entendía por "cambio de forma" y por "fuerza deformante".

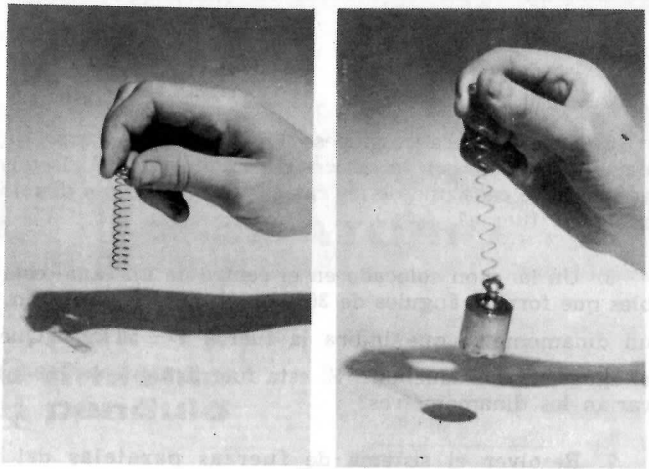
Años más tarde se aclararon estas cuestiones, y tuvo principal intervención en ello Thomas Young.

Cuando sobre un cuerpo se aplica una fuerza, no se lo hace en un punto, sino en una superficie. En la deformación que produce interviene, más que la fuerza su cociente con la superficie, es decir, la *presión*. Sin embargo, a ese cociente se lo llama *tensión*, y no presión. Tal vez la razón de esa nomenclatura sea que en el caso de la tensión, la fuerza puede ser paralela a la superficie, rasante, como por ejemplo cuando se hacen deslizar

Deformación por deslizamiento.







Deformación por alargamiento

unas sobre otras las hojas de una pila de hojas. De todos modos, la costumbre ha hecho que al cociente entre fuerza y superficie se lo llame tensión cuando se refiera a asuntos de elasticidad.

Una tensión aplicada a un cuerpo puede deformarlo de varias maneras. Por ejemplo, si se tiene una pelota de goma y se la comprime aplicándole fuerzas desde todas las direcciones, si bien no cambia su forma, se reduce su volumen: es una *deformación por cambio de volumen.*

Otra manera de deformar un cuerpo es la del ejemplo de la pila de hojas: una *deformación por deslizamiento.*

Si se estira un hilo de goma, es una *deformación por alargamiento.*

Problemas

1. Determinar la medida de la resultante de dos fuerzas concurrentes, de 15 y 40 $\vec{kg}$, cuyas rectas de acción forman un ángulo de 60°. Calcular, además, los ángulos que forma la resultante con las componentes.

R.: 49,2 $\vec{kg}$; 15° 20'; 44° 40'

2. Calcular la resultante del sistema concurrente $\vec{F_1} = 8\ \vec{kg}$; $\vec{F_2} = 6\ \vec{kg}$; ángulo $\widehat{F_1F_2} = 120°$.

R.: 7,21 $\vec{kg}$

3. Descomponer una fuerza de 173,2 $\vec{kg}$ en dos cuyas direcciones formen con la dada ángulos de 30° y 90°, respectivamente.

R.: 200 $\vec{kg}$; 100 $\vec{kg}$

4. En dos postes distanciados 40 m, están atados, a la misma altura, los extremos de un cable de 44 m de longitud y peso despreciable. Calcular la fuerza en cada extremo del cable, cuando de su punto medio pende un cuerpo que pesa 220 $\vec{kg}$.

R.: 266 $\vec{kg}$

5. Una lámpara cuyo peso $P = 15 \vec{kg}$, está suspendida por dos cables que forman con la horizontal ángulos de 30°. Determínese la fuerza que hace cada uno de los cables. Si el ángulo α disminuye, ¿qué pasa con cada fuerza?

R.: $15 \vec{kg}$; aumenta

6. Un lanchón colocado en el centro de un canal está sujeto por cables que forman ángulos de 30° con el eje del canal. En cada cable hay un dinamómetro que indica la fuerza $F = 50 \vec{kg}$. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el lanchón? Si esta fuerza fuera de $150 \vec{kg}$, ¿cuánto indicarían los dinamómetros?

R.: $86{,}5 \vec{kg}$; $86{,}5 \vec{kg}$

7. Resolver el sistema de fuerzas paralelas del mismo sentido $F_1 = 14 \vec{kg}$; $F_2 = 4 \vec{kg}$ y $AB = 180$ cm.

R.: $18 \vec{kg}$; $AC = 40$ cm

8. ídem cuando tienen sentidos contrarios.

R.: $10 \vec{kg}$; $AC = 72$ cm

9. Hallar la resultante y su punto de aplicación de un sistema formado por dos fuerzas paralelas, de igual sentido, de $1\,400 \vec{kg}$ y $800 \vec{kg}$, situadas a 5,50 m una de la otra.

R.: $2\,200 \vec{kg}$; a 2 m de la fuerza de $1\,400 \vec{kg}$

10. La resultante de dos fuerzas paralelas de igual sentido vale $10 \vec{kg}$. Una de las componentes, de $4 \vec{kg}$, dista de ella 50 cm. ¿Cuánto valdrá y a qué distancia se encontrará la otra fuerza?

R.: $6 \vec{kg}$; 33,3 cm

11. Dos personas llevan, mediante una barra, una carga de $80 \vec{kg}$. La longitud de la barra es de 2 m, y la carga dista 0,8 m de la que va adelante. ¿Qué fuerza hace cada persona?

R.: $48 \vec{kg}$; $32 \vec{kg}$

12. La resultante de dos fuerzas paralelas de sentidos contrarios vale $12 \vec{kg}$. La componente mayor vale $18 \vec{kg}$ y está aplicada a 9 cm de la resultante. Determinar el punto de aplicación de la otra componente.

R.: 27 cm

13. Descomponer una fuerza de $10 \vec{kg}$ en dos componentes paralelas del mismo sentido, sabiendo que ellas están en la relación de 4 a 5, y que sus puntos de aplicación distan 12 cm.

R.: $4{,}4 \vec{kg}$; $5{,}5 \vec{kg}$

14. Una barra BC, de peso $Q = 14{,}5 \vec{kg}$, gira alrededor de un eje horizontal fijo en B; se trata de colocarla horizontal mediante una fuerza $P = 9{,}6 \vec{kg}$, aplicada en el punto C, y que actúa en el plano vertical de la barra. ¿Qué ángulo habrá de formar dicha fuerza con la horizontal?

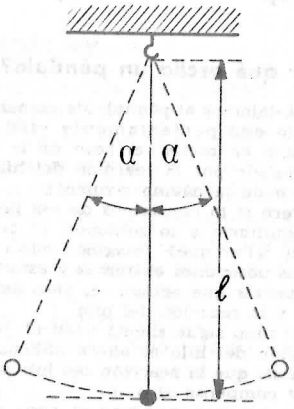
R.: 49°. (*Guía:* Tómese momentos respecto de B)

18 MOVIMIENTO OSCILATORIO

Movimiento del péndulo

Un péndulo es un objeto cualquiera que suspendido de un punto, de modo que pueda oscilar. Un ejemplo: el péndulo de los relojes de pared.

Es muy fácil construir un péndulo, y con él se pueden estudiar las propiedades que mencionaremos: basta una piedra o una bolita atada a un hilo[1].



Elementos del movimiento pendular

Como siempre, es preciso que nos pongamos de acuerdo sobre el significado exacto de las palabras que usaremos:

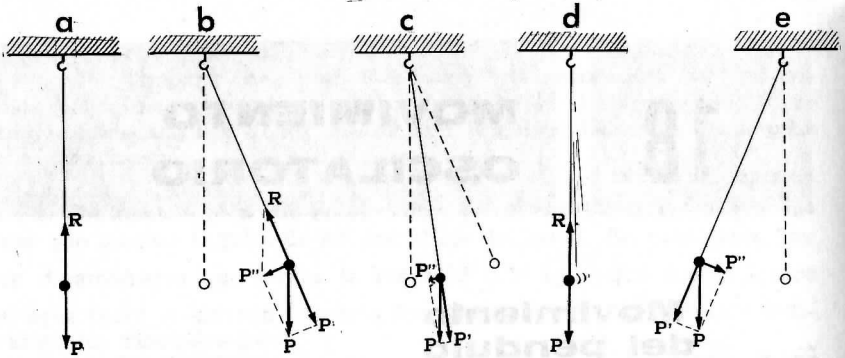
LONGITUD DEL PÉNDULO: es la longitud del hilo. Se mide desde el punto de suspensión hasta el centro de gravedad del cuerpo que oscila.

OSCILACIÓN: es el movimiento realizado por el péndulo desde una de sus posiciones extremas hasta otra, y su vuelta hasta la primera posición.

PERÍODO: es el tiempo que emplea el péndulo en realizar una oscilación.

AMPLITUD: es el ángulo formado por la vertical con el hilo, cuando el péndulo está en una de sus posiciones extremas.

[1] Para estudiar las propiedades de los péndulos eliminando las perturbaciones que alteren el movimiento, se ha inventado un péndulo muy curioso: el hilo que lo sostiene es *inextensible, y no pesa nada*; y en lugar de nuestra piedra o bolita, hay un *punto geométrico*, pero que *tiene peso*, al que se llama *punto material*. Tiene un inconveniente: *sólo existe en la imaginación*. Este péndulo imaginario se llama *péndulo matemático*, y el que usaremos nosotros es sólo una aproximación.



¿Por qué oscila un péndulo?

Si dejamos al péndulo de manera que el hilo esté perfectamente vertical, el péndulo no oscila: el peso de la bolita es anulado por la reacción del hilo (figura *a* de la página siguiente).

Pero si lo apartamos de esa posición de equilibrio y lo soltamos, el péndulo oscila. ¿Por qué? Imaginémoslo en una de sus posiciones extremas y estudiemos las fuerzas que actúan: el peso del péndulo y la reacción del hilo.

El peso sigue siendo vertical, pero la reacción del hilo es ahora oblicua. Resulta así que la reacción del hilo sólo *en parte* compensa al peso.

Si descomponemos el peso en dos componentes: una P', que tenga la dirección del hilo, y la otra P'', perpendicular al hilo, se advierte que el hilo sólo puede anular a P'. Como nada se opone a P'', ésta mueve al péndulo (fig. *b*).

Pero sucede una cosa curiosa: consideremos al péndulo en otra posición, más cercana a la de equilibrio, y hagamos la misma descomposición del peso. A simple vista se advierte que la componente P'', que hace mover al péndulo, es ahora menor. Y será cada vez menor cuando más se acerque el péndulo a su posición de equilibrio (fig. *c*). Más todavía: cuando el péndulo pasa por su posición de equilibrio, esa fuerza es nula. Aquí cabe una pregunta: si cuando el péndulo está en su posición de equilibrio la fuerza es nula, ¿cómo es que el péndulo puede pasarla y llegar al otro lado? Muy simplemente: *por inercia* (fig. *d*).

Sigamos estudiando las fuerzas después que el péndulo ha pasado por la posición de equilibrio. Algo llama inmediatamente la atención: la componente del peso que estábamos estudiando reaparece después de pasar por la posición de equilibrio . . . *¡pero ha cambiado de sentido!* Ahora se opone al movimiento del péndulo, y lo va frenando, hasta detenerlo cuando alcanza su posición extrema (fig. *e*).

En el instante en que el péndulo alcanza su posición extrema, su velocidad es nula, e inmediatamente después el movimiento cambia de sentido. Sin embargo, la fuerza alcanza ahí su valor máximo. No nos extrañemos: cuando arrojamos una piedra hacia arriba, el peso que es constante, la va frenando; cuando la piedra alcanza la altura máxima, su velocidad es nula, e inmediatamente después el movimiento se invierte.

En resumen: la fuerza que mueve a un péndulo no es constante, y está siempre dirigida de modo tal, que tiende a llevar al péndulo hacia la posición de equilibrio. Lo mismo la aceleración tangencial, pues tiene igual dirección y sentido que la fuerza.

En cuanto a la velocidad, podemos decir que:

1, no es constante;

2, se anula en las posiciones extremas;

3, es máxima al pasar por la vertical.

El movimiento de un péndulo es, pues, un movimiento variado, porque la velocidad no es constante, pero *no es uniformemente variado*, pues la aceleración tampoco es constante.

Leyes del péndulo

Primera ley

Tomemos dos péndulos exactamente iguales (la misma longitud y la misma masa pendular). Hagamos oscilar a uno y luego al otro, el segundo con una amplitud menor que la del primero. *¿Cuál de los dos tardará menos en efectuar una oscilación?*

Alguien podría decir que, como el segundo tiene que recorrer *menos camino, tardará menos.* Para asegurarnos, sólo hay un procedimiento: MEDIR. En física es muy peligroso dejarse llevar por las apariencias. Recordemos lo que se pensaba, antes de Galileo, acerca de la caída de los cuerpos: parecía evidente que un cuerpo de 10 $\vec{kg}$ debía caer más rápidamente que otro de 1 $\vec{kg}$.

Hagamos ahora, por prudencia, una sencilla experiencia con los péndulos: midamos el período de cada uno y veamos cuál es el menor. Podríamos pensar en medir una oscilación completa, pero no conviene, porque el tiempo que tarde el péndulo en efectuar un viaje de ida y vuelta es pequeño, y no resulta fácil medirlo. Mejor es tomar 10 oscilaciones, y luego dividir por 10. Hacemos esto y encontramos que: *los dos péndulos, tanto el de las amplitudes grandes como el de las amplitudes pequeñas, tienen el mismo período*, T. Esta importante regla se llama *primera ley del péndulo*, o *ley del isocronismo* (*isos* = igual; *cronos* = tiempo). Es la que descubrió Galileo al observar las oscilaciones de una lámpara en la catedral de Pisa, cuyo período midió valiéndose de su pulso. Se la puede enunciar así:

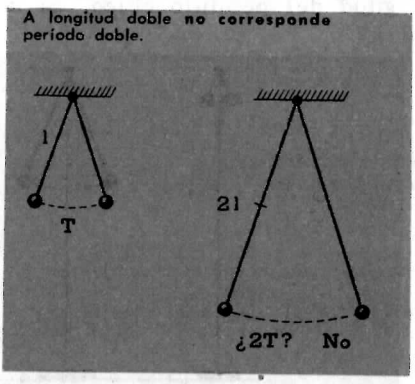
El período de un péndulo es independiente de su amplitud.

En realidad, mediciones precisas de los períodos de un péndulo revelan pequeñas diferencias cuando las amplitudes son distintas.

Segunda ley

Supongamos dos péndulos de la misma longitud, pero uno tiene una *masa mayor* que la del otro. ¿Cuál oscilará con mayor rapidez? Si realizamos la experiencia, encontraremos que el período es exactamente el mismo en los dos casos, es decir: *dos péndulos de igual longitud oscilan siempre con el mismo período, cualesquiera sean sus masas.* Este resultado constituye la segunda ley del péndulo, que se puede enunciar así:

El período de un péndulo es independiente de su masa.



Tercera ley

Todos observamos que cuanto *más largo* es un péndulo, *más lenta* se hace su marcha; es decir, que a *mayor longitud, mayor período* T. Por eso muchos relojes atrasan en verano: como el péndulo se dilata, el período aumenta.

Supongamos ahora dos péndulos; el de la derecha tiene doble longitud. ¿Cómo serán los períodos? ¿Será doblemente lento el de la derecha? ¿Será su período el doble? Hay una sola manera de contestar en forma segura: *por medio de la experiencia.* Medimos el período T del péndulo corto y el período T' del péndulo largo, y encontramos que T' *es mayor* que T... *¡pero no es el doble!...*

Si alargamos más el péndulo mayor, el período va aumentando, y llega un momento en que el período *es doble* del T. Cuando eso sucede, *la longitud se ha hecho 4 veces mayor que la del péndulo corto.*

Si seguimos alargando, llega un momento en que el período del grande se hace *triple* del período del péndulo chico. Cuando eso sucede, su longitud es *9 veces* la longitud del péndulo chico. Si la longitud se hace *16 veces* la del péndulo chico, el período es *4 veces mayor.*

En resumen, el período es:

2 3 4 5 ...

veces mayor, cuando la longitud es

4 (= 2^2) 9 (= 3^2)

16 (= 4^2) 25 (= 5^2) ...

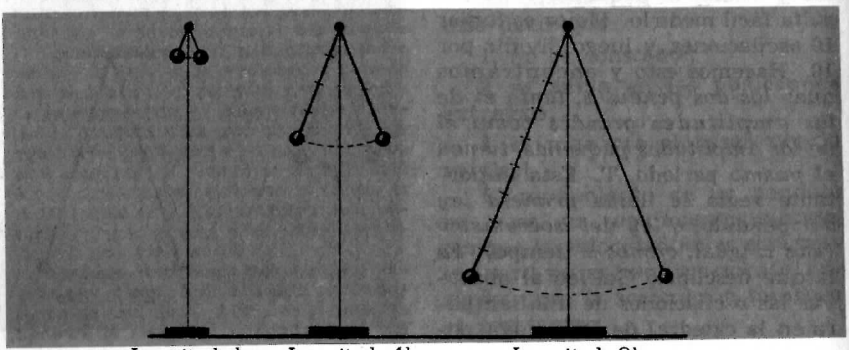
veces la del péndulo chico. Es decir, que: *los períodos aumentan 2, 3, 4, 5 ..., veces, cuando las longitudes crecen según los cuadrados de esos números.* No es sencillo comprender esto rápidamente, pero el siguiente caso concreto aclarará las dificultades: tomemos un péndulo de $l_1 = 4$ cm de largo y midamos su período T_1. Contando 10 oscilaciones veremos que emplea 4 segundos en efectuarlas: su período es, pues, $T_1 = 0{,}4$ seg.

Alarguemos la longitud hasta $l_2 = 16$ cm; al medir su período encontramos que vale $T_2 = 0{,}8$ seg.

Alarguemos su longitud hasta 9 veces la primitiva: $l_3 = 36$ cm. Resulta que su período es $T_3 = 1{,}2$ seg.

Tomemos una longitud que sea 16 veces la primera: $l_4 = 64$ cm, y veremos así que el período es $T_4 = 1{,}6$ seg.

Establezcamos ahora la razón entre cada período y la raíz cuadrada de la longitud correspondiente:



Longitud: l Longitud: 4l Longitud. 9l

Período: T Período: 2T Período: 3T

$$\frac{T_1}{\sqrt{l_1}} = \frac{0{,}4^s}{\sqrt{4\text{ cm}}} = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2\,;$$

$$\frac{T_2}{\sqrt{l_2}} = \frac{0{,}8^s}{\sqrt{16\text{ cm}}} = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2\,;$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{l_3}} = \frac{1{,}2^s}{\sqrt{36\text{ cm}}} = \frac{1{,}2}{6} = 0{,}2\,;$$

$$\frac{T_4}{\sqrt{l_4}} = \frac{1{,}6^s}{\sqrt{64\text{ cm}}} = \frac{1{,}6}{8} = 0{,}2\,.$$

Todas las razones son iguales:

$$\frac{T_1}{\sqrt{l_1}} = \frac{T_2}{\sqrt{l_2}} = \frac{T_3}{\sqrt{l_3}} = \frac{T_4}{\sqrt{l_4}} = \ldots = \frac{T_n}{\sqrt{l_n}}$$

Es decir que: *los períodos* de varios péndulos *están en proporción con las raíces cuadradas de sus longitudes.* Esta regla constituye la tercera ley del péndulo, que puede enunciarse así:

El período de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.

EJ.: *Un péndulo de longitud* l *tiene un período* T. *¿Cuántas veces debemos acortar su longitud para que el período* T' *sea la tercera parte de* T?

De acuerdo con la tercera ley, entre las longitudes y los períodos de los dos péndulos debe verificarse la siguiente proporción:

$$\frac{T}{\sqrt{l}} = \frac{T'}{\sqrt{l'}} \therefore \sqrt{l'} = \frac{T'\sqrt{l}}{T} \therefore l' = \frac{T'^2\, l}{T^2} = l\left(\frac{T'}{T}\right)^2;$$

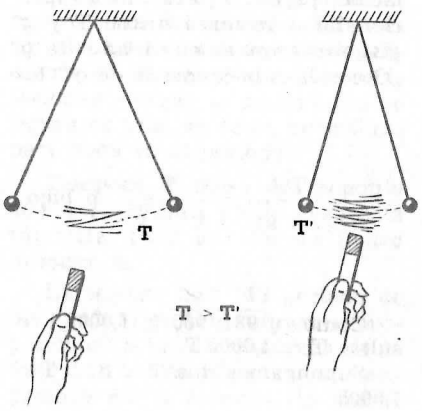
y como: $\frac{T'}{T} = \frac{1}{3} \therefore \left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{1}{9}$, resulta: $l' = l \cdot \frac{1}{9} = \frac{l}{9}$

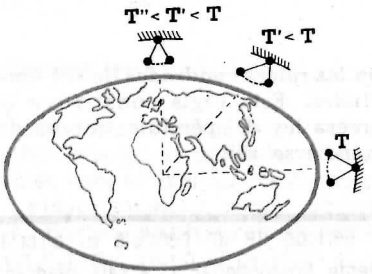
Es decir, que debemos acortarlo a la novena parte de su longitud ($9 = 3^2$ veces).

Cuarta ley

La cuarta ley del péndulo presenta algunas dificultades para su comprobación directa. Pero hagamos una sencilla experiencia preliminar y comprenderemos su significado. Necesitamos un pequeño péndulo de hierro y un imán. Hagamos oscilar el péndulo, y acerquemos y alejemos el imán para ver qué influencia ejerce. Observaremos que cuanto más cerca esté

A mayor fuerza de atracción, mayor rapidez, o sea, menor período.





A mayor g, mayor rapidez, o sea menor T.

el imán, más rápidamente oscila el péndulo. Es decir, que cuanto *mayor* es la fuerza que solicita a la masa pendular, *menor* es el período.

Podemos prever ahora qué sucederá con un péndulo que sea llevado desde el ecuador hasta el polo, por ejemplo: como en el polo la fuerza de atracción de la Tierra es mayor, el período del péndulo disminuirá. Puesto que la fuerza de atracción de la Tierra es el peso del péndulo $P = m\,g$, y el período no depende de la masa (segunda ley), forzosamente dependerá de la aceleración de la gravedad. Resulta, pues, que a *mayor* g, *menor* T.

Sabemos que existe una vinculación, pero... ¿será una proporcionalidad inversa entre T y g? ¿Lo será con el cuadrado de g? ¿O con la raíz cuadrada de g? Eso es lo que tenemos que averiguar, y para hallar cuál es la relación, sólo hay un medio: *medir el período de un mismo péndulo en lugares donde la aceleración de la gravedad tenga valores distintos, y luego comparar los resultados.*

Si lo hiciéramos, y si llamamos I al período del péndulo en un lugar donde la aceleración de la gravedad es g; T' donde vale g' y T'' donde es g'', encontraríamos que se cumple:

$$\frac{T}{1/\sqrt{g}} = \frac{T'}{1/\sqrt{g'}} = \frac{T''}{1/\sqrt{g''}} = \ldots = \text{constante.}$$

Es decir que:

El período de un péndulo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.

EJ.: *Un reloj de péndulo anda perfectamente en Comodoro Rivadavia* $\left(g = 981\,\frac{cm}{s^2}\right)$. *Calcular cuánto atrasará por día si se lo lleva a Buenos Aires* $\left(g' = 980\,\frac{cm}{s^2}\right)$.

Según la cuarta ley:

$$\frac{T'}{1/\sqrt{g'}} = \frac{T}{1/\sqrt{g}}, \text{ o bien: } T'\sqrt{g'} = T\sqrt{g} \therefore T' = T\sqrt{g/g'}.$$

Como $\sqrt{981/980} \cong 1{,}0005$, resulta: $T' = 1{,}0005\ T$.

Supongamos que $T = 1^s \therefore T' = 1{,}0005^s$.

En Buenos Aires, cada segundo el reloj atrasa $0{,}0005^s$. En los $86\,400^s$ que tiene el día, atrasará $0{,}0005^s \cdot 86\,400 = 43{,}2^s$.

La fórmula del movimiento pendular

La tercera y la cuarta ley reunidas nos dicen que el período de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud, e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.

Podemos reunirlas así:

$$\frac{T}{\sqrt{l}/\sqrt{g}} = \frac{T'}{\sqrt{l'}/\sqrt{g'}} = \frac{T''}{\sqrt{l''}/\sqrt{g''}} = \text{constante} = k.$$

Valor de "k", la constante de proporcionalidad

La proporcionalidad anterior nos dice que si tenemos un péndulo de cualquier longitud, medimos su período y hacemos las operaciones indicadas, sea cual fuere la longitud del mismo, y sea cual fuere la aceleración de la gravedad del lugar en que lo hagamos oscilar, el período tendrá un valor tal, que el cociente señalado tendrá siempre el mismo valor: aquí, en la Luna, en el Sol, en Saturno, o en la estrella más lejana.

Para saber cuánto vale esa constante, midamos entonces el período de un péndulo del cual conocemos la longitud, y sabiendo que $g = 980 \frac{cm}{s^2}$, hagamos las cuentas; por ejemplo: $l = 50$ cm; $T = 1{,}42^s$.

$$\frac{T}{\sqrt{l/g}} = \frac{1{,}42^s}{\sqrt{50\ cm/980\ \frac{cm}{s^2}}} \cong \frac{1{,}42^s}{\sqrt{0{,}0510\ s^2}} \cong \frac{1{,}42^s}{0{,}226^s} = 6{,}2832.$$

El factor de proporcionalidad es 6,2832. Este valor parece ser el doble de π. Y así es, en efecto, pues se ha demostrado que la constante de proporcionalidad es exactamente 2π.

Luego, para cualquier péndulo se cumple que

$$\frac{T}{\sqrt{l}/\sqrt{g}} = 2\pi,$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{T}{\sqrt{l/g}} = 2\pi,$$

y pasando la raíz al segundo miembro:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ésta es la fórmula del péndulo, que permite calcular el período si se conoce la longitud y la aceleración de la gravedad.

En ella están condensadas las cuatro leyes del péndulo. En efecto: dice que el período es independiente de la amplitud de las oscilaciones, *porque la amplitud α no figura en ella*, es decir, no influye para nada en el período.

Tampoco la masa del péndulo afecta al período, y ello lo dice la fórmula, *pues en ella no figura la masa*, m.

La tercera ley: "El período de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud", está directamente expresada en la fórmula, lo mismo

que la cuarta: "El período es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad".

Ej.: *Calcular el período de un péndulo de longitud* $l = 50$ *cm (tomando* $g = 980 \frac{cm}{s^2}$*).*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{50 \text{ cm}}{980 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} \cong 1{,}4^s \cong$$

$$\cong 6{,}28 \cdot \sqrt{0{,}051 \text{ seg}^2} \cong 6{,}28 \cdot 0{,}226 \text{ seg} = 1{,}42^s.$$

Ej.: *Calcular la longitud del péndulo cuyo período es* $T = 1^s$*. (Es el péndulo que "bate el segundo").*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \therefore T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \therefore l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1 \text{ s}^2 \cdot 980 \text{ cm/s}^2}{4 \cdot 9{,}87} \cong 24{,}8 \text{ cm}.$$

Ej.: *Calcular el período del péndulo de* $l = 24.8$ *cm, en el ecuador* $(g = 978 \frac{cm}{s^2})$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{24{,}8 \text{ cm}}{978 \text{ cm/s}^2}} \text{ cm/s}^2 \cong 1{,}001^s \cong$$

$$\cong 6{,}28 \cdot 0{,}1594 \text{ seg} \cong 1{,}001^s.$$

En el ecuador, el péndulo "atrasa". Es fácil calcular cuánto atrasa en 1 día:

si en $1{,}001^s$ realiza 1 oscilación,

en $86\,400^s$ realiza $x = \frac{86\,400}{1{,}001}$

oscilaciones $= 86\,313$ osc.

En 1 día, un reloj con este péndulo atrasaría

$86\,400^s - 86\,313^s = 87^s = 1^m\,27^s$.

La diferencia, como se ve, no es despreciable.

Aplicaciones del péndulo

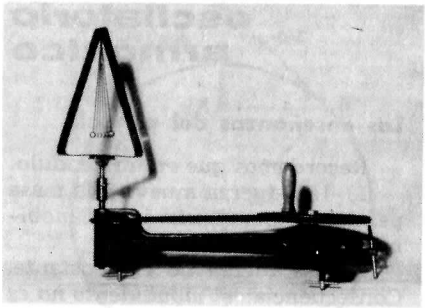
El uso más importante es en los relo**jes: la cu**erda hace marchar el mecanis**mo, pero** es necesario regular la velocidad, y para eso está el péndulo. Dándole una longitud fija, su período de oscilación es siempre el mismo, y cualquiera sea la fuerza con que actúe la cuerda en cada instante, el reloj no atrasa ni adelanta.

Como el calor dilata los cuerpos, resulta que el péndulo se alarga en verano, y por lo tanto, atrasa. Para evitar este fenómeno los péndulos se construyen de material especial, aleaciones que se dilatan poco, o combinaciones adecuadas que compensan la dilatación.

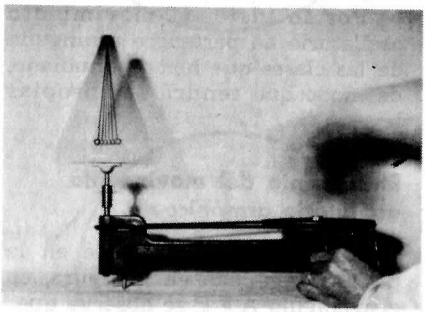
En la época en que Guericke realizaba sus célebres experiencias con la máquina neumática, un joven holandés, *Cristián Huygens*, inventó el reloj de péndulo (1657). Huygens nació en La Haya, en 1629, pero vivió casi siempre en París, donde llegó a ser miembro de la Academia de Ciencias.

Los relojes de rueda que se usaban antes de Huygens marchaban con mucha irregularidad; Galileo fue el primero que

El triángulo de cuyo vértice superior está colgado el péndulo, puede girar, pero ello no le interesa al péndulo, que sigue oscilando, imperturbable, siempre en un mismo plano.



imaginó la posibilidad de regularizar la marcha de un reloj con el acoplamiento de un péndulo, pero como estaba ciego no pudo llevar a cabo el proyecto. Huygens, desconociendo la idea del gran sabio pisano, inventó el dispositivo actual. También fue él quien estableció la ley matemática del péndulo. Además de esas investigaciones, el físico holandés realizó muchas otras de extraordinaria importancia, de las que ya hablaremos.



Cálculo de la aceleración de la gravedad

El péndulo puede emplearse para calcular g:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \therefore \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Ésta es la aplicación científica más importante del péndulo.

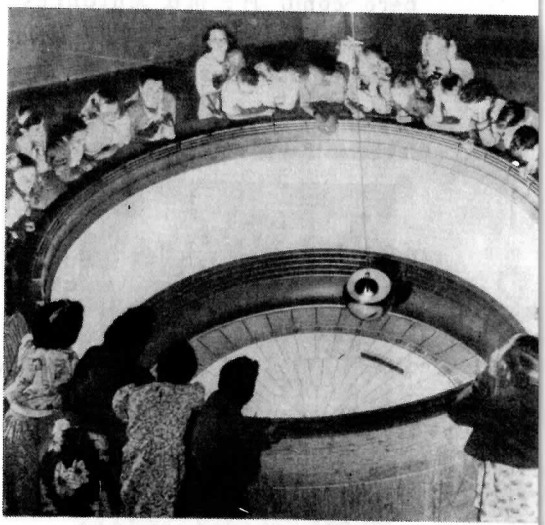
Invariabilidad del plano de oscilación

El aparato de la figura permite hacer girar el sostén donde está suspendido el péndulo mientras éste está oscilando.

Se observa que el péndulo sigue oscilando siempre en su mismo plano.

Este hecho fue aprovechado por Foucault para hacer una demostración de la rotación de la Tierra. Instaló un péndulo muy largo y con soportes apropiados para reducir el rozamiento, y lo hizo oscilar largo tiempo.

Observó que, aparentemente, el plano de oscilación del péndulo iba cambiando. Pero como sabemos que no es así, la interpretación de ese hecho indicó, simplemente, que no era el plano el que rotaba, sino la Tierra misma.



Escolares observando un péndulo de Foucault.

Movimiento oscilatorio armónico

Las enseñanzas del péndulo

Recordemos que en un péndulo:

1) Una fuerza mueve a la masa pendular. Consecuencia: *el movimiento no es uniforme.*

2) Esa fuerza no es constante. Consecuencia: *el movimiento no es uniformemente variado.*

Por lo visto, el movimiento oscilatorio no pertenece a ninguna de las clases que hemos estudiado, de modo que tendrá sus propias leyes.

El concepto del movimiento oscilatorio armónico

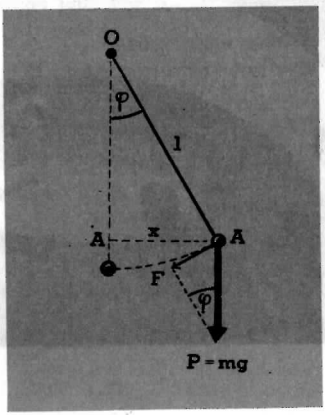
Cuando el péndulo está en la posición señalada en la figura, en el triángulo A F P se observa que:

$$\text{sen } \varphi = \frac{F}{P} \therefore F = P \text{ sen } \varphi ;$$

pero como $P = m\,g$, entonces $F = m\,g \text{ sen } \varphi$.

En el O A A′ es $\text{sen } \varphi = \frac{x}{l}$, de modo que:

$$F = m\,g\,\frac{x}{l}.$$



Como la fuerza siempre está dirigida hacia el origen, le asignamos signo contrario al de x:

$$F = -\frac{m\,g\,x}{l} \qquad (1)$$

Pero de acuerdo con el principio de masa, esa fuerza F aplicada a la masa m le imprime una aceleración a:

$$F = m\,a \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$a = -\frac{g}{l}x.$$

La aceleración es directamente proporcional, y de signo contrario a la distancia a la posición de equilibrio.

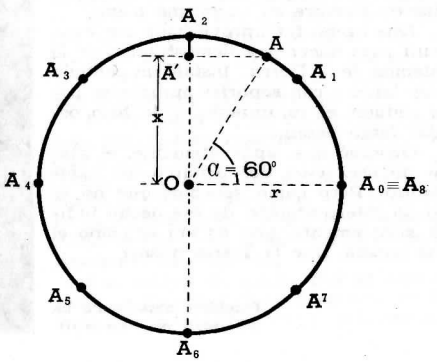
Ésta es la característica fundamental del movimiento vibratorio u oscilatorio armónico.

Movimiento circular uniforme y movimiento armónico

Consideremos un punto A que se mueva sobre una circunferencia de radio r con movimiento circular uniforme; y también la proyección A′ de A sobre el diámetro $A_2 A_6$.

Es evidente que el punto A′ oscila alrededor del centro.

¿Pero la aceleración de A′ cumple la condición para que la vibración sea armónica?



Elementos del movimiento oscilatorio armónico

ELONGACIÓN. Es la distancia x del punto A′ al centro de la circunferencia.

AMPLITUD. Es la elongación máxima: el radio de la circunferencia auxiliar.

FÓRMULA DE LA ELONGACIÓN. Supongamos que la velocidad angular de A sea ω. Al cabo de un tiempo t de haber partido de A_o, habrá descripto un arco α:

$$\alpha = \omega\, t.$$

La elongación de A′ es O A′, es decir, la proyección del radio O A:

$$x = \text{O A} \cdot \operatorname{sen} \alpha = r \operatorname{sen} \omega\, t$$

Como

$$\omega = 2\,\pi/\text{T}$$

$$\boxed{x = r \operatorname{sen} \frac{2\,\pi\, t}{\text{T}}}$$

EJ.: *Comprobar estas dos fórmulas para* $\text{t} = \frac{\text{T}}{4}; \frac{\text{T}}{2}; \frac{3\,\text{T}}{4}$.

LA VELOCIDAD. La velocidad de A′ es la proyección de la velocidad de A. Como ésta vale ωr aquélla será:

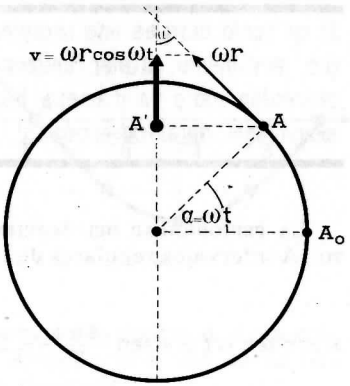
$$v = \omega\, r \cos \omega\, t.$$

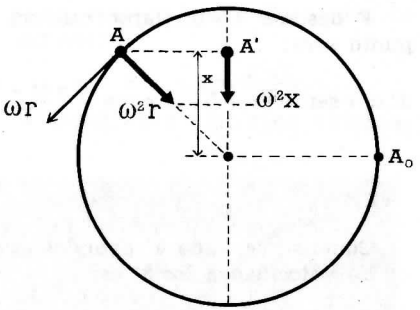
Para $t = o$ es $\cos \omega\, t = 1$ ∴ $v_o = \omega\, r$. Luego:

$$\boxed{v = v_o \cos \frac{2\,\pi\, t}{\text{T}}}$$

v_o es la velocidad lineal con que el punto A describe la circunferencia.

LA ACELERACIÓN. Observemos la figura: la aceleración del punto A′





es la proyección de la aceleración centrípeta del A. Como ésta vale $\omega^2 r$, su proyección es:

$$a = -\,\omega^2\, r \operatorname{sen} \frac{2\,\pi\, t}{\text{T}}$$

y como fácilmente se puede comprobar, su sentido es siempre opuesto al de la elongación. Como $r \operatorname{sen} \frac{2\,\pi\, t}{\text{T}} = x$

$$a = -\,\omega^2\, x$$

Es decir, la aceleración de A′ es directamente proporcional, y de signo contrario, a la distancia a la posición de equilibrio. Luego:

Si un punto describe una circunferencia con movimiento circular uniforme, su proyección sobre un diámetro tiene un movimiento vibratorio armónico.

LA PERIODICIDAD DEL MOVIMIENTO. A intervalos regulares de tiempo, el punto que se mueve con movimiento vibratorio armónico se encuentra en el mismo lugar y con la misma velocidad. Ese intervalo de tiempo es el *período*. En efecto: supongamos que la amplitud del movimiento es $r = 2$ cm, y que el período es $T = 4^s$. Al cabo de 3^s de iniciado el movimiento, la elongación es:

$$x = r \operatorname{sen} \omega t = r \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} = 2 \text{ cm sen } \frac{2\pi \cdot 3^s}{4^s} =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \text{ cm} = 2 \cdot (-1) \text{ cm} = -2 \text{ cm}.$$

4^s después (o un lapso que sea múltiplo de 4^s), la elongación del punto será:

$$x' = r \operatorname{sen} \omega (t + T) = r \operatorname{sen} \frac{2\pi (t + T)}{T} = 2 \text{ cm sen } \frac{2\pi \cdot 7^s}{4^s} =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{2} \text{ cm} = -2 \text{ cm}.$$

Como se ve, cada 4 segundos está en el mismo lugar.

La velocidad a los 3^s es:

$$v = \omega r \cos \omega t = \frac{2\pi}{T} r \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{4^s} \cdot 2 \text{ cm} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} =$$

$$= 0 \text{ (pues } \cos \frac{3\pi}{2} = 0).$$

A los 7^s:

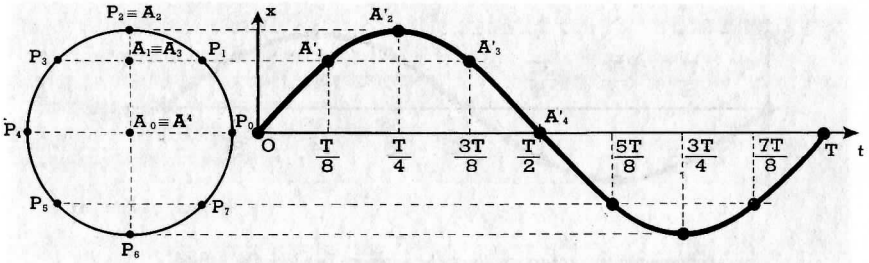
$$v' = \omega r \cos \omega (t + T) = \frac{2\pi}{T} r \cos \frac{2\pi (t + T)}{T} =$$

$$= \frac{2\pi}{4^s} \cdot 2 \text{ cm} \cdot \cos \frac{7\pi}{2} = 0 \text{ (pues } \cos \frac{7\pi}{2} = 0).$$

Como se ve, cada 4 segundos tiene la misma velocidad.

Representación gráfica de la elongación en función del tiempo. Consideremos un punto P que describe una circunferencia con período T. Su proyección A sobre el diámetro $P_2 P_6$ se mueve con movimiento armónico.

Consideremos un sistema de ejes con los tiempos en abscisas y las elongaciones en ordenadas. Cuan-



Representación gráfica de la elongación en función del tiempo.

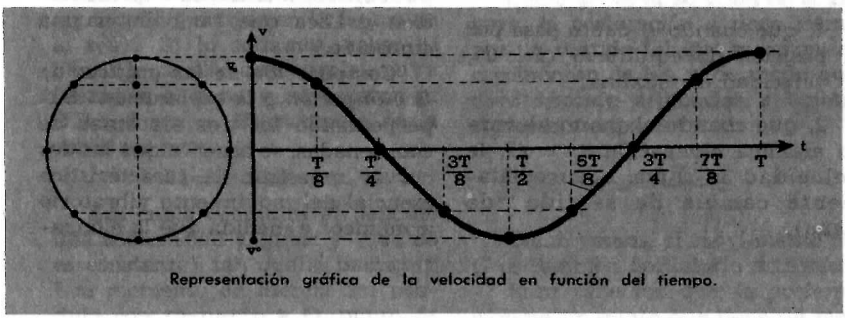
do P parte (instante inicial $t = 0$), la elongación de A es nula: el origen de coordenadas es un punto de la representación gráfica.

Al cabo de un tiempo $t = T/8$, el punto P ocupa la posición P_1; su proyección es A_1, y el punto correspondiente en la gráfica es A'_1. Y seguimos así, considerando el punto P en los instantes $t = T/4$; $t = 3\,T/8$; etc., para obtener los correspondientes puntos A' de la gráfica. Éstos forman una curva llamada *sinusoide*.

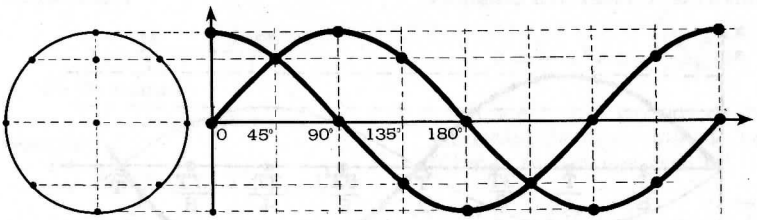
Representación gráfica de la velocidad en función del tiempo. Hemos visto que la velocidad en cada instante está dada por la expresión:

$$v = v_0 \cos \frac{2\,\pi\,t}{T}.$$

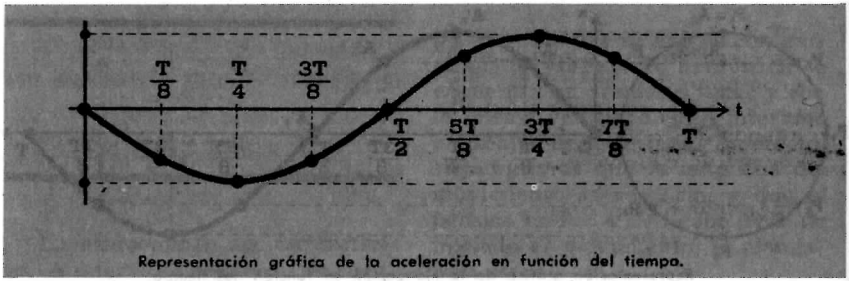
Dando a t distintos valores,



Representación gráfica de la velocidad en función del tiempo.



Elongación y velocidad. Gráficas superpuestas.



Representación gráfica de la aceleración en función del tiempo.

obtendremos la velocidad en cada uno de esos instantes. Llevando sobre un sistema de coordenadas los tiempos en abscisas y las velocidades en ordenadas, obtendremos la representación gráfica de la velocidad: es una curva llamada *cosinusoide*.

Comparación entre las dos gráficas. Superpongamos los dos sistemas de coordenadas. Las gráficas ilustran algo que ya sabemos:

1, que cuando el punto pasa por la posición de equilibrio ($x = 0$), su velocidad es máxima;

2, que cuando el punto alcanza su máxima elongación ($x = r$), la velocidad se anula, e inmediatamente cambia de sentido (de signo).

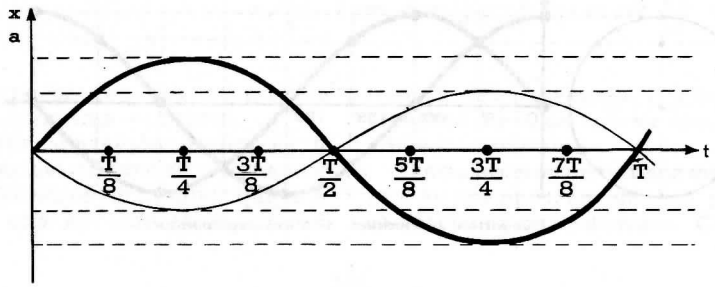
3, que siempre que el punto se aleja de su posición de equilibrio, su velocidad disminuye, y cuando se acerca, aumenta.

Representación gráfica de la aceleración. La aceleración en cada instante t está dada por la fórmula

$$a = -\omega^2 x.$$

Construyendo una tabla de valores análoga a la de la velocidad, podremos obtener su representación gráfica que también es una sinusoide.

Comparación de las gráficas de la elongación y la aceleración. Superponiendo los dos sistemas de coordenadas, se observa que las dos curvas muestran la característica esencial del movimiento vibratorio armónico: a medida que la elonga-



ción crece, crece la aceleración, (y por lo tanto la fuerza), pero siempre en sentido contrario a aquélla, tratando de restituir el punto a su posición de equilibrio.

El péndulo físico

El péndulo a que nos hemos referido hasta ahora es muy particular, pues, como dijimos, sólo existe en nuestra imaginación. Los péndulos que podemos construir no tienen una masa puntual: son los *péndulos físicos*, también llamados *compuestos*.

Un cartón colgado por uno de sus puntos, de modo que pueda oscilar, es un péndulo físico.

El problema que nos proponemos resolver ahora, es hallar la relación que vincula el período de un péndulo físico con su peso.

Separemos al péndulo de su posición de equilibrio, en un ángulo φ pequeño (aunque en la figura no lo sea). Si lo soltamos, sobre el péndulo actúa una cupla, cuya fuerza es el peso, y cuyo brazo es $OB = d \operatorname{sen} \varphi$. El momento de la cupla es, pues,

$$M = P\, d \operatorname{sen} \varphi.$$

Esa cupla comunica al péndulo una aceleración angular γ (que no es constante) tal, que si llamamos I al momento de inercia del péndulo con respecto a O, punto de suspensión,

$$\gamma = \frac{M}{I} = \frac{P\, d \operatorname{sen} \varphi}{I}.$$

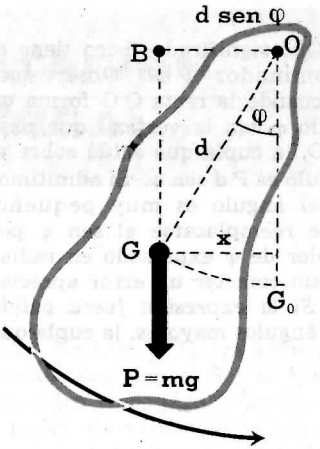
Si llamamos

$$x = d \operatorname{sen} \varphi$$

resulta:

$$\gamma = \frac{P\, d \operatorname{sen} \varphi}{I} = \frac{P\, x}{I} = \frac{P}{I} x.$$

La aceleración tangencial del



centro de gravedad G, llamémosla a, es:

$$a = \gamma\, d = \frac{P}{I} x\, d = \frac{P\, d}{I} x.$$

Como se ve si se observa la figura, la aceleración a tiene siempre un sentido tal que se opone al crecimiento de las x, de modo que corresponde asignarles a ambas signos opuestos entre sí:

$$a = -\frac{P\, d}{I} x.$$

Como vemos, el movimiento de G es también oscilatorio armónico.

Pero sabemos que la aceleración de un punto que tiene un movimiento oscilatorio armónico es:

$$a = -\omega^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

en donde T es el período de su movimiento; de modo que de las dos últimas igualdades resulta:

$$\frac{P\, d}{I} = \frac{4\pi^2}{T^2} \therefore\ T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{P\, d}}.$$

¿Qué significado físico tiene el denominador P d? Observemos que cuando la recta O G forma un ángulo φ con la vertical que pasa por O, la cupla que actúa sobre el péndulo es P d sen φ. Si admitimos que el ángulo es muy pequeño, puede reemplazarse el sen φ por el valor de φ expresado en radianes, sin cometer un error apreciable. *Si la expresión fuera válida* para ángulos mayores, la cupla que actuaría sobre el péndulo cuando $\varphi = 1$ radián, sería precisamente P d. De modo que P d representa el momento de la cupla que actúa sobre el péndulo cuando éste está separado 1 radián de su posición de equilibrio. Se llama *cupla directriz*, y nosotros la representamos con la letra D:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}.$$

Problemas

1. Un péndulo de longitud 1 tiene determinado período T. ¿Cuántas veces mayor será la longitud del péndulo cuyo período es 2 T?

R.: 4 veces mayor

2. Un péndulo tiene un cierto período T. ¿Qué período tendrá un péndulo de longitud 3 veces mayor?

R.: $\sqrt{3} \cdot T$

3. ¿Cuál es el período de un péndulo de 36 cm de largo?

R.: $T = 1{,}2^s$

4. ¿Qué longitud habrá que darle a un péndulo, para que oscile con un período $T = 2{,}4^s$?

R.: 144 cm

5. Compárense los resultados de los problemas 3 y 4.

6. Un reloj de pared adelanta. ¿Habrá que acortar o alargar su péndulo? ¿Por qué?

7. Un reloj de péndulo, que en Buenos Aires anda bien, ¿adelanta o atrasa si se lo lleva a Comodoro Rivadavia?

19 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

A lo largo de los capítulos anteriores hemos tenido oportunidad de apreciar la gran importancia de la aceleración de la gravedad. Hemos aprendido que:

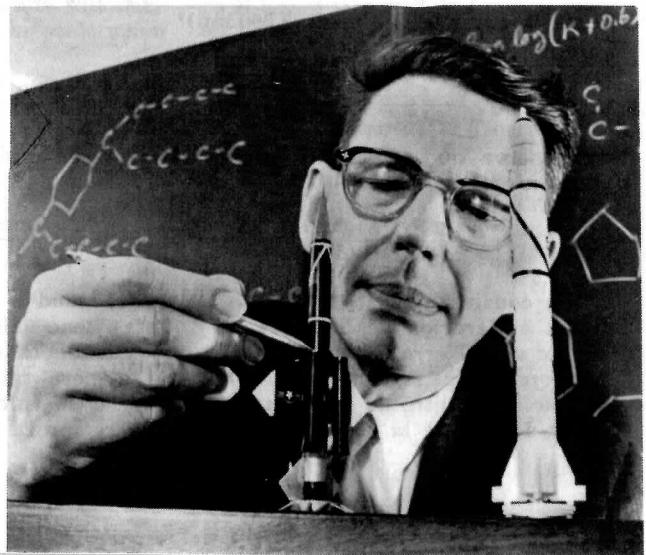
1) Es la aceleración que adquiere un cuerpo cuando cae, atraído por la Tierra.

2) Varía de un lugar a otro de la Tierra. En los polos vale $983 \frac{cm}{s^2}$; en el ecuador, $978 \frac{cm}{s^2}$; en Buenos Aires, $980 \frac{cm}{s^2}$. Se define como aceleración normal el valor a 45° de latitud y al nivel del mar: $980,665 \frac{cm}{s^2}$

3) No sólo la Tierra atrae a los cuerpos; también el Sol, la Luna y todo astro (más tarde veremos que el poder de atracción es característico de toda *masa*). En la Luna, la aceleración de la gravedad vale $167 \frac{cm}{s^2}$; en el Sol es 28 veces mayor que en la Tierra.

Un viaje por el sistema planetario

Los fantásticos progresos de la ciencia moderna harán que nos cueste poco imaginar un viaje por



. . . y el hombre quería llegar a la Luna. (Gentileza Esso Oilways.)

los inmensos y silenciosos espacios siderales. Nuestro vehículo: un avión cohete con combustible atómico; nuestro objetivo: *estudiar de qué depende el valor de la aceleración de la gravedad*; nuestras armas: *un péndulo y un reloj.*

A poco de andar observaríamos que nuestro péndulo oscila cada vez más lentamente a medida que nos *alejamos* de la Tierra: el período se hace cada vez *mayor*. Como la longitud no ha variado, la fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

nos lleva a la conclusión de que:

La aceleración de la gravedad disminuye a medida que aumenta la distancia a la Tierra.

Claro que eso no nos conforma. ¿Será, simplemente, una proporcionalidad inversa entre g y la distancia d? ¿O entre g y el *cuadrado* de d? ¿O el *cubo* de d? Ya sabemos cómo se sale de estas encrucijadas: *hay que medir* las distancias y los respectivos valores de g, *y ver qué relación* hay entre ellos.

Al llegar a 6 400 km de altura (como el radio de la Tierra mide 6 400 km, estamos a 2 radios de distancia del centro de la Tierra) medimos con nuestro péndulo el valor de g, y resulta ser de 245 cm/s², es decir, 4 veces menos que en la superficie de la Tierra; volvemos a medir a una altura de 3 radios del centro de la Tierra, y obtenemos un valor 9 veces menor que en la superficie: 101 cm/s². Esto nos indica que hay una *proporcionalidad inversa* entre la *aceleración* de la gravedad y el *cuadrado de la distancia* al centro de la Tierra. En efecto, estableciendo las razones:

$$\frac{g}{1/d^2} = \frac{980\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{1/(6\,400\ \text{km})^2} \cong 4 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2,$$

$$\frac{g'}{1/d'^2} = \frac{245\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{1/(12\,800\ \text{km})^2} \cong 4 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2,$$

$$\frac{g''}{1/d''^2} = \frac{101\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}{1/(19\,200\ \text{km})^2} \cong 4 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2,$$

se observa que todas ellas son iguales, o sea que existe la proporcionalidad:

$$\frac{g}{1/d^2} = \frac{g'}{1/d'^2} = \frac{g''}{1/d''^2} = \ldots \cong 4 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2.$$

En conclusión:

La aceleración de la gravedad debida a la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la misma.

Es decir, que la aceleración de la gravedad a dos distancias distintas tiene valores diferentes, pero vinculados con las distancias de manera tal, que el cociente entre cada valor de la aceleración y la recíproca del cuadrado de la

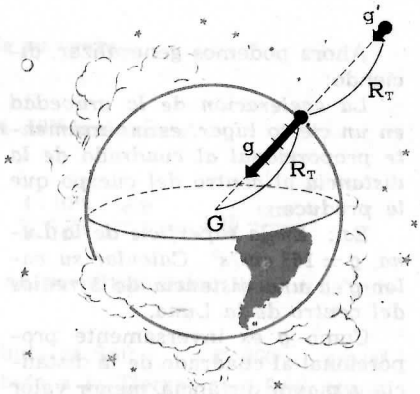
distancia es siempre el mismo: $4 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2$.

NOTA: Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, se expresa esa proporcionalidad inversa escribiendo que el producto es constante:

$$g \cdot d^2 = g' \cdot d'^2 = g'' \cdot d''^2 = \ldots = \text{constante.}$$

Un simple artificio nos permite representar ese producto como cociente, y lo hacemos así por ser más conveniente en este caso, como se verá más adelante:

$$g\, d^2 = \frac{g}{1/d^2} = \text{constante.}$$



A dos radios terrestres del centro de la Tierra, la aceleración de la gravedad es 1/4 de su valor en la superficie.

La aceleración de la gravedad debida a los demás astros

Cómo depende de la distancia

La proporcionalidad que hemos descubierto, ¿será válida solamente para la Tierra, o la aceleración de la gravedad producida por el Sol, la Luna o cualquier otro astro gozará de la misma propiedad?

Con nuestro avión, el péndulo y el reloj, es "fácil" averiguarlo. Encontraríamos que siempre se cumple la misma proporcionalidad, sea donde fuere. El factor de proporcionalidad, que para la Tierra vale $4 \cdot 10^{10}\ \text{km}^2 \cdot \text{cm/s}^2$, es otro para el Sol, y otro para la Luna, y cada astro tiene el suyo.

Para la Tierra: $\frac{g_T}{1/d^2_T} \cong 4 \cdot 10^{10}\ \text{km}^2 \cdot \text{cm/s}^2$ (Radio de la Tierra $\cong$ 6 400 km; en su superficie $g_T \cong 980 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$).

Para la Luna: $\frac{g_L}{1/d^2_L} \cong 5 \cdot 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{km}^2$ (Radio de la Luna $\cong$ 1 700 km; en su superficie $g_L = 167 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$).

Para el Sol: $\frac{g_s}{1/d^2_s} \cong 13 \cdot 10^{15}\ \text{km}^2 \cdot \text{cm/s}^2$ (Radio del Sol $\cong$ 700 000 km; en su superficie $g_s \cong 27\,000 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$).

Ahora podemos generalizar, diciendo:

La aceleración de la gravedad en un cierto lugar, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro del cuerpo que la produce.

EJ.: *En la superficie de la Luna, $g = 167\ cm/s^2$. Calcular su valor g' a una distancia de 5 radios del centro de la Luna.*

Como g es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, a *mayor* distancia, *menor* valor de g, y a una distancia 5 veces mayor, una aceleración $5^2 = 25$ veces menor. En fórmulas:

$$\frac{g}{1/d^2} = \frac{g'}{1/d'^2}$$

o sea:

$$g\,d^2 = g'\,d'^2.$$

Luego:

$$g' = g\,\frac{d^2}{d'^2},$$

y como:

$$\frac{d}{d'} = \frac{1 \text{ radio}}{5 \text{ radios}} \text{ es } \frac{d^2}{d'^2} = \frac{1}{25}$$

$$g' = 167\,\frac{cm}{s^2} \cdot \frac{1}{25} = 6{,}68\,\frac{cm}{s^2}$$

EJ.: *Sabiendo que la distancia Tierra-Luna es de unos 300 000 km,*

$$\frac{g_L}{1/d^2_L} = g_L d^2_L \cong 5 \cdot 10^8\,km^2 \cdot cm/s^2$$

Luego:

$$g_L \cong \frac{5 \cdot 10^8}{d^2_L}\,km^2 \cdot cm/s^2 = \frac{5 \cdot 10^8}{(700\,000\,km)^2}\,\frac{cm}{s^2} \cdot km^2 \cong 0{,}001\,\frac{cm}{s^2},$$

Es decir que, a una distancia del centro de la Luna igual al radio del Sol (700 000 km), la aceleración de la gravedad debida a la Luna vale 0,001 $cm/^2$; a esa misma distancia, *pero del centro del Sol*, la g debida al Sol vale 27 000 cm/s^2, es decir, aproximadamente 27 millones de veces más.

PROBLEMA: *Calcular la g pro-calcular a qué distancia del centro de la Tierra la gravedad producida por ella y por la Luna se anulan.*

Resuélvalo con la ayuda de un dibujo y teniendo presente que a una distancia x del centro de la Tierra, la gravedad es:

$$g'_T = g_T\,\frac{R^2_T}{x^2}\ (g_T = 980\,\frac{cm}{s^2};\ R_T = \text{radio terrestre}),$$

y que a la distancia $l - x$ del centro de la Luna (l es la distancia Tierra-Luna), la gravedad es:

$$g'_L = g_L\,\frac{R^2_L}{(l-x)^2}\ (g_L = 167\,\frac{cm}{s^2};\ R_L = \text{radio lunar}).$$

Respuesta: aproximadamente, a 270 000 km.

Cómo depende la aceleración de la gravedad de la masa del cuerpo que la produce

PROBLEMA: *Calcular g a 700 000 kilómetros del centro de la Luna (suponiendo que los demás astros no influyen).*

Sabemos que:

ducida por la Tierra a 700 000 km de su centro.

Como

$$\frac{g_T}{1/d_T^2} = g_T\, d_T^2 \cong 4 \cdot 10^{10}\ \text{km}^2 \cdot \text{cm/s}^2$$

resulta:

$$g_T = \frac{4 \cdot 10^{10}\ \text{km}^2 \cdot \text{cm/s}^2}{(700\,000\ \text{km})^2} \cong \frac{4 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{11}}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}08\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Los dos últimos problemas nos han permitido saber que: a la misma distancia de sus centros:

Aceleración de la gravedad
- debida al Sol: 27 000 cm/s²
- debida a la Tierra: 0,08 cm/s²
- debida a la Luna: 0,001 cm/s²

A otras distancias se obtendrán otros valores, pero la proporción entre ellos se mantendrá:

g del Sol = 340 000 veces mayor que la g de la Tierra.

g de la Tierra = 80 veces mayor que la g de la Luna.

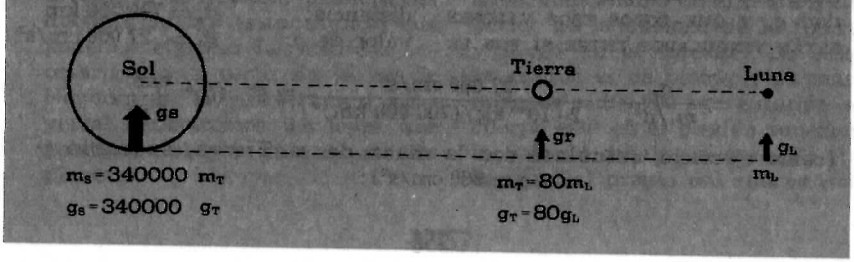
Pero ahora, lo interesante está en que la masa del Sol es justamente unas 340 000 veces mayor que la masa de la Tierra, y la de ésta, unas 80 veces la de la Luna. Esto nos induce a pensar que existe una proporcionalidad directa entre el valor de la aceleración de la gravedad y la masa del cuerpo que la produce. Y en efecto, calculando las razones, se observa que son iguales:

$$\frac{g_s}{m_s} = \frac{27\,000\ \text{cm/s}^2}{2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}} \cong 14 \cdot 10^{-27}\ \text{cm/kg} \cdot \text{s}^2$$

$$\frac{g_T}{m_T} = \frac{0{,}08\ \text{cm/s}^2}{5{,}5 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} \cong 14 \cdot 10^{-27}\ \text{cm/kg} \cdot \text{s}^2$$

$$\frac{g_L}{m_L} = \frac{0{,}001\ \text{cm/s}^2}{7 \cdot 10^{22}\ \text{kg}} \cong 14 \cdot 10^{-27}\ \text{cm/kg} \cdot \text{s}^2$$

A distancias iguales de distintos astros, las aceleraciones de la gravedad tienen valores que dependen de las masas de esos astros.



Luego:

La aceleración de la gravedad producida por un cuerpo es directamente proporcional a su masa:

$$\frac{g_s}{m_s} = \frac{g_T}{m_T} = \frac{g_L}{m_L} = \ldots =$$

$$= \frac{g}{m} \cong 14 \cdot 10^{-27} \text{ cm/kg s}^2,$$

en donde la última razón es el cociente entre la gravedad, g, que produce un cuerpo cualquiera, y su masa, m, a una distancia de 700 000 km de su centro.

Reuniendo en una sola las dos proporcionalidades que hemos descubierto, diremos:

La aceleración de la gravedad g, producida por un cuerpo de masa m, a una distancia d, de su centro de gravedad, es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Para expresarla en símbolos, diremos que a una distancia cualquiera d_s de su centro, la masa m_s del Sol produce una aceleración de la gravedad g_s; que a una distancia cualquiera d_T de su centro, la masa m_T de la Tierra provoca una aceleración de la gravedad g_T; que a una distancia cualquiera d_L de su centro, la masa m_L de la Luna produce una aceleración de la gravedad g_L; que a una distancia d de su centro, una masa cualquiera m produce una aceleración de la gravedad g, Y QUE TODOS ESOS VALORES ESTÁN VINCULADOS ENTRE SÍ POR LA RELACIÓN:

$$\frac{g_s}{m_s/d^2_s} = \frac{g_T}{m_T/d^2_T} = \frac{g_L}{m_L/d^2_L} =$$

$$= \ldots = \frac{g}{m/d^2} = \text{constante} = \varepsilon.$$

A este valor constante de la razón entre la aceleración de la gravedad y el cociente entre la masa y el cuadrado de la distancia, se lo llama CONSTANTE DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL, y lo representamos con la letra ε.

En consecuencia, si conocemos la constante ε podemos calcular la aceleración de la gravedad que produce una masa m a una distancia d de su centro, aplicando la fórmula:

$$g = \varepsilon \frac{m}{d^2}.$$

La constante de la gravitación universal

Como el conocimiento del valor de ε nos permite calcular cualquier valor de la aceleración de la gravedad, se comprende la importancia que tiene su medición.

Con nuestro equipo de avión-cohete, péndulo y reloj, ya hemos obtenido los datos necesarios, pues para calcularla basta conocer la masa de un cuerpo, la distancia desde el lugar en donde medimos hasta el centro del cuerpo, y el valor de g en ese lugar. Tomemos, por ejemplo, como valores medidos:

masa del Sol: $m_s = 2 \cdot 10^{30}$ kg
distancia: $d_s = 700\,000$ km
valor de g: $g_s = 27\,000$ cm/s^2

$$\varepsilon = \frac{g_s}{m_s/d^2_s} = \frac{27\,000 \text{ cm/s}^2}{2 \cdot 10^{30} \text{ kg}/(700\,000 \text{ km})^2} \cong 67 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^3}{\text{g s}^2}.$$

(como ejercicio, calcúlese con la masa de la Tierra, su radio y $g = 980$ cm/s^2):

La ley de la gravitación universal

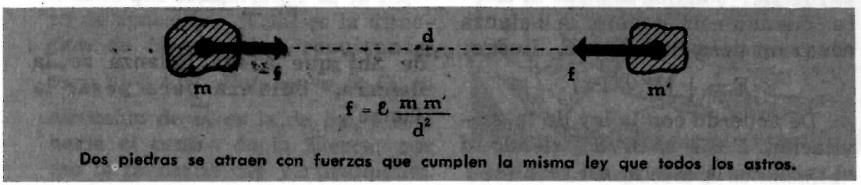
De todo esto resulta que un cuerpo de masa m, a una distancia d de su centro, tiene una influencia tal que cualquier cuerpo colocado a esa distancia es atraído hacia la masa m con una aceleración

$$a = \varepsilon \frac{m}{d^2}.$$

Si la masa del cuerpo atraído es m', la fuerza que actúa sobre él es:

$$f = m' a = \boxed{\varepsilon \frac{m\, m'}{d^2}}.$$

Como por el principio de acción y reacción el segundo cuerpo atrae al primero con una fuerza igual y opuesta, resulta que:



Dos piedras se atraen con fuerzas que cumplen la misma ley que todos los astros.

Ley de la gravitación universal: dos masas cualesquiera, m y m', entre cuyos centros existe cierta distancia, d, se atraen con una fuerza directamente proporcional a sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Esta ley se debe a Newton, quien la dedujo a partir de las leyes de Képler, que describen los movimientos de los planetas, y admitiendo que las fuerzas con que el Sol y los planetas se atraen entre sí eran de la misma naturaleza que las fuerzas de gravedad terrestre.

Nosotros seguimos un camino inverso al de Newton: primero deducimos su ley (suponiendo que podemos efectuar las medidas necesarias), y a partir de la ley de Newton de la gravitación universal deduciremos las leyes que gobiernan el movimiento de los planetas.

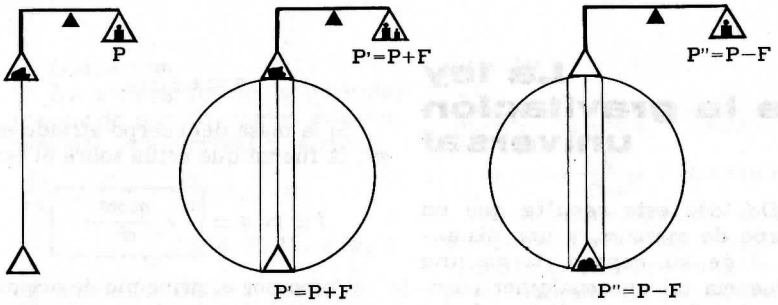
Medición experimental de la constante de la gravitación

Newton no conocía la constante ε, si bien sabía que:

$$g = \frac{\varepsilon\, m_T}{R_T^2} \qquad (1)$$

(m_T, masa de la Tierra);

en esa ecuación hay dos incógnitas, ε y m_T. Si se conoce m_T se puede calcular ε; y, recíprocamente, si se conoce ε se puede calcular m_T. Se comprenderá, pues, el interés por medir ε. Richarz y Krigar Menzel la midieron de la siguiente manera: con una balanza muy sensible pesaron un mismo cuerpo de masa m, colocándolo en el platillo superior de la balanza de la figura, y luego en el inferior. La esfera grande es de plomo, y su masa mide $m' = 100\,000$ kg. Cuando el cuerpo está en el platillo superior, la balanza señala un peso P', que es igual al propio del cuerpo más



La balanza para "medir la masa de la Tierra". El cuerpo pesa P; cuando está encima de la gran esfera pesa P' = P + F; cuando está debajo, pesa P'' = P − F.

la fuerza F con que lo atrae la esfera; cuando está debajo, la balanza acusa un peso $P'' = P - F$. Luego:

$$F = \tfrac{1}{2}(P' - P'').$$

De acuerdo con la ley de la gravitación $F = \varepsilon \cdot m\,m'/d^2$, siendo d el radio de la esfera; así resulta:

$$\tfrac{1}{2}(P' - P'') = \varepsilon \frac{m'\,m}{d^2} \therefore \varepsilon = \tfrac{1}{2}(P' - P'') / \frac{m'\,m}{d^2}.$$

Disponiendo del valor de ε, con (1) se puede calcular la masa de la Tierra:

$$m_T = \frac{g\,R^2_T}{\varepsilon}$$

de ahí que a esa balanza se la llamara, "balanza para pesar la Tierra".

¿Con qué fuerza la Tierra atrae a la Luna?

Basta aplicar la ley de Newton, conociendo la masa de la Luna, que es de $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg:

$$F = \varepsilon \frac{m_T\,m_L}{d^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{g\,s^2} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^{27}\,g \cdot 7{,}3 \cdot 10^{25}\,g}{(3{,}8 \cdot 10^{10})^2\,cm^2} \cong$$

$$\cong 2 \cdot 10^{25}\,\text{dyn} = 2 \cdot 10^{19}\,\vec{kg}.$$

¿Por qué no cae la Luna sobre la Tierra?

Cuenta una popular anécdota que Newton descansaba bajo un manzano, cuando observó la caída de una manzana que, según algunos, le dio en la cabeza. Newton se preguntó, genialmente: "¿Por qué no cae la Luna?" La respuesta fue nada menos que su ley de la gravitación, "la Clave del universo".

Porque no hay duda que la Luna debiera caer sobre la superficie de la Tierra, lo mismo que cayó la manzana, pues la Tierra atrae tanto a una como a otra, y a la Luna, con una fuerza de nada menos que ¡$2 \cdot 10^{19}\,\vec{kg}$!

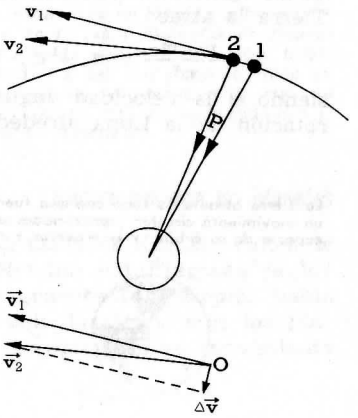
La Luna no cae por la misma razón que no nos golpea en la cara una piedra que revoleamos con un hilo, a pesar de que tiramos de ella hacia nosotros. ¿Cuál es la diferencia entre la manzana y la Luna? Es que la manzana colgaba *quieta* en el momento en que se

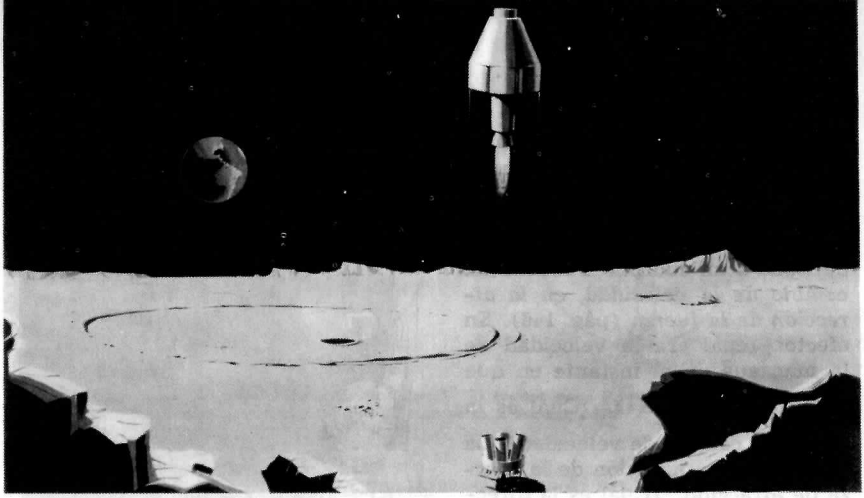
desprendió, mientras que la Luna *está girando* alrededor de la Tierra. A las dos –Luna y manzana– la Tierra les aplica una fuerza (el peso), pero... ¿qué hace una fuerza aplicada a un cuerpo? Produce un *cambio de la velocidad, en la dirección de la fuerza* (pág. 146). En efecto: ¿cuál era la velocidad de la manzana en el instante en que se soltó? Era $\vec{v}_1 = 0$. ¿Cuál es la de $\Delta\vec{v}$, el cambio de velocidad? La misma que la dirección de la fuerza de atracción. ¿Cuál es la dirección de la velocidad resultante, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$? Por ser $\vec{v}_1 = 0$, la dirección de $\vec{v}_2$ es la de $\Delta\vec{v}$, o sea, hacia el centro de la Tierra: por eso la manzana cae verticalmente.

En cambio: ¿qué dirección tiene –en un instante arbitrario– la velocidad $\vec{v}_1$ de la Luna? La dirección de la tangente a la órbita de la Luna. ¿Cuál es la dirección del cambio de la velocidad? Es la dirección de la fuerza de atracción. ¿Cuál es la dirección de la velocidad resultante, $\vec{v}_2$? Es la dirección de la tangente a la órbita de la Luna. Por eso la Luna no cae hacia la Tierra. En verdad cae, pero no verticalmente sino siguiendo su órbita.

Es exactamente lo que ocurre con un astronauta en órbita: está cayendo continuamente... ¡pero no en dirección a la Tierra, sino tangencialmente a su órbita! Y mientras está en órbita, no sólo él, sino su vehículo y todo lo que hay en él está cayendo. Por eso, si toma con la mano un objeto cualquiera, lo coloca a la altura de sus ojos y abre la mano... ¡el objeto queda suspendido en la cabina, como si no

pesara! La explicación es sencilla: el objeto no cae al piso de la aeronave porque... ¡ya antes de abrir la mano venía cayendo, pero junto con él también el navío espacial y el piloto y la mano venían cayendo! Cayendo... ¿en qué dirección? ¡En dirección de la tangente a la órbita del navío! Dentro de la aeronave nada cae al piso, porque como todo cae con la misma aceleración g, la aceleración relativa es nula. Por eso se dice que el astronauta está sometido a un





Idealización de la partida de un vehículo espacial desde la Luna.

estado de ingravidez. Es como en un salto: si un nadador salta desde el trampolín con una manzana en la mano, y ya en el aire la abre, la manzana irá siempre junto a él; y él la verá –durante la caída– siempre a la misma altura de sus ojos, ahí donde la dejó.

Newton comprobó que su idea estaba de acuerdo con la realidad, calculando la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra mediante datos de la Luna.

Según pensó, la fuerza centrípeta que actúa sobre la Luna debe ser igual a la fuerza con que la Tierra la atrae:

$$\varepsilon \frac{m_T\, m_L}{d^2} = m_L\, \omega^2\, d\,,$$

siendo ω la velocidad angular de rotación de la Luna alrededor de la Tierra, y d el radio de la órbita de la Luna.

Como $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (T, período de revolución de la Luna), resulta:

$$\varepsilon \frac{m_T\, m_L}{d^2} = m_L\, \frac{4\pi^2}{T^2}\, d\,,$$

y por lo tanto:

$$\varepsilon\, m_T = \frac{4\pi^2}{T^2}\, d^3.$$

Sabemos que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

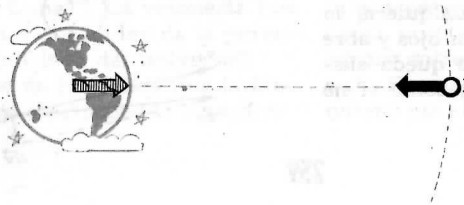
$$g = \varepsilon \frac{m_T}{R^2_T} \;\therefore\; \varepsilon\, m_T = g\, R^2_T,$$

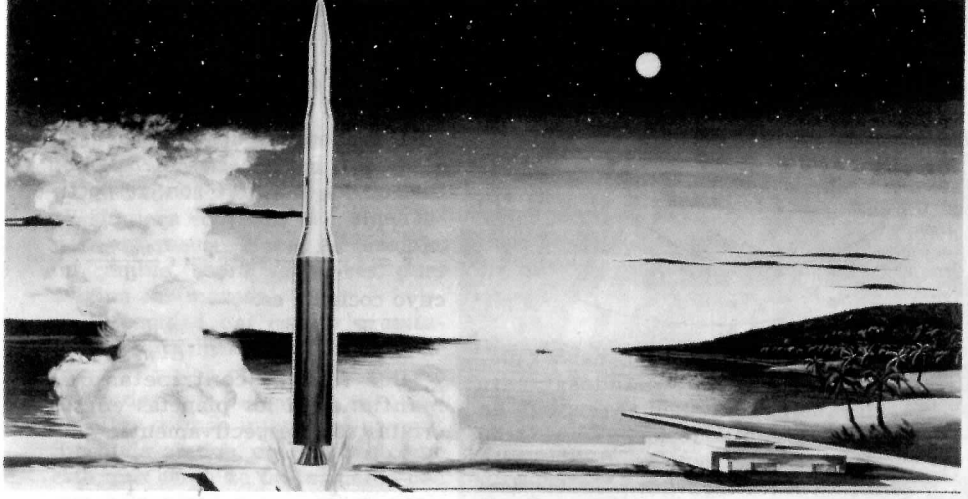
de donde resulta:

$$g\, R^2_T = \frac{4\pi^2}{T^2}\, d^3 \;\therefore\; g = \frac{4\pi^2}{R^2_T\, T^2}\, d^3.$$

Con los datos que conocemos

La Tierra atrae a la Luna con una fuerza que se emplea en hacer describir a la Luna un movimiento circular (aproximadamente); si desapareciera la atracción, la Luna escaparía de su órbita, y se movería eternamente con movimiento rectilíneo y uniforme.





Idealización de la partida de un cohete portador de un satélite artificial desde la Tierra.

hoy, nos permite obtener el valor $g = 9{,}8\ m/s^2$.

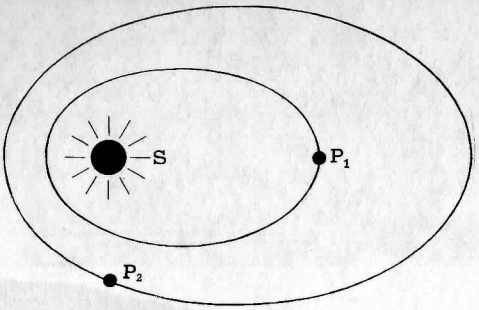
Newton realizó el cálculo, pero obtuvo otro resultado, porque en su época se atribuía otro valor al radio terrestre. Por esa razón no publicó inmediatamente sus resultados. Años más tarde se conocieron mejores valores de R_T, y con ellos Newton repitió sus cálculos y publicó su trabajo.

Cómo se descubrió la existencia de un planeta sin necesidad de telescopio

Unos de los éxitos más asombrosos de la ley de Newton fue el descubrimiento de Neptuno, realizado *únicamente* con lápiz y papel. La anécdota es interesante y merece contarse con cierto detalle: la ley de Newton se cumple con tanta exactitud, que cuando se observa que algún astro no la sigue con la precisión debida, ello no indica que la ley esté equivocada, sino que alguna causa desconocida –por ejemplo, algún otro astro no visible– perturba el movimiento. No debe olvidarse que *todos* los astros se influyen mutuamente. Urano, planeta perteneciente a nuestro sistema solar, mostraba irregularidades que molestaban a físicos y astrónomos. Su órbita no cumplía exactamente con lo que las leyes científicas predecían. Hacia 1840, Leverrier, astrónomo francés, se dedicó a estudiar cuidadosamente todo lo referente al movimiento de Urano. Cinco años más tarde comunicaba a la Academia de Ciencias de París que dichas perturbaciones se debían a la existencia de otro planeta, desconocido, hasta ese momento. El estudio de Leverrier fue tan minucioso y profundo, que llegó a saber muchas cosas sobre ese planeta, aunque sus ojos nunca lo habían visto. Cuando sus cálculos estuvieron terminados, escribió a Galle, astrónomo del observatorio de Berlín, indicándole que tal día, a tal hora, debía observar con su anteojo astronómico tal lugar del cielo. Galle cumplió sus instrucciones, y el día señalado (23 de septiembre de 1845), a la hora predicha y en el lugar indicado, el planeta concurrió a la cita que Leverrier había calculado. Y así fue como la corte de nuestro Sol se vio enriquecida con un nuevo miembro, que fue bautizado con el nombre de Neptuno.

Cómo se mueven los planetas

LAS LEYES DE KÉPLER. Antes de que Newton estableciera la ley de la gravitación, Képler había enunciado las leyes que los planetas cumplen en su movimiento



Los planetas describen elipses en uno de cuyos focos está el Sol.

alrededor del Sol. Las había obtenido estudiando cuidadosamente los datos que había reunido un astrónomo anterior a él: *Ticho Brahe*. Estas leyes son:

Primera ley: Los planetas describen elipses, en uno de cuyos focos está el Sol.

Segunda ley: El segmento de recta que determina el Sol con un planeta, llamado radio vector del planeta, en tiempos iguales describe áreas iguales.

Tercera ley: Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus respectivas elipses.

Deduciremos la tercera ley a partir de la ley de Newton, admitiendo, para simplificar, que los planetas describen circunferencias y no elipses. De esta manera, el enunciado de la tercera ley es: "Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son directamente proporcionales a los cubos de sus respectivas distancias al Sol".

Consideremos dos planetas cualesquiera, P y P'. Las fuerzas con que el Sol los atrae son, respectivamente:

$$F = \varepsilon \frac{m_s\, m}{d^2} \text{ y } \quad F' = \varepsilon \frac{m_s\, m'}{d'^2},$$

cuyo cociente es:

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{d^2} : \frac{m'}{d'^2} = \frac{m\, d'^2}{d^2\, m'}.$$

Las fuerzas centrípetas que mantienen a los planetas en sus órbitas son, respectivamente:

$$F = m \frac{4\,\pi^2}{T^2}\, d \text{ y } \quad F' = m' \frac{4\,\pi^2}{T'^2}\, d',$$

y su cociente es:

$$\frac{F}{F'} = m \frac{4\,\pi^2}{T^2}\, d : m' \frac{4\,\pi^2}{T'^2}\, d' = \frac{m\, d\, T'^2}{m'\, d'\, T^2}.$$

Luego:

$$\frac{m\, d'^2}{d^2\, m'} = \frac{m\, d\, T'^2}{m'\, d'\, T^2},$$

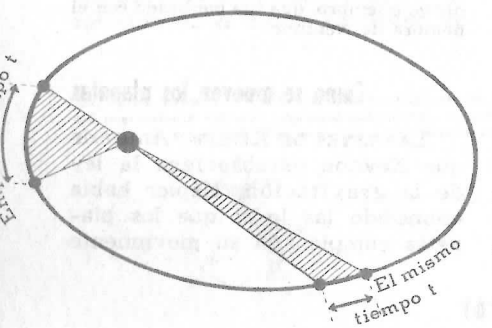
y simplificando resulta:

$$\frac{d'^3}{d^3} = \frac{T'^2}{T^2}.$$

Campo gravitatorio. La acción gravitatoria de la Tierra alcanza hasta puntos muy alejados de ella; teóricamente, hasta el infinito. Toda la región del espacio en la cual actúa la atracción de la Tierra recibe en Física el nombre de "campo gravitatorio terrestre".

Por supuesto, que no sólo la Tierra tiene su campo gravitatorio, sino también el Sol, la Luna, Marte y el resto de estrellas y planetas. Y no sólo ellos, sino *todos* los cuerpos, por modestos que sean: yo, usted, una hormiga, este libro, un cenicero, un vaso.

Vivimos sumergidos en un mundo de múltiples campos gravitatorios, que se influyen mutuamente. Pero algunos de ellos pre-



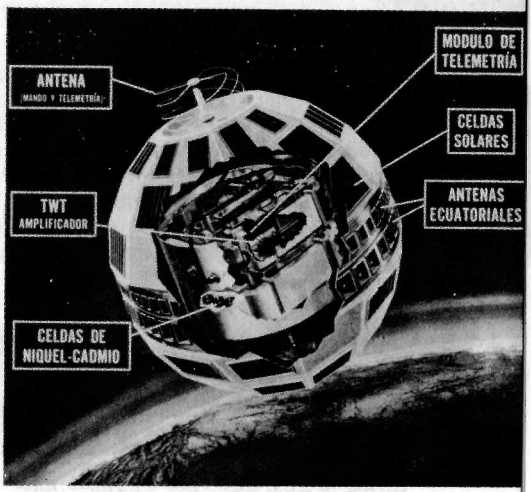
Cuando está más cerca del Sol, la velocidad lineal del planeta es mayor.

ponderan. Así, de los infinitos campos que nos rodean, sólo uno percibimos fácilmente: el terrestre. Ni siquiera sentimos el campo lunar, aunque su efecto es sensible, en cambio, sobre los mares, pues origina las mareas.

Intensidad del campo gravitatorio. Supongamos un cuerpo de masa m y dos puntos: P_1, situado a 2 m de M, y P_2, a 4 m. ¿En cuál de ellos es más intenso el campo? Sin duda alguna, en P_1, pues como está más cerca de m, la fuerza con que ésta atrae a una masa cualquiera m_x colocada en P_1, será mayor que si la misma masa m_x estuviera colocada en P_2.

De acuerdo con esto podemos comparar las intensidades de campo en los distintos puntos, utilizando las fuerzas de atracción. Sin embargo, resulta más cómodo hacerlo mediante las aceleraciones de la gravedad. Cualquier cuerpo colocado en P_1 "caería" hacia m con una aceleración que puede calcularse de acuerdo con la conocida fórmula $g_1 = \varepsilon \frac{m}{d_1^2}$. En P_2, la aceleración sería en cambio, $g_2 = \varepsilon \frac{m}{d_2^2}$. Resulta así que el valor de la aceleración de la "gravedad" en un punto de un campo, es la medida de la intensidad del campo en ese punto.

Los satélites artificiales. El 4 de octubre de 1957, una noticia conmovió al mundo entero: el hombre había lanzado y puesto en órbita el primer satélite artificial, el *Sputnik I.* Otros le siguieron, algunos tripulados por astronautas, y estamos presenciando una verdadera carrera internacional por llegar primero a la Luna. Hasta 1957 estas líneas parecerían extraídas de un libro de aventuras: hoy son

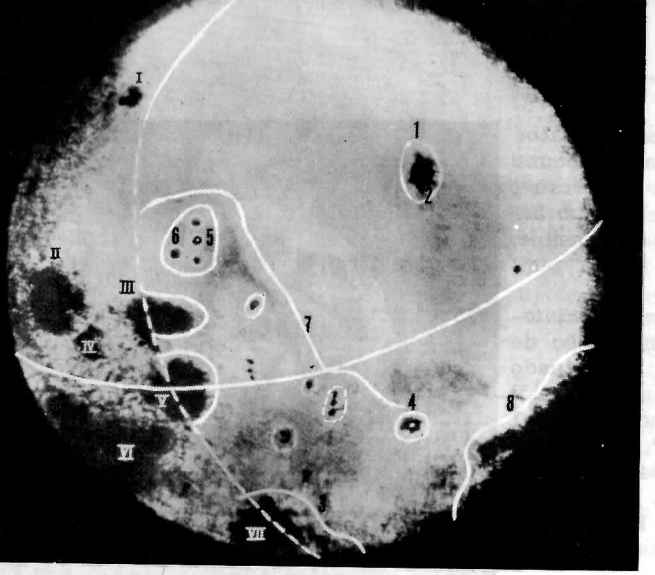


Esquema en corte de un modelo de satélite artificial.

una fantástica realidad. Veamos las ideas básicas vinculadas con esta hazaña del hombre.

Cómo escapar de la Tierra. Si con un cañón se dispara un proyectil, éste describe una parábola y finalmente cae en tierra. Cuanto más poderoso el cañón, mayor será la velocidad del proyectil y más lejos llegará. Podemos imaginar, entonces, un cañón tan poderoso como para proporcionar al proyectil la velocidad para quedar dando vueltas alrededor de la Tierra, sin caer. Pues bien, esto es precisamente lo que hacen los cohetes lanzadores de satélites, con la ventaja de proporcionar la velocidad gradualmente hasta hacerle alcanzar el valor necesario –unos 30 000 km/h– con lo cual el satélite se desprende del cohete y queda en órbita.

La velocidad de salida es diferente, por supuesto, para los dis-



Lado oculto de la Luna visto desde el Lunik 3. La línea de puntos indica el borde de la parte visible; todo lo que hay a la derecha de esta línea es invisible desde la Tierra. Las estructuras señaladas en la zona visible son: I, Mar de Humboldt; II, Mar de las Crisis; III, Mar Regional; IV, Mar de las Olas; V, Mar de Smith; VI, Mar de la Fecundidad; VII, Mar Austral. Nuevas estructuras visibles: 1, Mar de Moscú, de cerca de 300 km de anchura; 2, Bahía de los Astronautas; 3, parte hasta ahora desconocida del Mar Austral; 4, cráter Tsiolkovsky, con su pico central; 5, cráter Lomonosov, con su pico central; 6, cráter Joliot-Curie; 7, cordillera Soviética; 8, Mar de los Sueños.

tintos astros. Así, por ejemplo, para la Luna vale 8 400 km/h; para Marte, 18 000 km/h; para Júpiter, 215 000 km/h; etc. Los distintos valores de la velocidad de salida explican por qué hay astros, como la Tierra, que tienen atmósfera, mientras que otros, como la Luna, no la tienen. En efecto: las moléculas de un gas están en perpetuo movimiento, agitándose sin cesar con alta velocidad. Si esa velocidad supera la velocidad de salida, ellas se fugan. Así ha pasado con la Luna, cuya velocidad de salida es pequeña, y en parte con Marte, cuya atmósfera ha sufrido un agotamiento bastante intenso. La Tierra, en cambio, con tan elevada velocidad de salida, está a salvo de la muerte por asfixia.

¿Para qué sirve un satélite artificial? Suponemos que en la época en que el hombre se lanzaba por el aire en los primeros aeroplanos (cuyas fotos hoy nos hacen sonreír y pensar "¿cómo es posible que *esto* haya volado?"), muchos se hayan hecho también esta pregunta.

Con los satélites se han obtenido fotografías que demuestran la redondez de la Tierra. Compárese la costa occidental de África con el esquema cartográfico de la izquierda.

La realidad actual provee de innumerables respuestas, tanto para el avión como para el satélite. Incluso es tal la diversidad de aplicaciones de los satélites, que ya los hay *especializados*. Por ejemplo, el *Sputnik II* llevó consigo una perra para estudiar las condiciones de vida a tan gran altura, antes de lanzar astronautas humanos; el *Vanguard II* estaba equipado especialmente para enviar a tierra información meteorológica; el *Telestar* permitió las primeras comunicaciones por televisión entre América y Europa (es interesante señalar que en este satélite, más de 15 000 piezas estaban constituyendo diversos equipos ocupando una esfera de menos de 90 cm de diámetro . . .', y funcionó sin fallas en su primer vuelo). Hay problemas científicos que se enfrentan mediante instrumental ubicado en satélites, como el estudio de la otra cara de la Luna, fotografiada desde el *Lunik III*; el estudio de los "vientos" solares, verdaderos huracanes de partículas lanzadas durante las erupciones solares al espacio interplanetario, y que parecerían constituir uno de los mayores riesgos en un viaje a la Luna; las estrellas estudiadas desde afuera de las atmósferas (hay un proyecto de lanzar una plataforma con un gran telescopio y unos 12 observadores que permanecerían 1 año en ella). Baste con estos ejemplos...

Problemas

1. ¿Con qué fuerza se atraen dos esferas metálicas de 6 kg de masa c/u. cuyos centros se encuentran a 10 cm de distancia?

R.: $0{,}0245\ \vec{mg}$

2. Aplicando la ley de Newton determinar la masa de la Tierra y su densidad media (radio terrestre $r = 6\,370$ km; radio medio de la órbita terrestre $R = 23\,340\ r$; $g = 980$ cm/seg^2).

$M_T = 5{,}97 \times 10^{27}$ g
$\delta = 5{,}52$ g/cm^3

3. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie del Sol, cuyo radio equivale a 100 radios terrestres y cuya densidad media es 1/4 de la de la Tierra?

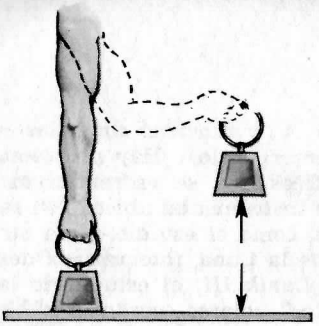
$g \cong 25\,000$ cm/s^2

4. El más alejado de los satélites de Júpiter se encuentra a 27 radios jupiterianos del centro. Dicho satélite describe su órbita en 16,69 días. ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en la superficie de Júpiter, sabiendo que el radio de Júpiter es de 71 000 km?

R.: 26,5 m/s^2

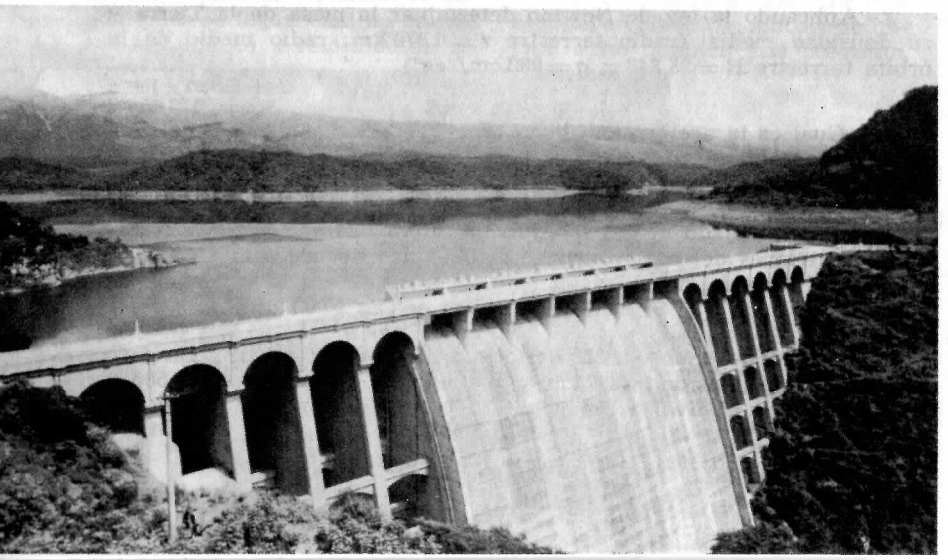
5. Al nivel del mar y a 30° de latitud, la longitud del péndulo cuyo período es $T = 1^s$, es de 24,807 cm. ¿Qué longitud deberá tener a 1 500 m de altitud sobre el nivel del mar, para que su período siga siendo de 1^s?

R.: 24,795 cm



V

LA ENERGÍA



Trabajo, potencia, energía, son palabras que empleamos diariamente, pero de una manera vaga e imprecisa, e incluso como si fueran sinónimos. Costó mucho a la ciencia distinguir claramente entre conceptos tan íntimamente vinculados entre sí, pero ahora cada una de ellas tiene un significado perfectamente definido. Durante siglos y en todas partes del mundo muchos hombres trataron afanosamente de inventar **la máquina de movimiento continuo.** *Nadie lo consiguió jamás; pero para la Ciencia ese fracaso total no fue más que aparente, pues gracias a él Mayer y Joule descubrieron una de las leyes más importantes de la Física, el Principio de Conservación de la Energía: "***la energía no se crea ni se destruye, se transforma***". Cuando una máquina entrega energía, lo que hace en verdad es* **transformar** *una clase de energía en otra. Se preguntará, entonces, para qué sirve una máquina que se limita a transformar una clase de energía en una cantidad exactamente igual. Con ese mismo criterio habría que preguntar para qué sirven las casas donde se cambia moneda . . .*

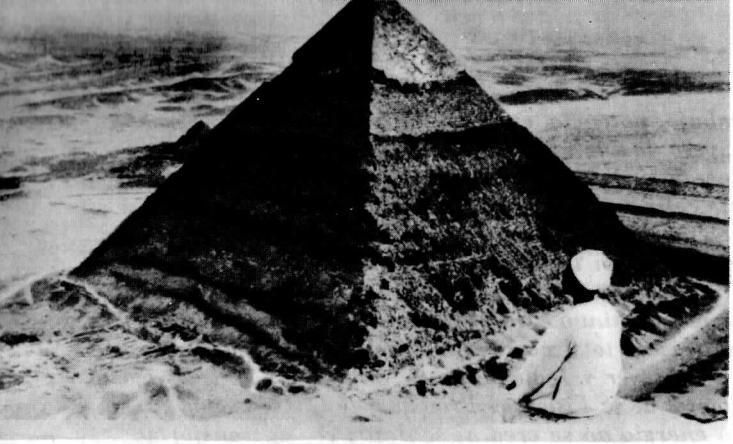
20 TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

El hombre y la máquina

Según una antigua leyenda griega, el dios Prometeo hizo al hombre de arcilla, y luego de darle vida, apiadado de su debilidad le enseñó el uso del fuego. Júpiter, dios supremo, enojado por esta acción de Prometeo, condenó a éste a ser encadenado en las rocas del Cáucaso y a ser devorado eternamente por las águilas.

Prometeo es el símbolo de la inteligencia del hombre, que mediante ella ha inventado máquinas que multiplican su débil fuerza, hasta hacerla mayor que la del animal más poderoso. Es imponente ver cómo un elefante levanta un tronco de árbol rodeándolo con su trompa; pero es más admirable ver con qué tranquilidad un obrero que maneja una grúa en el puerto levanta un vagón de ferrocarril.

Desde tiempos inmemoriales, el hombre inventó aparatos sencillos para mul-



La pirámide de Cheops en Gizeh, Egipto, construida unos 4 000 años antes de Cristo.

tiplicar su poder muscular. Miles de años atrás, los asirios inventaron la palanca de brazos desiguales para sacar agua de los ríos, y los egipcios realizaron construcciones gigantescas, que exigieron el empleo de aparatos para elevar las piedras. La pirámide de Cheops, que todavía resiste al tiempo, tiene 150 metros de altura y un volumen de más de dos millones de metros cúbicos. Se supone que las piedras fueron subidas mediante palancas y planos inclinados.

Las máquinas rudimentarias fueron evolucionando, hasta llegar a las maravillosas máquinas actuales, que ponen a la naturaleza al servicio del hombre, o poco menos. Sin embargo, muchas de aquéllas se usan hoy día. Basta observar el trabajo de los obreros que construyen una casa, y se les verá emplear palancas, poleas, planos inclinados, tal como hace miles de años.

Hay algunos conceptos físicos estrechamente ligados con las máquinas: *trabajo, potencia, energía*. Diariamente empleamos estas palabras, pero de una manera más bien vaga e imprecisa, e incluso como si fueran sinónimos. En Física, sin embargo, veremos que cada una tiene un significado diferente.

Trabajo mecánico

La palabra trabajo se emplea de diferentes modos:

Un estudiante dice: "Me costó mucho *trabajo* aprender la lección de inglés".

En un diario se lee: "...los conflictos entre el capital y el *trabajo*...".

En Física, la palabra *trabajo* se emplea en un sentido muy diferente y mucho más restringido. Diremos que un hombre, o una máquina, *realiza un trabajo, cuando vence una resistencia a lo largo de un camino.*

Ejemplo: para subir un mueble hasta un piso alto, hay que vencer una resistencia, el peso P, a lo largo de un camino, la altura *d*. El trabajo T, realizado es el producto de la fuerza, P, por la distancia recorrida, *d*:

Trabajo = Fuerza × distancia.

$$T = F \cdot d$$

El kilográmetro, unidad de trabajo

Como el trabajo se obtiene multiplicando la fuerza por la distancia, la unidad de trabajo se obtendrá multiplicando la unidad de fuerza por la unidad de longitud.

Unidad de trabajo = unidad de fuerza × unidad de longitud.

Esta unidad de trabajo se llama *kilográmetro*, y su símbolo es *kgm*.

kilográmetro = *kilogramo* × *metro*

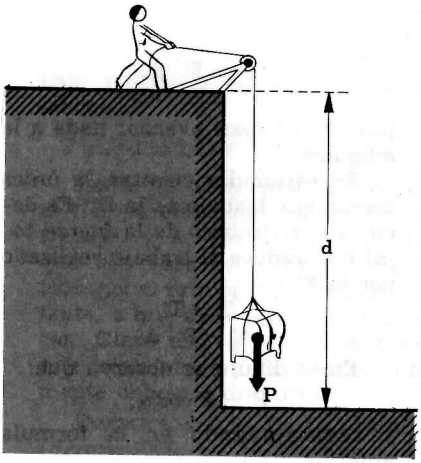
$$\text{kgm} = \vec{\text{kg}} \cdot \text{m}.$$

Podemos decir, pues, que se realiza un trabajo de 1 kgm cuando se levanta una pesa de 1 $\vec{\text{kg}}$ a una altura de 1 m; o 10 $\vec{\text{kg}}$ a 0,1 m; o 100 $\vec{\text{kg}}$ a 0,01 m, etc.

En el ejemplo anterior, supongamos que el mueble pese $P = 100\ \vec{kg}$, y que la altura sea $d = 20\ m$. El trabajo realizado para levantarlo es:

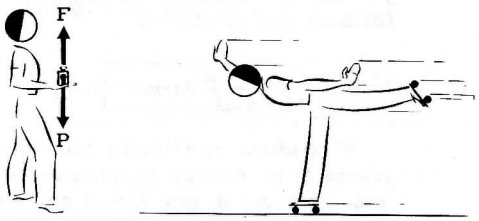
$$T = F \cdot d =$$

$$= 100\ \vec{\text{kg}} \cdot 20\ \text{m} = 2\,000\ \text{kgm}.$$



CASOS EN QUE NO SE REALIZA TRABAJO. Un señor sostiene una pesa con la mano. Le cuesta trabajo, en el sentido familiar de la palabra, pero *no realiza trabajo mecánico*, pues si bien aplica una fuerza, F, para equilibrar al peso, no hay camino recorrido por ella; luego:

$$T = F \cdot 0 = 0.$$



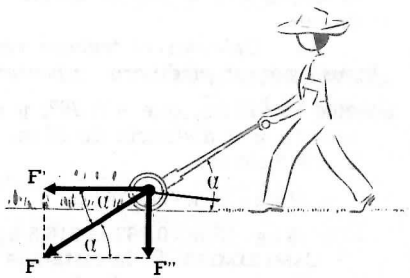
Un patinador, después de haber adquirido impulso, se deja deslizar sobre sus patines. ¿Qué trabajo realiza?

En este caso, si bien puede recorrer una distancia más o menos grande, la fuerza que realiza es nula (principio de inercia). Luego:

$$T = 0 \cdot d = 0.$$

CASO GENERAL: LA FUERZA Y EL CAMINO NO TIENEN LA MISMA DIRECCIÓN. Observemos el jardinero de la figura. Para empujar la máquina de cortar pasto aplica una fuerza F. Supongamos que recorra una distancia d. ¿Valdrá $F \cdot d$ el trabajo realizado por él? Anticipemos que, en este caso, no.

La fuerza F aplicada por el jardinero tiene dos efectos:



a) hace avanzar la máquina;

b) la aprieta contra el suelo.

Podemos descomponer F en dos fuerzas, F′ y F″; la primera hace avanzar la máquina; la segunda la aprieta contra el suelo. ¿Qué trabajo realiza cada una?

$$T' = F' \cdot d,$$
$$T'' = F'' \cdot 0,$$

pues F'' no hace avanzar nada a la máquina.

En resumidas cuentas, la única fuerza que trabaja es la F'. Es decir, que el trabajo de la fuerza total F se reduce al trabajo realizado por la F':

$$T = T'$$
$$T = F' \cdot d$$

En el dibujo se observa que:

$$F' = F \cos \alpha,$$

y reemplazando en la fórmula anterior,

$$T = F \cdot \cos \alpha \cdot d,$$

y ordenando para que no haya confusiones con el coseno,

$$\boxed{T = F\, d \cos \alpha}$$

El trabajo realizado por una fuerza F al mover a un cuerpo una distancia d, *que forma con su recta de acción un ángulo* α, *es igual al producto de la fuerza por la distancia y por el coseno del ángulo.*

EJ.: *Calcular el trabajo realizado por el jardinero, suponiendo que* $F = 10\ \vec{kg}$, *que* $\alpha = 30°$, *y que recorre una distancia de 25 m.*

$T = F\, d \cos \alpha =$

$= 10\ \vec{kg} \cdot 25\ m \cdot \cos 30° =$

$= 10\ \vec{kg} \cdot 25\ m \cdot 0{,}867 = 216{,}5\ kgm.$

CASO LÍMITE. Si la distancia recorrida forma con la fuerza un ángulo de 0°, como $\cos 0° = 1$, la fórmula general se reduce a:

$$T = F\, d.$$

Como era previsible, la fórmula general incluye el caso particular que habíamos tratado en primer término.

Otras unidades de trabajo

Hasta ahora sólo hemos empleado una unidad de trabajo: el kilográmetro (kgm), que se obtiene cuando se usa como unidad de fuerza el $\vec{kg}$, y el metro como unidad de longitud. En el sistema M. K. S. también hay una unidad de trabajo,

Unidad M. K. S. de trabajo =
= Newton × metro.

La unidad M. K. S. de trabajo se llama JOULE, denominada así en honor del gran físico *James P. Joule*, y se la simboliza con J, de modo que:

Joule = Newton × metro
$J = N \cdot m.$

Asimismo, existe una unidad de trabajo en el sistema c. g. s., llamada ERG:

Unidad c. g. s. de trabajo =
= dina × centímetro
erg = dyn · cm

Equivalencia de unidades

Como $1\ \vec{kg} = 9{,}8$ N, resulta:

$1\ kgm = 1\ \vec{kg} \cdot 1\ m =$
$= 9{,}8\ N \cdot 1\ m = 9{,}8\ N \cdot m = 9{,}8\ J.$

Análogamente, como

$1\ \vec{kg} = 980\ 000$ dyn, y $1\ m = 100$ cm,
$1\ kgm = 980\ 000$ dyn · 100 cm =
$= 98\ 000\ 000$ ergs $= 9{,}8 \cdot 10^7$ ergs.

También resulta:

$9{,}8\ J = 98\ 000\ 000$ ergs,

de modo que:

$1\ J = 10\ 000\ 000$ ergs $= 10^7$ ergs.

EJ.: *Calcular en las tres unidades el trabajo desarrollado por un hombre de 70* $\vec{kg}$ *al subir un escalón de 20 cm.*

$T = F\,d = 70\ \vec{kg} \cdot 0{,}2\ m = 14\ kgm$
$T = 14 \cdot 9{,}8\ J = 137{,}2\ J$
$T = 137{,}2 \cdot 10^7\ ergs.$

Idea del Joule

Es el trabajo que se realiza para levantar una pesa de 98 gramos (aproximadamente, 100 gramos) hasta una altura de 1 m.

Idea del Erg

Es el trabajo que realiza un mosquito para ascender 1 cm (admitiendo que el mosquito pese $0{,}98\ \vec{mg} \cong 1\ \vec{mg}$).

Potencia

Dos chicos apuestan a quién levanta más rápido una pesa de $20\ \vec{kg}$ hasta una altura de 5 m, valiéndose de una polea.

Ganó el primero, que tardó 10 segundos; el otro tardó 15 segundos.

La fuerza que emplearon ambos fue la misma: $20\ \vec{kg}$. El trabajo realizado por ambos fue el mismo:

$$T = F\,d = 20\ \vec{kg} \cdot 5\ m = 100\ kgm$$

La única diferencia estuvo en *el tiempo empleado en realizar el trabajo*, y es justamente a ella que nos referimos cuando decimos que el primer chico es más *potente*, o que desarrolló más *potencia*. Claro está que para emplear este concepto en Física, previamente debemos definirlo:

DEFINICIÓN: *Se llama potencia (desarrollada por un hombre o una máquina) al cociente entre el trabajo efectuado y el tiempo empleado en realizarlo.*

$$\text{POTENCIA} = \frac{\text{TRABAJO REALIZADO}}{\text{TIEMPO EMPLEADO}}$$

En fórmula:

$$P = \frac{T}{t}$$

El kilográmetro/segundo, unidad de potencia

Como la potencia es el cociente entre el trabajo y el tiempo:

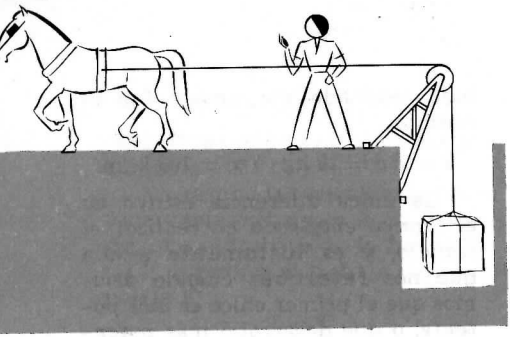
$$\text{Unidad de potencia} = \frac{\text{Unidad de trabajo}}{\text{Unidad de tiempo}} = \frac{\text{Kilográmetro}}{\text{segundo}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

EJ.: *Calcular las potencias de los chicos del ejemplo anterior.*

Por definición:

$$P = \frac{T}{t} = \frac{100\ kgm}{10\ s} = 10\ \frac{kgm}{s}\ \text{(potencia del primero)}.$$

$$P' = \frac{T}{t'} = \frac{100\ kgm}{15\ s} = 6{,}7\ \frac{kgm}{s}\ \text{(potencia del segundo)}.$$



¿Qué significa que la potencia vale 10 kgm/s? Que la máquina que tiene esa potencia es capaz de realizar trabajo a razón de 10 kgm en cada segundo.

Otras unidades de potencia

Si para medir el trabajo usamos el joule, se obtiene la unidad M.K.S. de potencia, llamada WATT, denominada así en honor del físico inglés *James Watt:*

Unidad M.K.S. de potencia = watt $= \frac{\text{joule}}{\text{segundo}}$; $W = \frac{J}{s}$.

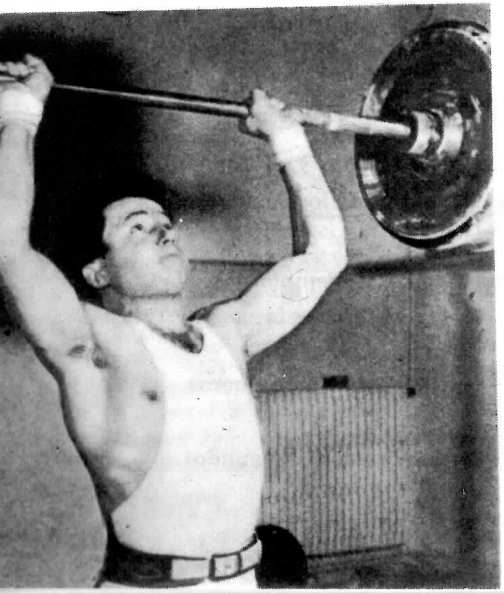
Una unidad muy común es el HP (*horse power* = potencia de un caballo), que equivale a 75 kgm/s:

$$1 \text{ HP} = 75 \text{ kgm/s}$$

HISTORIA. En 1698, el inglés *Thomas Savery* construyó el primer motor de vapor, y propuso usar, como unidad de potencia, la de un caballo. *James Watt*, otro gran inventor inglés, nacido en 1736 y muerto en 1819, realizó entonces cuidadosas medidas, para ver qué potencia puede desarrollar un caballo. Encontró que un buen caballo de tiro podía hacer una fuerza de 150 libras mientras caminaba a razón de 2,5 millas por hora. Teniendo presente que 1 libra = 454 gramos, y que 1 milla = 1 609 m, calcular la potencia del caballo en kgm/s.

Veamos cuál es la potencia de algunos seres vivos y máquinas:

1. La potencia de un caballo común es algo inferior a 1 HP.
2. Un automóvil mediano tiene una potencia de 80 HP.
3. Una locomotora entre 500 y 1 000 HP.
4. Una máquina de vapor estable puede tener hasta 45 000 HP.
5. La potencia de un hombre es de alrededor de 1/7 de HP.
6. Una "fortaleza volante", unos 8 800 HP.



La potencia de un hombre es de aproximadamente 1/7 HP.

Pasaje de unidades

Como $1\ \text{kgm} = 9{,}8\ \text{J}$, resulta:

$$1\ \text{kgm/s} = 9{,}8\ \text{W}.$$

Análogamente, como $1\ \text{kgm} = 10^7\ \text{ergs}$,

$$1\ \text{kgm/s} = 9{,}8 \cdot 10^7\ \text{ergs/s}.$$

Por otra parte, como $1\ \text{HP} = 75\ \text{kgm/s}$,

$$1\ \text{HP} = 736\ \text{W}.$$

En la práctica se usa muchísimo un múltiplo del watt, el *kilowatt*:

$$1\ \text{kW} = 1\,000\ \text{W}.$$

EJ.: *Un automóvil mediano tiene un motor de una potencia de 80 HP. Expresarla en todas las unidades conocidas.*

$$P = 80\ \text{HP} = 80 \cdot 75\ \text{kgm/s} = 6\,000\ \text{kgm/s} =$$

$$= 6\,000 \cdot 9{,}8\ \text{W} = 58\,800\ \text{W} = 58{,}8\ \text{kW}.$$

El kilowatt-hora

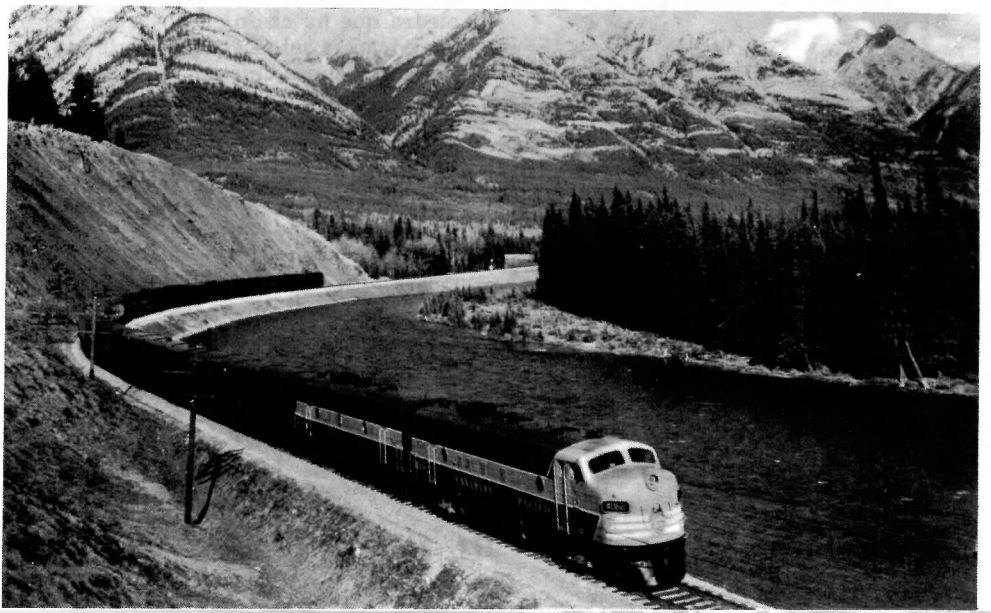
En las facturas de las compañías de electricidad puede verse que miden el trabajo eléctrico gastado en la casa en una unidad que no hemos mencionado hasta ahora: KILOWATT-HORA. Pero... ¿no era el kilowatt una unidad de potencia? Sí, y sigue siéndolo, porque no hemos dicho kilowatt, sino kilowatt-hora. *1 kilowatt- hora* (kWh) *es el trabajo realizado en 1 hora por una máquina que tiene una potencia de 1 kW.*

$$T = Pt = 1\ \text{kW} \cdot 1\ \text{h} = 1\ \text{kWh}.$$

De acuerdo con su definición,

$$1\ \text{kWh} = 1\ \text{kW} \cdot 1\ \text{h} = 1\,000\ \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3\,600^{\text{s}} = 3\,600\,000\ \text{J}.$$

¿En qué unidad mediría usted el trabajo desarrollado por la locomotora? ¿Y su potencia?



PROBLEMA: *Un calefón eléctrico tiene una potencia* $P = 1{,}5$ *kW. Calcular cuánto cuesta calentar agua durante* $2^h\ 30^m$. *sabiendo que 1 kWh cuesta $ 3.*

$$T = P \cdot t = 1{,}5 \cdot \text{kW} \cdot 2{,}5^h = 3{,}75\ \text{kWh}.$$

$$\text{Gasto: } 3{,}75 \cdot 3 = \$\ 11{,}25.$$

PROBLEMA: *Calcular la potencia del calefón en HP.*

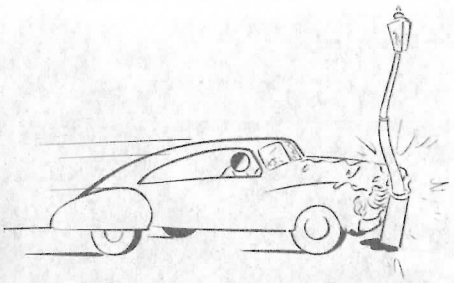
$$P = 1{,}5\ \text{kW} = 1\,500\ \text{W}$$

$$736\ \text{W} = 1\ \text{HP} \quad \therefore \quad P = \frac{1\,500}{736}\ \text{HP} \cong 2\ \text{HP}.$$

Energía

Si un automóvil choca con una columna, puede doblarla. Una piedra de granizo puede romper un techo. Un aerolito hace un pozo al caer. Un martillo al que se ha impreso una velocidad conveniente, puede hundir un clavo en la madera.

En todos estos casos se ha vencido una resistencia a lo largo de un camino: *se ha realizado trabajo.*

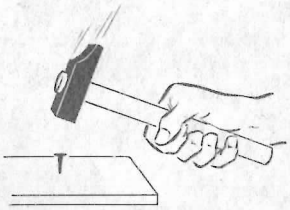


Un cuerpo tiene energía cuando es capaz de realizar trabajo.

Energía cinética y energía potencial

¿Por qué los cuerpos que hemos mencionado en los ejemplos anteriores tienen energía? Observemos que si el automóvil se acerca lentamente a la columna y se apoya contra ella, si entonces se hace funcionar el motor es muy posible que no la doble; si tomamos una piedra que ha caído en el jardín y la apoyamos sobre el techo, éste la soporta tranquilamente; si apoyamos el martillo contra el clavo, sin golpearlo, tendremos muy poco éxito.

En todos estos casos, *la capacidad de producir un trabajo aparece cuando los cuerpos están en movimiento.* Se trata de *energía cinética.*



La energía cinética es debida al movimiento.

En otros casos, la energía no aparece tan directamente. Una roca colocada a cierta altura, puede, *si cae*, hundir una casa. La araña que tenemos en el comedor puede, *si cae*, romper la mesa. Tienen *latente* una capacidad de producir trabajo. Tienen energía, pero "en potencia", y por eso se la llama *energía potencial.*

ENERGÍA CINÉTICA. Es la energía que tiene un cuerpo debido a su movimiento.

ENERGÍA POTENCIAL. Es la energía que tiene un cuerpo debido a su posición.

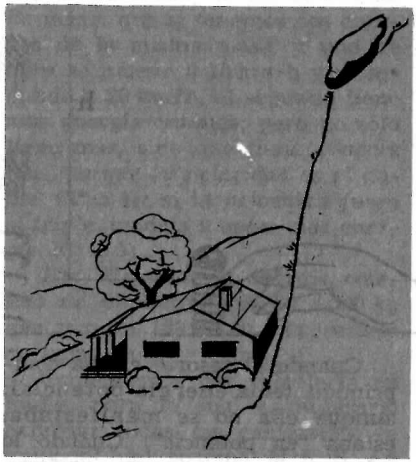
Cómo se expresa la energía de un cuerpo

Puesto que la energía de un cuerpo es la capacidad para producir trabajo, un cuerpo tendrá tanta energía como trabajo sea capaz de producir. La energía se medirá, pues, en las mismas unidades en que se mide el trabajo.

Las fórmulas de la energía

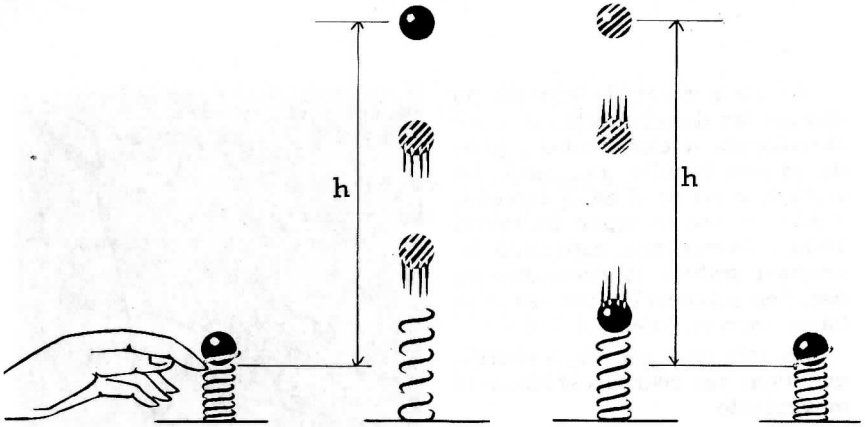
Es fácil advertir que alguna relación existe entre la *energía cinética* de un cuerpo, y su *masa* y su *velocidad.* Si vamos en automóvil, por ejemplo, preferimos que, en todo caso, nos choque un autito "baby" y no un camión con acoplado, aunque tengan la misma velocidad. Y si hemos de elegir entre dos automóviles iguales que están por chocarnos, optaremos por el que marcha más despacio.

Análogamente, cuando se trata de *energía potencial*, es evidente que existe una relación con la *masa* del cuerpo y la *altura* a que está.



La energía potencial es debida a la posición.

LA ENERGÍA POTENCIAL. Consideremos un ejemplo sencillo: un resorte que puede lanzar verticalmente una bolita. Supongamos que la bolita pese $P = 50\,\vec{g}$ y que llegue a una altura $h = 3$ m.



Cuando el resorte estaba comprimido, tenía energía potencial; aunque ella no se manifestaba, estaba "en potencia". Cuando lo soltamos, la energía se manifestó, realizando el trabajo necesario para elevar al cuerpo de peso P hasta una altura h:

$$E = T = P\,h =$$

$$= 0{,}050\ \vec{kg} \cdot 3\ m = 0{,}150\ kgm.$$

Puesto que ha realizado un trabajo de 0,150 kgm, la energía del resorte era $E = 0{,}150$ kgm.

Resulta así que la energía necesaria para elevar un cuerpo de peso P hasta una altura h es:

$$\boxed{E = P\,h}$$

La energía que gastó el resorte no se ha perdido: la tiene la bolita a la altura h, *en forma de energía potencial*, y la tiene íntegramente, sin que haya perdido nada. Ello significa que cuando la bolita caiga, puede realizar un trabajo igual a $P\,h$; por ejemplo, comprimir el mismo resorte.

Conclusión:

Un cuerpo de peso P, colocado a una altura h, tiene una energía potencial $E_p = P\,h$.

La energía cinética: Al caer la bolita desde la altura h adquiere energía cinética, que va aumentando a medida que se acerca al suelo (pues su velocidad va aumentando). ¿Qué energía cinética tiene al llegar? Pues como la energía se mide por el trabajo realizado, será $E_c = T$. Pero el trabajo realizado por la bolita vale $T = P \cdot h$. Por lo tanto:

$$E_c = P \cdot h$$

Además: $P = m\,g$ y $h = \dfrac{v^2}{2\,g}$ (ver "caída de los cuerpos", pág. 109).

$$\therefore\ E_c = m\,g \cdot \frac{v^2}{2\,g}$$

$$\boxed{E_c = \tfrac{1}{2}\ m\,v^2}$$

En conclusión:

Un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v, tiene una energía cinética $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

Significado de la fórmula

$$E_c = \frac{m v^2}{2}.$$

1) *La energía cinética de un cuerpo es directamente proporcional a su masa.* Es decir, que si tenemos dos cuerpos que se mueven a la misma velocidad, pero el primero tiene una masa de 2 kg y el segundo de 8 kg, el segundo tiene *cuatro veces más energía cinética, pues su masa es 4 veces mayor.*

2) *La energía cinética de un cuerpo es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad.* Es decir, que si tenemos dos cuerpos de la misma masa, y uno de ellos se mueve a 10 km/h y el seguhdo a 20 km/h, el segundo tiene más energía cinética; pero no sólo tiene más, sino que tiene *4 veces más, porque su velocidad es el doble* $(2^2 = 4)$; si la *velocidad fuera el triple*, tendría *9 veces más energía* $(3^2 = 9)$.

EJ.: *Calcular la energía cinética de un automóvil de 1 500 kg que viaja a 108 km/h. Expresarla en kgm, joules y ergs.*

Comencemos por calcularla en joules, para lo cual es necesario expresar todas las cantidades en unidades del sistema M. K. S. La masa ya está; la velocidad hay que expresarla en m/s:

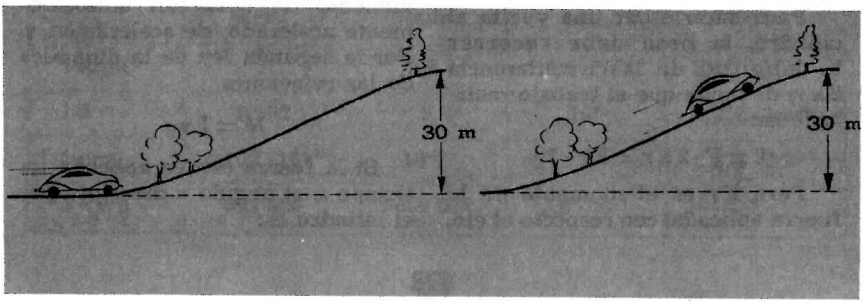
$$108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \frac{1\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Empleando la fórmula de la energía cinética:

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{1\,500 \text{ kg} \cdot \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2} = 675\,000 \text{ joules}.$$

$$E_c = 675\,000 \text{ joules} = 675\,000 \cdot 10^7 \text{ ergs} = 675 \cdot 10^{10} \text{ ergs}.$$

$$E_c = \frac{675\,000}{9{,}8} \text{ kgm} \cong 68\,800 \text{ kgm}.$$



Ej.: *¿Logrará el auto del problema anterior subir una colina de 30 m de altura, si deja de funcionar el motor?* (Suponemos que el razonamiento del camino, los ejes, etc., es nulo).

Antes de iniciar ningún cálculo, estudiemos bien el significado del problema. Se trata de ver si un auto que tiene cierta energía cinética puede alcanzar una cierta altura.

Para alcanzar esa altura es menester que realice cierto trabajo, que ya sabemos calcular: $T = P\,h$. El problema consiste, pues, en calcular ese trabajo y ver si el auto trae la energía necesaria para realizarlo.

Trabajo necesario: $T = P\,h = 1\,500\ \vec{kg} \cdot 30\ m = 45\,000\ kgm$.

El trabajo que hay que gastar es de 45 000 kgm; se dispone de 68 800 kgm: *el auto subirá la colina.*

El trabajo en las rotaciones

Consideremos un cilindro de $2\ \vec{kg}$ y de 3 cm de radio, que puede girar alrededor de su eje. Vamos a calcular el trabajo necesario para hacerle dar 1 vuelta aplicándole en su periferia una fuerza de $5\ \vec{kg}$ (por ejemplo, arrollándole un piolín y colgando una pesa de $5\ \vec{kg}$).

Para calcular el trabajo, recordemos que:

$$T = F\,d\,,$$

siendo F la fuerza aplicada, y d la distancia que recorre en su dirección.

Para hacerle dar una vuelta al cilindro, la pesa debe recorrer la longitud de la circunferencia $2\,\pi\,r$, de modo que el trabajo realizado es:

$$T = F \cdot 2\,\pi\,r = F\,r \cdot 2\,\pi.$$

Pero $F\,r$ es el momento de la fuerza aplicada, con respecto al eje, y $2\,\pi$ es el ángulo girado por el cilindro, de modo que:

Trabajo = momento de la fuerza
Ángulo Girado.

En fórmula:

$$\boxed{T = M \cdot \alpha}$$

En el caso de nuestro cilindro:

$$T = 5\ \vec{kg} \cdot 0{,}03\ m \cdot 2\,\pi = \\ = 0{,}3\,\pi\ kgm \cong 0{,}942\ kgm.$$

Energía cinética de rotación

La cupla M aplicada al cilindro, cuyo momento de inercia respecto de su eje es I, le imprime un movimiento de rotación uniformemente acelerado, de aceleración γ. Por la segunda ley de la dinámica de las rotaciones:

$$M = I\,\gamma.$$

Si la fuerza estuvo aplicada un tiempo t, el ángulo α descripto por el cilindro es:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\gamma\,t^2.$$

Si en la fórmula del trabajo se reemplazan las expresiones de M y α,

$$T = M\,\alpha$$

$$T = I\,\gamma \cdot \tfrac{1}{2}\,\gamma\,t^2 = \tfrac{1}{2}\,I\,\gamma^2\,t^2,$$

y como $\gamma\,t = \omega \;\therefore\; \gamma^2\,t^2 = \omega^2$, resulta:

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2}$$

Para que el cilindro alcanzara la velocidad angular ω, hubo que realizar un trabajo $\frac{1}{2}\,I\,\omega^2$. Obsérvese la semejanza de esta expresión con la de la energía cinética de traslación de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v:

$$\tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2 \text{ ———— } \tfrac{1}{2}\,m\,v^2.$$

La expresión $\frac{1}{2}\,I\,\omega^2$ es la energía de rotación de un cuerpo de momento de inercia I que gira con velocidad angular ω.

El trabajo realizado para que el cuerpo alcanzara esa energía cinética no se ha perdido: al terminarse el hilo de nuestro cilindro, se arrollaría en sentido contrario, y el cilindro subiría hasta alcanzar su altura inicial (suponiendo que no existiera el rozamiento).

EJ.: *Calcular la energía cinética de rotación del cilindro del problema anterior, al cabo de 3 segundos de comenzar a caer la pesa.*

$$E_c = \tfrac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \gamma\,t\\ \gamma &= \frac{M}{I}\end{aligned}\right\} \;\therefore\; \omega^2 = \frac{M^2\,t^2}{I^2}.$$

Luego:

$$E_c = \tfrac{1}{2}\,I\,\frac{M^2\,t^2}{I^2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{M^2\,t^2}{I} = \tfrac{1}{2}\,\frac{F^2\,r^2\,t^2}{\frac{m\,r^2}{2}} = \frac{F^2\,t^2}{m}$$

$$E_c = \frac{(5\ \vec{kg})^2 \cdot (3^s)^2}{2\ kg} = \frac{(5 \cdot 9{,}8\ N)^2 \cdot 9\ s^2}{2\ kg} = \frac{2\,401\ N^2 \cdot 9\ s^2}{2\ kg} = 10\,804{,}5\ J.$$

Unidades de trabajo y energía

(Equivalencia aproximada)

	kgm	joule	erg	kWh
1 kgm	1	9,8	$9{,}8 \cdot 10^7$	$2{,}72 \cdot 10^{-6}$
1 J	0,102	1	10^7	$0{,}278 \cdot 10^{-6}$
1 erg	$0{,}102 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	1	$0{,}278 \cdot 10^{-13}$
1 kWh	367 000	3 600 000	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	1

Unidades de potencia

(Equivalencia aproximada)

	kgm/s	W	kW	erg/s	HP
1 kgm/s	1	9,8	0,0098	$9{,}8 \cdot 10^7$	0,0133
1 W	0,102	1	0,001	10^7	0,00136
1 kW	102	1 000	1	10^{10}	1,36
1 erg/s	$0{,}102 \cdot 10^{-7}$	10^{-7}	10^{-10}	1	$1{,}36 \cdot 10^{-10}$
1 HP	75	735	0,735	$735 \cdot 10^7$	1

Distíngase bien entre:

FUERZA: masa × aceleración $F = m\,a$.

TRABAJO: fuerza × distancia $T = F\,d$.

ENERGÍA: capacidad de hacer trabajo
- cinética (movimiento) $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$.
- potencial (posición) $E_p = P \cdot h$.

POTENCIA: trabajo ÷ tiempo $P = \frac{T}{t}$.

Problemas

1. Calcular en joules, kgm y ergs el trabajo de una fuerza de 1 000 N cuyo punto de aplicación se desplaza 50 m en la dirección de la fuerza.
R.: 50 000 J; 5 100 kgm; 5×10^{11} erg

2. Calcular el trabajo suponiendo que la fuerza anterior forma un ángulo de 60° con la dirección del desplazamiento.

R.: 25 000 J; 2 551 kgm; $2{,}5 \times 10^{11}$ erg

3. ¿A qué altura habrá sido levantado un cuerpo que pesa 10 $\vec{kg}$, si el trabajo empleado fue de 5 000 joules?

R.: 51 m

4. Desde una altura de 70 cm cae cada segundo una gota de agua que pesa ¼ de gramo. Calcular el trabajo que es capaz de realizar la gotera en un año.

R.: 5 694 kgm

5. Un hombre que pesa 80 $\vec{kg}$ sube a una torre de 25 m. Calcular el trabajo que realiza.

R.: 2 000 kgm

6. Calcular en HP la potencia puesta en juego por el hombre anterior, sabiendo que tarda 10 minutos en llegar a lo alto de la torre.

R.: 0.044 HP

7. En una construcción se sube un balde de arena de 20 $\vec{kg}$ a una velocidad de 4 m/s. Calcular en HP la potencia del motor que mueve la instalación.

R.: 1.067 HP

8. Para llenar un tanque hay que levantar el agua hasta una altura de 10 m. El tanque es cilíndrico y tiene 2 m de altura y 1 m de radio. La bomba utilizada tiene una potencia de 1 HP. Calcular el tiempo que tardará en llenar el tanque.

R.: $13^m\ 57^s$

9. Un jornalero carga en media hora 1 m^3 de tierra (peso específico: 1,8 T/m^3) debiéndola levantar a 1,5 m de altura. *a)* ¿Qué trabajo ha realizado en kWh? *b)* ¿Qué potencia ha desarrollado en HP y en kW?

R.: *a)* 0,0073 kWh; *b)* 0,0147 kW; *c)* 0.02 HP

10. De un pozo deben extraerse cada 3 minutos 900 litros de agua desde una profundidad de 150 m. ¿Cuántos HP debe desarrollar el motor, si el 40 % de su potencia se pierde?

R.: 16,7 HP

11. Un cuerpo que pesa 150 $\vec{kg}$ se desliza por un plano inclinado de 30° de inclinación, recorriendo 200 m, ¿qué trabajo ha realizado?

R.: 15 000 kgm; 147 000 J

12. ¿Qué potencia en HP necesita un camión de 20 000 $\vec{kg}$ para pasar una pendiente que sube 50 m cada 1 000 m (pendiente del 5 %) a una velocidad de 10 m/s?

R.: 133 HP

13. Un ciclista que con su bicicleta pesa 70 $\vec{kg}$ adquiere una velocidad de 36 km/h. Calcular la energía cinética desarrollada, en kgm, joules, ergs y kWh.

R.: 357 kgm; 3 500 J; $3\,500 \times 10^7$ ergs; 0.000973 kWh

14. Calcular la energía potencial almacenada en un tanque con 1 500 litros de agua, situado a 10 m de altura respecto del suelo.

R.: 15 000 kgm; 147 000 J; 147×10^{10} erg

15. Hallar la energía cinética de una bala de 200 g cuya velocidad es de 300 m/s.

R.: 9×10^9 ergs $= 9 \times 10^3$ J $= 918$ kgm

16. ¿Qué energía cinética tiene al tocar el suelo un cuerpo de 100 $\vec{kg}$ de peso que cae desde 40 m?

R.: 4 000 kgm; 39 200 J; $39{,}2 \times 10^{10}$ ergs

17. ¿Cuál era la energía potencial del cuerpo anterior a los 40 m? ¿Qué energía potencial y cinética tenía en el punto medio de la trayectoria? ¿Y cuando le faltaban 10 m para llegar al suelo?

R.: 4 000 kgm; 2 000 kgm y 2 000 kgm; 1 000 kgm y 3 000 kgm

18. Calcular la energía que se consumirá al frenar un vagón de ferrocarril de 8 000 $\vec{kg}$, que marcha a razón de 5 m/s.

R.: 100 000 J

19. Un cuerpo que pesa 4,9 $\vec{kg}$ se desliza por un plano inclinado, sin frotamiento, de 5 m de longitud y 1 m de altura. *a)* ¿Qué espacio recorre, partiendo del reposo, en 2 segundos? *b)* ¿Qué energía cinética adquiere? *c)* ¿Cuál es la disminución de su energía potencial?

R.: *a)* 3.92 m; *b)* 3.84 kgm; *c)* 3.84 kgm

21 LAS MÁQUINAS SIMPLES

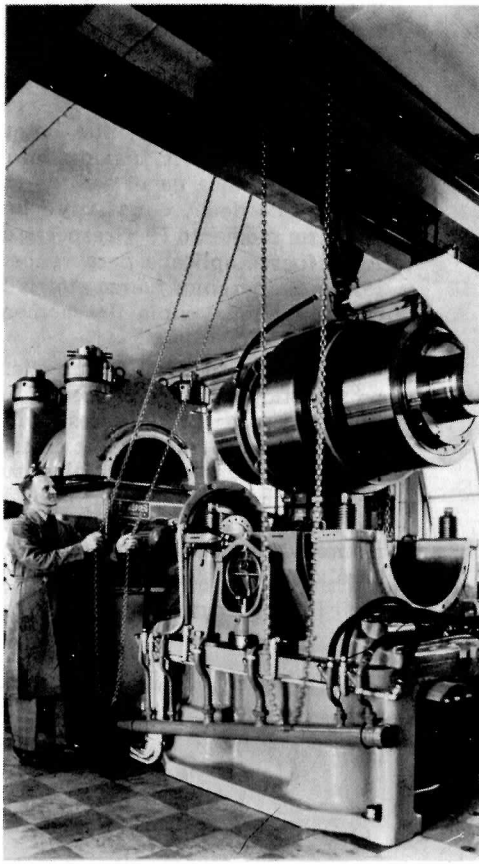
Las palancas, poleas, tornos y planos inclinados se denominan *máquinas simples*, y no obstante haber sido inventadas hace miles de años, todavía reportan gran utilidad. En cualquier tipo de las máquinas que se usan actualmente, aun las más complicadas, no existen sino combinaciones más o menos ingeniosas de una o más máquinas simples. No hay más que observar una máquina de escribir o una máquina de ferrocarril: por todos lados descubriremos palancas, tornos, poleas, engranajes, etc.

En este capítulo estudiaremos varias máquinas simples. El objeto de nuestro estudio puede sintetizarse así:

1) Qué fuerza es necesaria para mantener en equilibrio a un cuerpo, empleando una máquina simple.

2) Cuánto vale la multiplicación de cada máquina, es decir, por cuánto se multiplica nuestra fuerza al emplear la máquina.

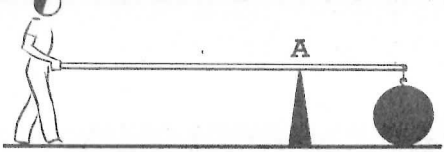
3) Averiguar si empleando la máquina podemos ahorrarnos o no el trabajo por realizar, o, por lo menos, una parte. Es decir, si las máquinas crean o no energía.

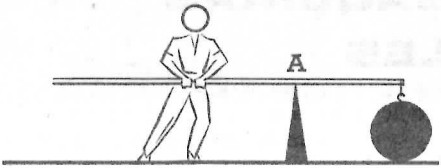


Palanca

Una palanca es, en general, una barra rígida, que puede girar alrededor de un punto o de un eje.

Imaginemos que se trata de levantar un peso, como está indicado en la figura. Instintivamente trataremos de tomar la palanca lo





más lejos posible del punto de apoyo A, pues sabemos que así es más fácil levantarlo. Si, como en la figura de arriba, tomamos la palanca por la mitad, habrá que hacer más fuerza, y aun así es posible que no lo podamos levantar. La explicación es evidente: el peso que queremos vencer, que llamaremos *resistencia* R, tiende a hacer girar la palanca en el sentido señalado. Es decir, constituye una cupla de momento $R \cdot r$ respecto de A; la fuerza aplicada para vencerlo, que llamaremos *fuerza motriz* F, constituye una cupla de momento $F\,d$.

La condición para que un cuerpo sometido a cuplas esté en equilibrio, es que la cupla resultante tenga momento nulo. Como en este caso las fuerzas son paralelas, sus vectores-momento tienen la misma recta de acción, y para que el momento resultante sea nulo deberá ser:

$$M(F) + M(R) = 0.$$

La condición para que una palanca esté en equilibrio, es que la suma de los momentos de la fuerza motriz y de la resistencia sea nula.

Convención

Los dos momentos tienen el mismo valor, pero sus sentidos son opuestos: hay, pues, que diferenciarlos por el signo. Para ello se ha convenido en asignar signo positivo (+) al momento que tiende a producir una rotación en sentido *contrario* al de las agujas de un reloj, y signo negativo (—) al que tiende a producir la rotación en el mismo sentido que dichas agujas.

Obsérvese en el dibujo que al momento de la fuerza motriz M(F), le corresponde signo (—), y al de la resistencia, M(R), signo (+):

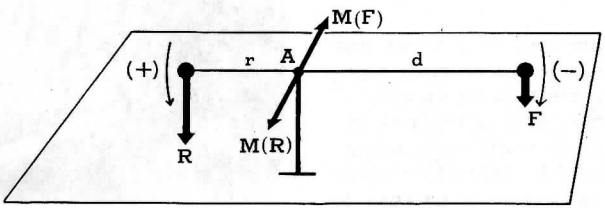
$$M(F) = -F\,d$$
$$M(R) = +R\,r$$

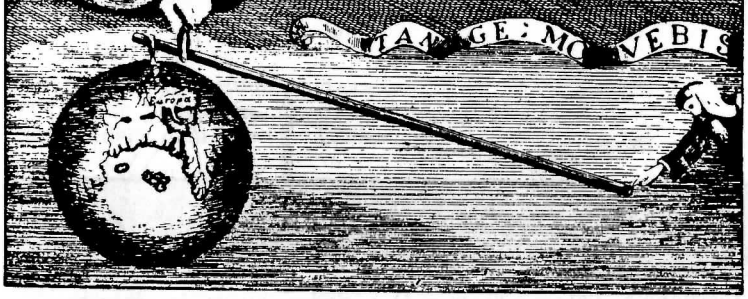
Sumando m. a. m.:

$$M(F) + M(R) = -F\,d + R\,r = 0.$$
$$\therefore\ -F\,d = -R\,r$$

$$\therefore\ \boxed{F\,d = R\,r}$$

La condición es, pues, que el *producto de la fuerza motriz por su brazo sea igual al producto de la resistencia por su brazo.*





"Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra."

Arquímedes y la palanca

En el sur de Sicilia (Italia) existe todavía una ciudad milenaria, llamada Siracusa. Hace más de dos mil años vivió allí un hombre extraordinario, el primer físico de la Historia: Arquímedes. La vida de este sabio está llena de anécdotas, y ya vimos cómo y por qué salió a correr desnudo por las calles de su vieja ciudad.

Arquímedes es el fundador de la Mecánica: fue físico, matemático, inventor, ingeniero militar. Con sus aparatos mantuvo a raya a los romanos durante mucho tiempo, y cuando por fin las legiones consiguieron entrar en la ciudad, dieron muerte al sabio, mientras éste se echaba sobre sus aparatos para protegerlos de la soldadesca.

El grabado adjunto está tomado de la *Mecánica* de Varignon, publicada en París en 1687. La leyenda que se ve arriba dice en latín: "Tócalo y lo moverás". Se ve, en efecto, que un señor con barba apoya con gran delicadeza un dedo sobre el extremo de la palanca y levanta la Tierra como si nada. Ya hemos visto que con un brazo de potencia suficientemente largo, un hombre puede levantar cualquier peso. Claro que necesita un punto de apoyo. Arquímedes decía, según es fama: "Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra". En el grabado, el punto de apoyo es una gran mano que emerge misteriosamente de entre las nubes.

Ej.: *Se quiere equilibrar un peso de* $200\ \vec{\text{kg}}$ *con una palanca de 1 m de largo apoyada a 20 cm del punto de aplicación de la resistencia. Calcular la fuerza motriz necesaria.*

De acuerdo con la condición de equilibrio:

$$M(F) + M(R) = 0.$$

De la figura se obtienen los signos de los momentos:

$$-F\,d + R\,r = 0,$$

y despejando F:

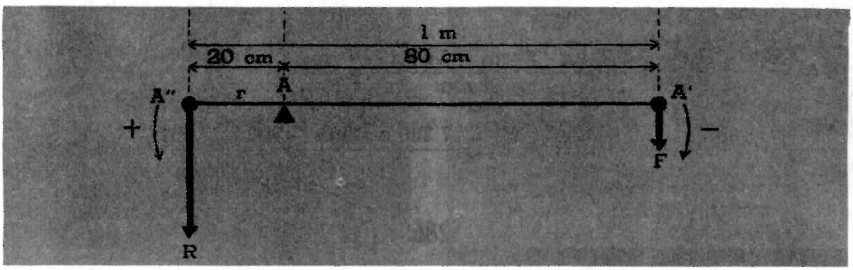
$$F = \frac{R\,r}{d} = \frac{200\ \vec{\text{kg}} \cdot 20\ \text{cm}}{80\ \text{cm}} = 50\ \vec{\text{kg}}.$$

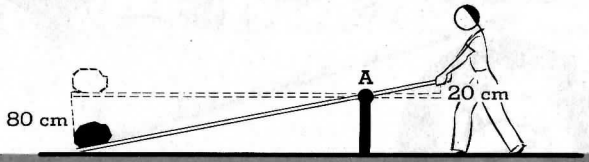
Multiplicación de la palanca

De la condición de equilibrio resulta:

$$R = F\,\frac{d}{r},$$

es decir, que la palanca multiplica a la fuerza motriz por el factor $\frac{d}{r}$, llamado *factor de multiplicación*. Así, si el brazo de la fuerza motriz es 4 veces mayor que el de





Hay un compromiso: si se gana velocidad, se pierde fuerza; si se gana fuerza, se pierde velocidad.

la resistencia (80 cm : 20 cm = 4), cualquier fuerza que se aplique en A' aparecerá en A'' multiplicada por 4.

Pero ganar fuerza no es el único resultado de la aplicación de las palancas: con ellas se puede ganar también en velocidad. Claro que en este caso habrá que efectuar una fuerza mayor que la resistencia, pues hay un compromiso: O SE GANA EN FUERZA, PERDIENDO VELOCIDAD, O SE GANA EN VELOCIDAD, PERDIENDO FUERZA.

En efecto: supongamos que empleamos la misma palanca anterior; su longitud es de 1 m, y está apoyada a 20 cm de un extremo. Si aplicamos la fuerza motriz en este extremo, para levantar una resistencia de, por ejemplo, $10\ \vec{kg}$ colocada en el otro, habrá que hacer una fuerza 4 veces mayor, es decir, $40\ \vec{kg}$: *se ha perdido en fuerza.* Pero, mientras que la fuerza motriz recorre por ejemplo, 20 cm, la semejanza en triángulos nos permite comprobar que en el mismo tiempo la resistencia ha recorrido una distancia 4 veces mayor: 80 cm.

De modo que *la palanca tiene el poder de multiplicar las velocidades. o bien las fuerzas.*

Palanca pesada

En todos nuestros razonamientos hemos omitido algo que puede tener importancia: el peso de la palanca misma. Pero no hay ninguna dificultad en introducirlo en nuestra fórmula. Sea G el centro de gravedad de la palanca, en el cual está aplicado su peso P, que, como intervendría también otra fuerza cualquiera, interviene en las rotaciones con su momento $P\,p$, siendo p el correspondiente brazo. Naturalmente que el momento del peso interviene con su correspondiente signo. La condición de equilibrio es ahora:

$$M(F) + M(R) + M(P) = 0\,.$$

EJ.: *Con una barra homogénea (centro de gravedad en su punto medio) de $10\ \vec{kg}$ de peso y 1,20 m de largo, se quiere levantar un peso de $240\ \vec{kg}$. Calcular la fuerza motriz, sabiendo que su brazo es de 90 cm.*

La condición de equilibrio es:

$$-F\,d - P\,p + R \cdot r = 0\,.$$

Despejando la incógnita F:

$$F = \frac{R\,r - P\,p}{d} = \frac{240\ \vec{kg} \cdot 30\ cm - 10\ \vec{kg} \cdot 30\ cm}{90\ cm} =$$

$$= \frac{7\,200\ \vec{kg} \cdot cm - 300\ \vec{kg} \cdot cm}{90\ cm} = 76{,}67\ \vec{kg}\,.$$

Si no se hubiera tenido en cuenta el peso de la palanca, el cálculo habría dado una fuerza motriz de 80 $\vec{kg}$. Compruébelo.

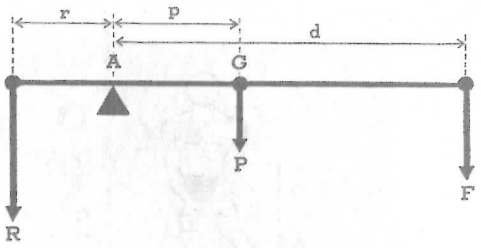
Géneros de palancas

Son palancas de *primer género* aquellas cuyo punto de apoyo está entre la resistencia y la fuerza motriz. Ejemplos: las tijeras, las balanzas de platillos, el subibaja.

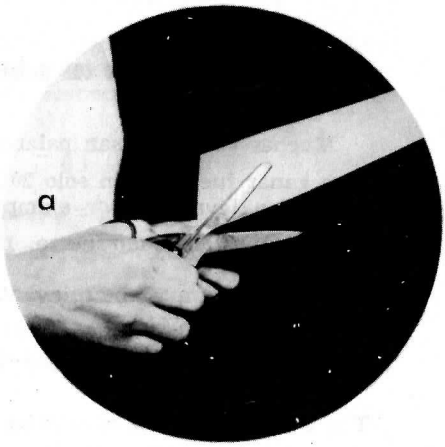
Palancas de *segundo género* son aquellas que tienen la resistencia aplicada entre el punto de apoyo y la fuerza motriz. Ejemplos: la carretilla, el rompenueces, el remo de un bote.

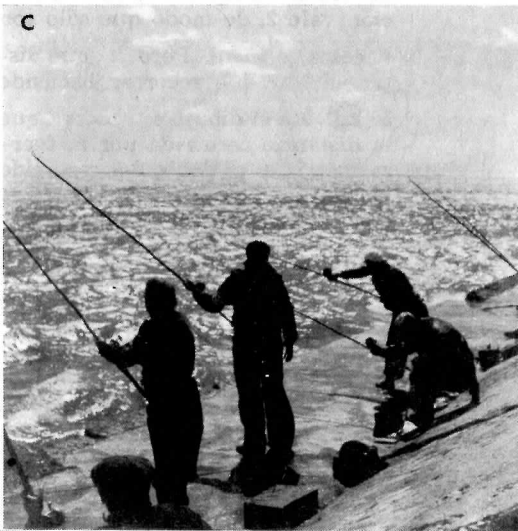
Palancas de *tercer género* son aquellas que tienen la fuerza motriz entre el punto de apoyo y la resistencia. Ejemplos: el pedal de la máquina de afilar, las pinzas para servirse azúcar.

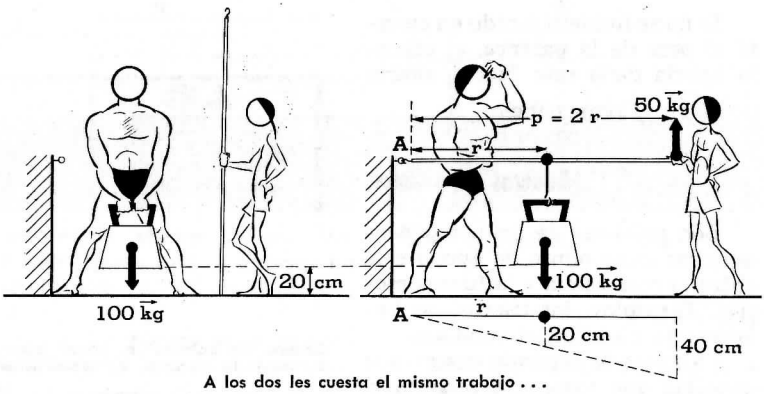
Cualquiera sea el género de palanca, la condición de equilibrio es la misma. Obsérvese que la de tercer género sólo puede usarse para ganar en velocidad, pues siempre el brazo de la fuerza motriz es menor que el de la resistencia.



Géneros de palanca: a, primer género; b, segundo género; c, tercer género.







A los dos les cuesta el mismo trabajo . . .

El trabajo realizado con palanca

Muchas veces se usan palancas para ganar fuerza. Con sólo 20 $\vec{kg}$ se pueden levantar, por ejemplo, 200 $\vec{kg}$. Se ha ahorrado fuerza. ¿Se ahorró trabajo?

Veamos: si queremos levantar una pesa de 100 $\vec{kg}$ hasta una altura de 20 cm del suelo, el trabajo, sin palanca, será:

$$T = F\,d = 100\ \vec{kg} \cdot 0{,}2\ m = 20\ kgm.$$

Ahora usemos una palanca como indica la figura: la multiplicación vale 2, de modo que sólo son necesarios 50 $\vec{kg}$. Pero... ¿qué distancia hay que recorrer haciendo 50 $\vec{kg}$? En el dibujo se observa que la distancia recorrida por la fuerza motriz es el doble del recorrido hecho por la pesa: 40 cm, de modo que el trabajo realizado es:

$$T = 50\ \vec{kg} \cdot 0{,}4\ m = 20\ kgm.$$

El trabajo motor es igual al trabajo resistente, es decir, que la energía entregada para realizar el trabajo motor es igual a la energía adquirida por la pesa al ser elevada:

Energía entregada = Energía obtenida.

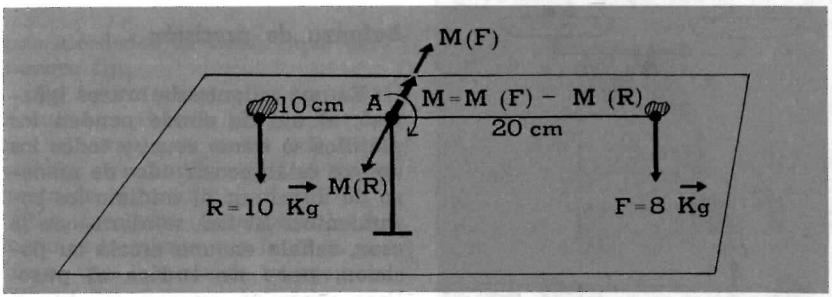
Por consiguiente, la palanca *no crea energía.*

Movimiento de la palanca

La palanca, ya sea ahorrando fuerza o ganando velocidad, se usa para producir movimiento. Hasta ahora hemos estudiado sólo el caso en que está en equilibrio. Si se hace una fuerza mayor que la necesaria para mantenerla en ese estado, esa fuerza comunica a la palanca un movimiento de rotación uniformemente acelerado.

Supongamos que se está en las condiciones de la figura. La cupla resultante tiene un momento distinto de cero:

$$M = -\,8\ \vec{kg} \cdot 0{,}2\ m + 10\ \vec{kg} \cdot 0{,}1\ m = -\,0{,}6\ \vec{kg} \cdot m.$$



Por lo tanto, se producirá la rotación de la palanca en el sentido indicado por la flecha. La aceleración angular será:

$$\gamma = \frac{M}{I},$$

en donde I es la suma de los momentos de inercia de las dos masas, con respecto al punto de apoyo A.

$$\gamma = \frac{-\,0{,}6 \cdot 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{m}}{10\ \text{kg} \cdot (0{,}1\ \text{m})^2 + 8\ \text{kg} \cdot (0{,}2\ \text{m})^2} = \frac{-\,5{,}8}{0{,}1 + 0{,}32}\ \frac{1}{s^2} = -\,14\ \frac{1}{s^2}$$

La aceleración tangencial de traslación de la masa resistente es:

$$a = \gamma\, r,$$

de modo que la velocidad alcanzada al cabo de, por ejemplo, 0,1 segundo de aplicada la fuerza motriz será:

$$v = a\, t = \gamma\, r\, t = \\ = 14\ \frac{1}{s^2} \cdot 0{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}1^s = 0{,}14\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

y el camino recorrido es el arco s:

$$s = \alpha\, r.$$

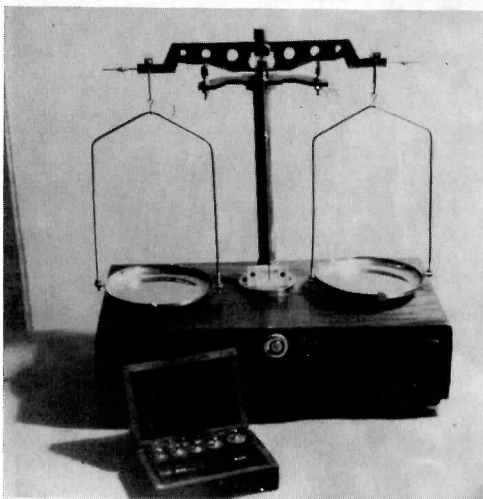
siendo α el ángulo girado en $0{,}1^s$.

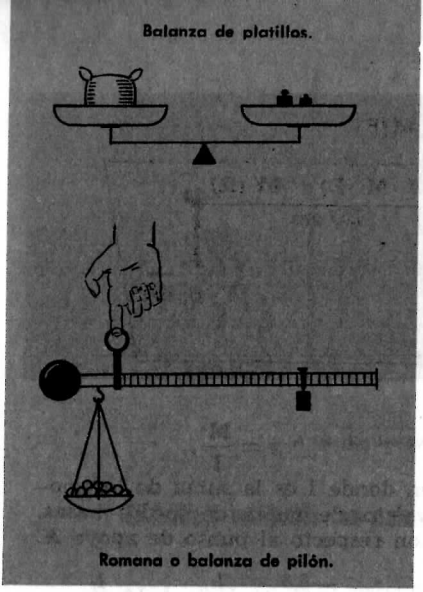
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\gamma\, t^2 \;\therefore\; s = \tfrac{1}{2}\,\gamma\, t^2\, r = \tfrac{1}{2} \cdot -\,14\ \frac{1}{s^2} \cdot (0{,}1^s)^2 \cdot 0{,}1\ \text{m} = \\ = -\,0{,}007\ \text{m} = -\,7\ \text{mm}.$$

Como se ve, el movimiento es más rápido de lo que se podría prever sin hacer el cálculo.

Balanzas

Las balanzas son una aplicación de la palanca. Hay diversos tipos: pero las más comunes son las de platillos y la romana o de pilón. Las primeras son palancas de brazos iguales, de modo que la resistencia y la fuerza motriz de-



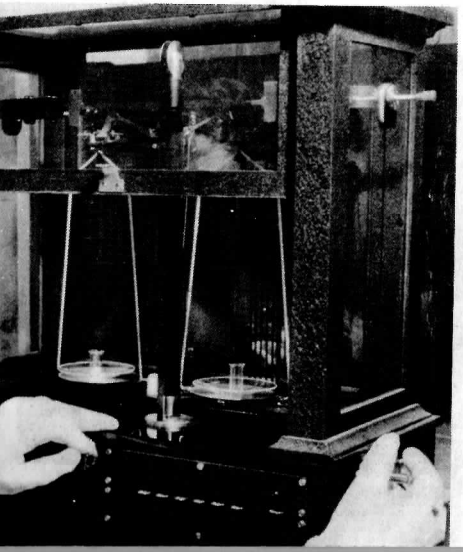


Balanza de platillos.

Romana o balanza de pilón.

ben ser iguales. En las romanas, en cambio, el brazo de la resistencia es siempre menor. Algunas de éstas tienen dos lugares de donde colgar la resistencia: el más cercano al punto de apoyo se usa cuando la resistencia es muy pesada. ¿Por qué?

Balanza de precisión.



Balanza de precisión

Es una palanca de brazos iguales[1]; el eje de donde penden los platillos se llama cruz, y todos los apoyos están construidos de manera de disminuir al mínimo los rozamientos. El fiel, solidario con la cruz, señala en una escala su posición, pero no indica el peso. Para pesar un cuerpo se siguen procedimientos especiales, que permiten medir pesos de hasta $0{,}1\ \vec{mg}$ con toda facilidad. Estas balanzas son comunes en todos los laboratorios. Como son muy delicadas, se las mantiene en una caja de vidrio, dentro de la cual se realiza la pesada, para evitar que las corrientes de aire influyan en la operación.

Se han construido balanzas mucho más precisas que las corrientes de laboratorio. Con una de ellas se ha tenido la curiosidad de pesar el punto gramatical que se coloca al final de cada oración: pesa $0{,}000001\ \vec{g}$; también se ha pesado un granito de arena tomado de una playa de mar, que pesa 18 veces más: $0{,}000018\ \vec{g}$.

Torno

El torno no es sino una palanca con forma apropiada para que dé muchas vueltas y pueda arrollar una soga. Lo constituye un cilindro que por medio de una manija

[1] En realidad, se trata de que los brazos sean todo lo iguales que sea posible; pero, naturalmente, nunca se lo consigue. El método de pesada contempla esta desigualdad de los brazos, y la elimina.

gira alrededor de su eje, que permanece fijo.

La figura muestra un torno: el circulito en O es la proyección del eje; el círculo de radio O B es la sección del cilindro, y O A es el brazo de la manija.

La condición de equilibrio del torno es la misma que la de la palanca: que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas sea nula:

$$M(F) + M(R) = 0.$$

O sea:

$$\boxed{F \cdot OA = R \cdot OB}$$

Multiplicación del torno

De la condición de equilibrio,

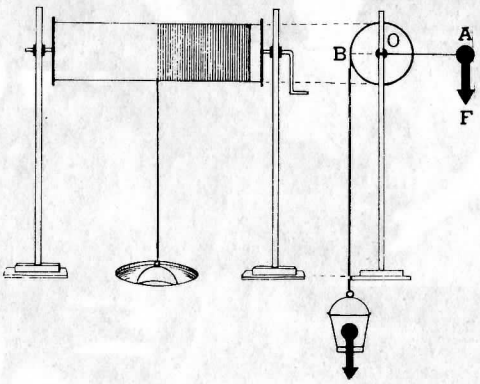
$$R = F \cdot \frac{OA}{OB}.$$

El factor $\frac{OA}{OB}$ es la multiplicación del torno. Si, por ejemplo, la manija tiene 40 cm de largo y el radio del cilindro mide 10 cm, la multiplicación vale 40 cm : 10 cm = 4. Cualquier fuerza que se aplique en la manija aparece en la periferia del cilindro multiplicada por 4.

El torno también se usa para multiplicar la velocidad. Si la manija es de longitud menor que el radio, hay que hacer mayor fuerza que la resistencia, pero la resistencia se mueve con mayor velocidad que la mano.

Trabajo con torno

Si la manija da una vuelta, la energía entregada vale $F \cdot 2\pi OA$; como también el cilindro ha dado



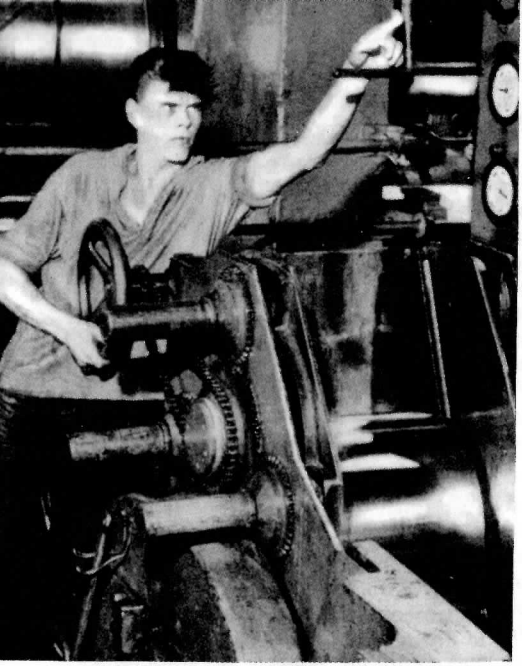
una vuelta, la resistencia ha subido un segmento igual a $2\pi \cdot OB$, y la energía obtenida vale $R \cdot 2\pi OB$. Teniendo en cuenta la condición de equilibrio, es fácil comprobar que:

Energía obtenida = Energía entregada.

El torno, pues, no crea energía.

Engranajes

Los engranajes son simples combinaciones de palancas de forma especial. En la figura se tienen dos ruedas dentadas, de radios r y r'; supongamos que se pretende equilibrar una resistencia R, como indica la figura. Para ello se aplica una fuerza motriz F, que suponemos aplicada en la periferia de la rueda grande. Es evidente que la condición para que el



engranaje esté en equilibrio, es que:

$F\,r = R\,r'$ (los momentos deben ser iguales), o sea: $\frac{F}{R} = \frac{r'}{r}$.

Por otra parte, como los dientes son iguales en las dos ruedas, el número de dientes contenido en cada rueda es directamente proporcional a la longitud de la misma, y por lo tanto, al radio:

$$\frac{n'}{n} = \frac{r'}{r},$$

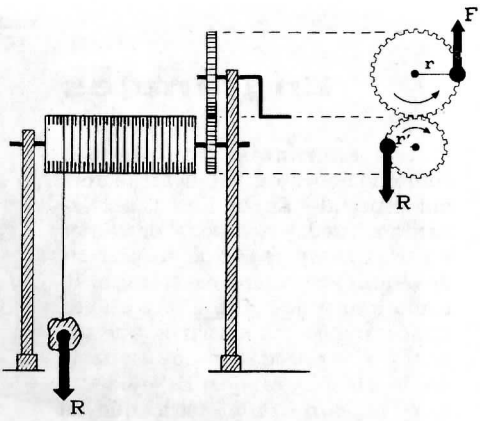
y combinando esta proporción con la anterior,

$$\frac{F}{R} = \frac{n'}{n}.$$

La fuerza motriz aplicada a una rueda es a la resistencia aplicada en la otra, como el número de dientes de ésta es al de aquélla.

Por lo tanto, si $n' < n$, se gana en fuerza; si $n' > n$, se gana en velocidad.

En la bicicleta, la rueda grande se llama *plato*, y la pequeña, *piñón*. La transmisión de la fuerza se hace por medio de la cadena. La combinación más común de número de dientes es de 48 a 18. Algunas bicicletas tienen palanca de cambio, con el fin de aumentar la velocidad (disminuyendo la fuerza) o la fuerza (disminuyendo la velocidad). Para ello, las combinaciones de dientes son, respectivamente, 48 y 22 y 48 y 16.



Multiplicación del engranaje

De la fórmula anterior resulta:

$$R = F\,\frac{n}{n'}.$$

El factor n/n' es la multiplicación.

Como la palanca, *tampoco el engranaje crea energía.*

Polea fija

Es una rueda que puede girar alrededor de un eje fijo que pasa

por su centro. En su periferia tiene una garganta, por la que corre una soga o una cadena. Un ejemplo es la conocida *roldana*.

Si deseamos sostener un peso R, como está indicado en la figura, debemos aplicar una fuerza F. Para que la polea no gire, la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas debe ser nula:

$$M(F) + M(R) = 0 .$$

En la figura se observa que tanto el brazo de la fuerza motriz como el de la resistencia son radios de la misma circunferencia, de modo que:

$$-F \cdot r + R \cdot r = 0 ;$$

y simplificando las r:

$$-F + R = 0 ,$$

o sea:

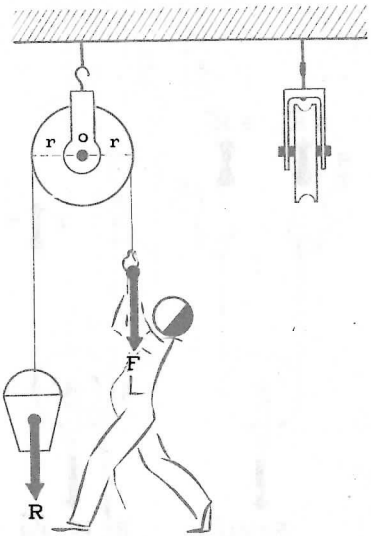
$$F = R$$

La condición de equilibrio de una polea fija es que la fuerza motriz sea igual a la resistencia.

Multiplicación de la polea fija

Puesto que no se gana en fuerza, la multiplicación es, evidentemente, igual a 1. Entonces, ¿cuál es la ventaja? Pensemos en cualquiera de sus aplicaciones: la roldana para subir el agua de un pozo, o un balde en un edificio en construcción, las poleas que tienen los cables de las señales de ferrocarril. La respuesta es inmediata: *su función es cambiar la dirección de una fuerza.*

Observemos que, como en la palanca,



Polea fija.

Energía entregada = Energía obtenida.

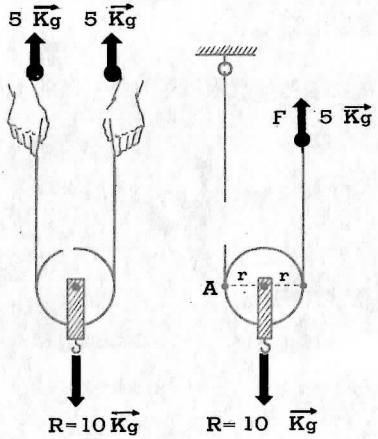
de modo, pues, *que la polea fija no crea energía.*

Polea móvil

En lugar de apoyarse en el eje como la fija, lo está en la cuerda. Para equilibrar una resistencia R, se aplica la fuerza F; estudiaremos ahora qué relación hay entre ambas fuerzas.

La figura muestra que para equilibrar $10\ \vec{kg}$, cada mano debe aplicar $5\ \vec{kg}$; si nos desentendemos de una de las ramas, atándola al soporte, la fuerza motriz aplicada es de sólo $5\ \vec{kg}$. Siempre será, pues:

$$F = \frac{R}{2}$$



La condición para que una polea móvil esté en equilibrio, es que la fuerza motriz sea la mitad de la resistencia.

La explicación es sencilla: si observamos una polea móvil en funciones, veremos que la rotación se produce alrededor del punto A. Para que esté en equilibrio, la suma de los momentos de la fuerza motriz y de la resistencia debe ser nula:

$$M(F) + M(R) = 0$$

$$M(F) = F \cdot 2r \text{ (}r\text{, radio de la polea)}$$

$$M(R) = -R \cdot r$$

$$F \cdot 2r - R \cdot r = 0 \therefore F = R \cdot \frac{R}{2}.$$

Multiplicación de la polea móvil

En el caso de fuerzas paralelas.

$$R = 2F.$$

La multiplicación de la polea móvil es 2.

El trabajo realizado con polea móvil

En la figura de la izquierda se ve que la longitud total de la soga empleada es $2h$; en la de la derecha se ha recogido toda la soga, y la resistencia subió a una altura h.

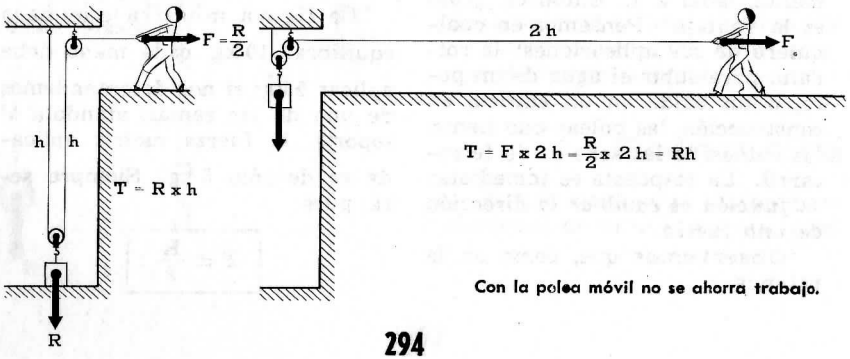
La energía potencial obtenida por la resistencia es Ph, y la energía gastada por el trabajador está medida por su trabajo: $F \cdot 2h$.

Como $F = \frac{R}{2}$, resulta que:

$$Rh = F \cdot 2h.$$

Energía obtenida = Energía entregada.

La polea móvil no crea energía.



Con la polea móvil no se ahorra trabajo.

Combinaciones de poleas. Aparejo potencial

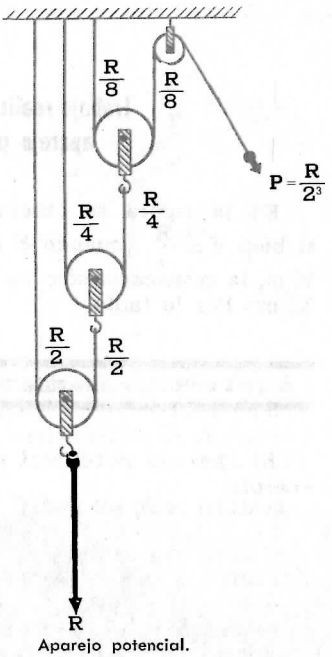
La figura muestra un aparejo potencial, formado por tres poleas móviles y una fija. La primera polea móvil, comenzando desde abajo, reduce la fuerza necesaria para equilibrar la resistencia a la mitad de ésta; la segunda polea móvil reduce esta mitad a la cuarta parte; la tercera polea reduce esta cuarta parte a la octava. La función de la polea fija es facilitar el movimiento y mantener el paralelismo. Se ve fácilmente que cada polea que entra en funciones, divide por 2 el esfuerzo necesario. En nuestro caso:

$$F = \frac{R}{8} = \frac{R}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{R}{2^3}$$

En general, para un aparejo con n poleas móviles, la condición de equilibrio es:

$$\boxed{F = \frac{R}{2^n}}$$

El número n de poleas móviles aparece como exponente de 2, y las *potencias* de 2 figuran como divisores de la resistencia; de ahí que este sistema de poleas se llame aparejo *potencial.*



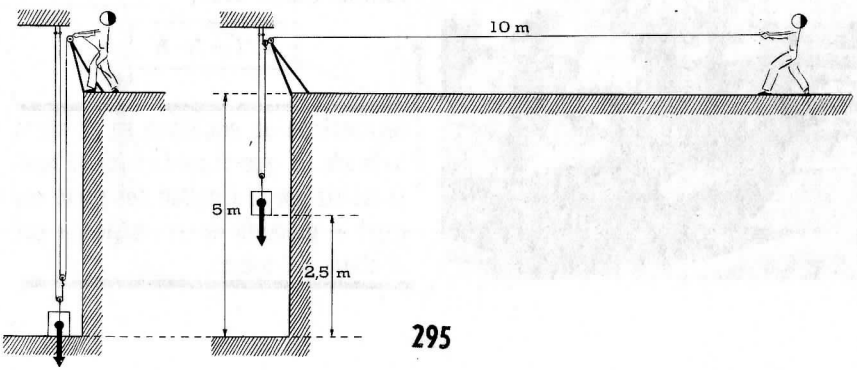
Aparejo potencial.

Multiplicación del aparejo potencial

De la condición de equilibrio resulta:

$$R = F \cdot 2^n$$

El factor de multiplicación es 2^n.



Trabajo realizado con aparejo potencial

En la figura se observa que si bien $F = \frac{R}{4}$, cuando F recorre 10 m, la resistencia sólo ha subido 2,5 m. Por lo tanto,

Energía obtenida = Energía entregada.

El aparejo potencial no crea energía.

Plano inclinado

Todos hemos visto subir un barril o un tambor a un camión: se usa un tablón inclinado, pues así es más fácil subirlo. Ese tablón es una máquina simple: el plano inclinado, pues así es más fácil subirlo. Los chicos conocen otra aplicación: el tobogán.

La figura muestra un plano inclinado, y un barril cuyo peso es la resistencia R, que se debe equilibrar con la fuerza motriz F. Para hallar la condición de equilibrio, descompongamos la resistencia R en dos: R′, paralela al plano inclinado, y R″, perpendicular al mismo. Como ésta queda anulada por la reacción del plano, la que hace deslizar al barril hacia abajo es R′. A ella, pues, se debe anular, y la condición es que sea F igual y opuesta a R′.

Observando la figura se advierte que los triángulos G R R′ y A B C son semejantes, por ser rectángulos y tener A = R (pues sus lados son perpendiculares entre sí y ambos son agudos). Por lo tanto, sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{R'}{R} = \frac{h}{l}.$$

Como cuando hay equilibrio se cumple que F = R′,

$$F \cdot l = R \cdot h$$

La condición de equilibrio en el plano inclinado, es que el producto de la fuerza motriz por la longitud del plano sea igual al producto de la resistencia por la altura del mismo.

Ej.: *Sobre un plano inclinado de 5 m de largo hay un barril de 100 $\vec{kg}$. Calcular la fuerza necesaria para mantenerlo en equilibrio, sabiendo que el plano forma un ángulo de 30° con la horizontal.*

Aplicando la fórmula hallada:

$$F \cdot l = R \cdot h.$$

En este caso no conocemos directamente h, pero es fácil calcularla, pues:

$$\frac{h}{l} = \text{sen } 30° \therefore h = l \text{ sen } 30°.$$

y reemplazando en la fórmula:

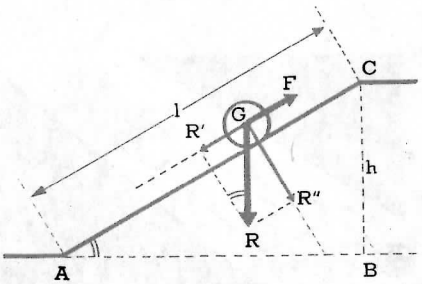
$$F \cdot l = R \cdot l \text{ sen } 30°$$
$$F = R \text{ sen } 30° = R \cdot \tfrac{1}{2}$$
$$F = 100 \vec{kg} \cdot \tfrac{1}{2} = 50 \vec{kg}.$$

Multiplicación del plano inclinado

De la condición de equilibrio,

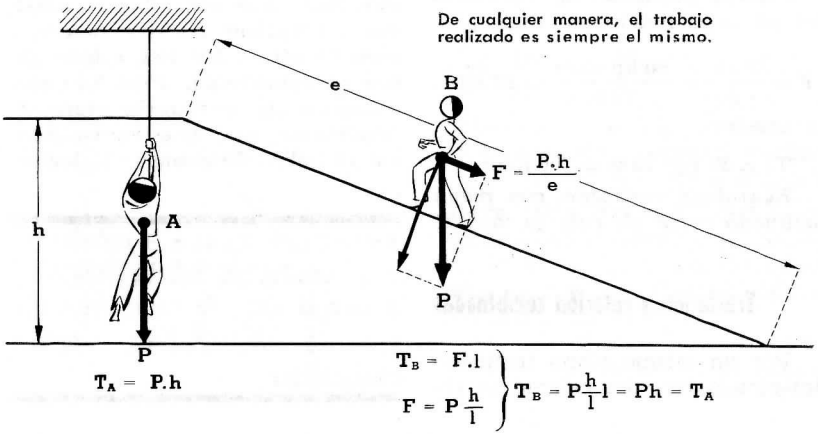
$$R = F \cdot \frac{l}{h}.$$

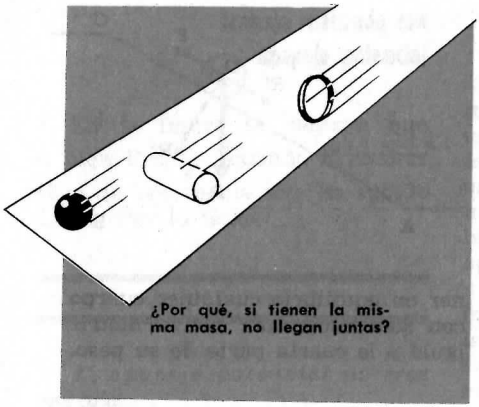
El factor $\frac{l}{h}$ es la multiplicación del plano. Por ejemplo: si un plano que llega hasta una altura de 60 cm tiene una longitud de 2,4 m, la multiplicación vale 2,4 m : 0,6 m = 4: se podrá mantener en equilibrio cualquier cuerpo con sólo hacer una fuerza motriz igual a la cuarta parte de su peso.



Trabajo con plano inclinado

Dos amigos tenían que subir a una plataforma de 6 m de altura, y disponían de dos medios: un plano inclinado y una soga con nudos. Uno prefirió el plano inclinado, "porque le costaría menos trabajo subir por él". El otro, deportista, afirmó que para él era menos trabajo subir por la soga. Discutieron el asunto, pero no se pusieron de acuerdo, porque a ninguno de los dos se le ocurrió definir el concepto en discusión: *trabajo.*





¿Por qué, si tienen la misma masa, no llegan juntas?

Hagamos nosotros la discusión. Supongamos que los dos amigos pesan lo mismo: $60\ \vec{kg}$. El trabajo realizado por A es:

$$T_A = P \cdot h = 60\ \vec{kg} \cdot 5\ m = 300\ kgm,$$

pues su peso es la resistencia que debe vencer, y h la distancia que debe recorrer.

El trabajo realizado por B es:

$$T_B = F \cdot l,$$

pues no es su peso, sino F, la resistencia que debe vencer, y no h, sino l, el camino que debe recorrer.

Pero la condición de equilibrio del plano inclinado nos dice que:

$$F = \frac{P \cdot h}{l} = \frac{60\ \vec{kg} \cdot 5\ m}{10\ m} = 30\ \vec{kg}.$$

Luego:

$$T_B = 30\ \vec{kg} \cdot 10\ m = 300\ kgm.$$

El trabajo realizado, con plano inclinado o sin él, vale lo mismo.

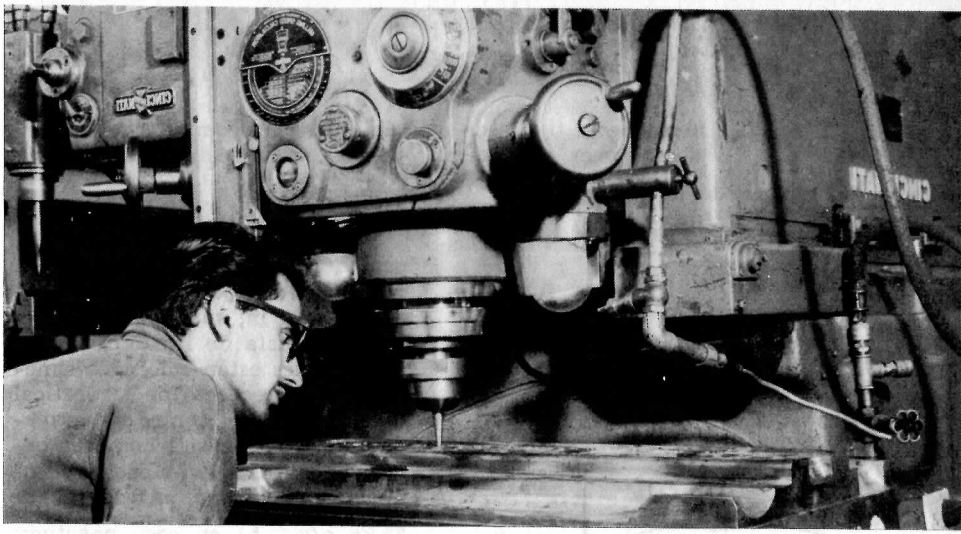
Traslación y rotación combinadas

Por un mismo plano inclinado dejemos rodar una esfera, un cilindro macizo y un aro, los tres de masas iguales. Observaremos que primero llega la esfera, luego el cilindro y por último el aro. Sin embargo, puesto que las masas son iguales, y por lo tanto sus pesos, las fuerzas que los impulsan son también iguales. ¿A qué se debe la diferencia? No es difícil advertirla. En primer lugar, hagamos notar que los tres cuerpos no se *deslizan*, sino que *ruedan*. Por lo tanto, la fuerza que los impulsa no sólo debe vencer la inercia de traslación de cada uno, sino su inercia de rotación; aquélla, medida por la masa, es la misma para los tres; ésta, en cambio, está medida por el momento de inercia respecto de sus respectivos ejes de rotación, y de los tres cuerpos, la esfera es la que menor momento de inercia tiene.

El trabajo hecho con máquinas

Como conclusión de nuestro estudio de las máquinas, podemos decir que con ellas se consigue multiplicar nuestra fuerza, o bien nuestra velocidad, o bien ganar en comodidad. Pero hay otra consecuencia extraordinariamente importante, que nuestra insistencia ya habrá descubierto al lector:

La energía entregada a la máquina para que realice un trabajo, es igual a la energía obtenida mediante la máquina. Las máquinas, pues, no pueden crear energía.



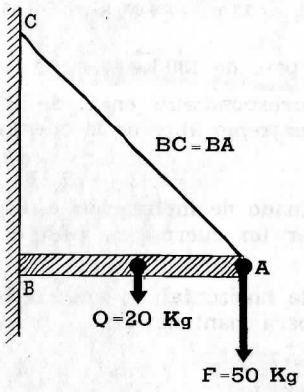
Problemas

1. Se desea levantar una piedra de 1 000 $\vec{kg}$ con una palanca de primer género. Se establece un punto de apoyo a 60 cm de la piedra y el brazo de la fuerza motriz es de 3 m. *a)* ¿Qué fuerza motriz hay que aplicar? *b)* ¿Cuál es la multiplicación de esa palanca?

R.: *a)* 200 $\vec{kg}$; *b)* 5

2. La piedra anterior se quiere levantar con una palanca de segundo género a 2 m de largo. La piedra está sobre la barra, a 20 cm del apoyo. *a)* ¿Cuál es la fuerza motriz necesaria? *b)* ¿Cuál es la multiplicación de esta palanca?

R.: *a)* 100 $\vec{kg}$; *b)* 10

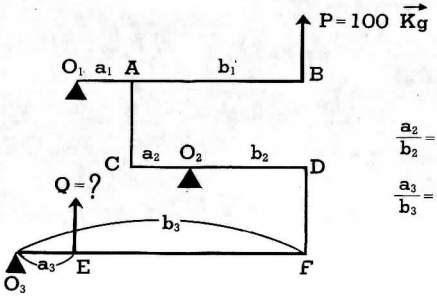


3. Una palanca física A B de peso Q = 20 $\vec{kg}$ (aplicado en el punto medio de A B), es mantenida en posición horizontal mediante una cuerda A C, como indica la figura. Una fuerza F = 50 $\vec{kg}$ está aplicada en el extremo A. Se desea saber la fuerza que se ejerce sobre la cuerda A C, sabiendo que B A = B C = 2 m.

R.: 85 $\vec{kg}$. (Guía: Tómense momentos respecto de B)

4. El sistema de la figura de más abajo es una combinación de palancas. Se desea saber qué fuerza Q podrá ser vencida mediante una fuerza P de 100 $\vec{kg}$.

R.: 833 $\vec{kg}$



$\frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{3}$

$\frac{a_3}{b_3} = \frac{1}{5}$

5. El acoplado de un camión pesa 2,8 T y mide 5 m de largo. La distancia entre los ejes de las ruedas es de 3 m; suponiendo que el peso equidista de los extremos, y que los ejes están colocados simétricamente respecto de la vertical que pasa por el centro de gravedad: *a)* calcular si 2 hombres podrán levantar el acoplado aplicando en su extremo una fuerza de 75 $\vec{kg}$ c/u.; *b)* en caso negativo: ¿cuántos hombres se necesitarán, suponiendo que todos pueden realizar la misma fuerza anterior?

R.: *a)* No; *b)* 14 hombres

6. El sistema que eleva el ascensor de una casa de departamentos está formado por una polea fija y una móvil. El peso máximo del ascensor cargado es de 500 $\vec{kg}$. ¿Qué fuerza habrá que hacer para levantarlo?

R.: 250 $\vec{kg}$

7. Un cuerpo de 2 T es subido por un plano inclinado hasta una altura de 3 m. La fuerza necesaria para hacer esta operación es de 500 $\vec{kg}$. *a)* ¿Cuál es la longitud del plano? *b)* ¿Qué trabajo se realizó? *c)* ¿Qué potencia se puso en juego, suponiendo que la operación duró 2 minutos?

R.: *a)* 12 m; *b)* 6 000 kgm; *c)* 50 $\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$

8. Una polea móvil que soporta un peso de 130 $\vec{kg}$, y cuyo peso es de 11,42 $\vec{kg}$, se apoya sobre la cuerda correspondiente en ¼ de su perímetro. ¿Qué fuerza hay que aplicar al extremo libre de la cuerda para mantener el equilibrio?

R.: 100 $\vec{kg}$

9. Demostrar que en un plano inclinado de inclinación α, la fuerza horizontal necesaria para equilibrar un cuerpo de peso P vale $F = P \cdot \text{tang } \alpha$.

10. Un plano inclinado forma con la horizontal un ángulo de 30°. ¿Qué fuerza horizontal será necesaria para mantener en equilibrio sobre el plano a un cuerpo que pesa 250 $\vec{kg}$?

R.: 144,3 $\vec{kg}$

22 LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En todas las máquinas estudiadas en capítulos anteriores resultó:

Energía entregada = Energía obtenida.

Esas máquinas, pues, no crean ni destruyen la energía: *la conservan*. Su función, como vimos, consiste en ayudarnos a multiplicar nuestra fuerza, o nuestra velocidad, o en facilitar nuestro esfuerzo.

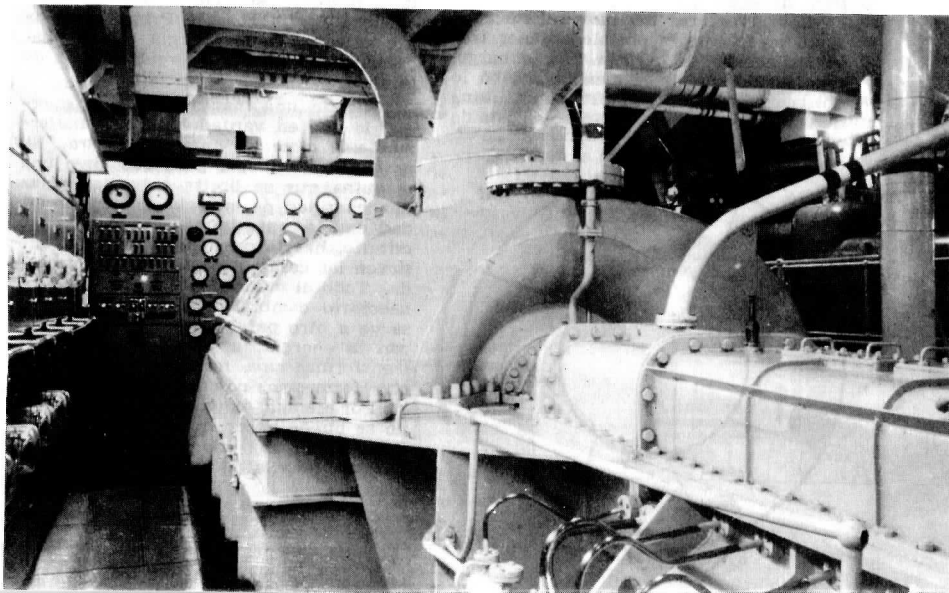
Pero... ¿no será posible inventar una máquina que cree energía? El hecho de que hasta ahora no la conozcamos no significa que no se pudiese concebir. Una máquina tal se movería eternamente, y se cumpliría el sueño de los que pretenden inventar el movimiento continuo.

El movimiento continuo

El llamado movimiento continuo ha sido "inventado" constantemente. Lo que prueba que nunca fue inventado. A todas las academias científicas del mundo acuden docenas de mecánicos, relojeros y hasta sastres y guardas de tranvía que traen los planos de la máquina bajo el brazo. A menudo son complicadas y elegantes, pero tienen un pequeño inconveniente: *no marchan*.

Pero no hay que creer que todos son locos: algunos son simplemente jóvenes o ignorantes. Así, el gran sabio alemán

Esta máquina: ¿crea energía . . .? ¿o simplemente la transforma?



Patitos bebedores: ¿movimiento continuo? (**Foto Serv. de Inform. de la Embajada Británica.**)

Ostwald confiesa la gran desilusión que sufrió al no poder resolver el problema del movimiento continuo, que lo obsesionó en su primera juventud. Sin embargo, agrega, "aprendí mucho con ese fracaso total". La diferencia entre un hombre inteligente y un tonto no consiste en que aquél no comete errores y éste sí, sino en que el hombre inteligente sabe extraer enseñanzas de sus errores.

La denominación "movimiento continuo" induce en error: no se trata de fabricar una *máquina que marche continuamente*, sino que trabaje *sin gasto*, creando ella misma la energía necesaria para trabajar.

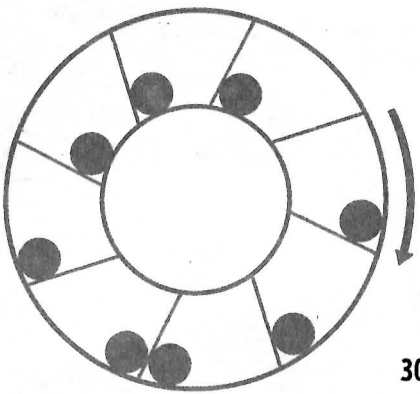
Los inventores del movimiento continuo creen que es posible obtener trabajo o energía de la nada. Sin embargo, toda la historia de la ciencia prueba lo contrario. Por ejemplo: una máquina de vapor produce trabajo, pero a costa de algo, del calor o la energía entregada por el carbón o la leña al quemarse; un molino de viento puede sacar agua de un pozo, pero a costa de la energía del viento, que a su vez no sale de la nada, sino que es producida por la energía solar, que al calentar algunos lugares de la Tierra más que otros, provoca corrientes de aire.

Hay también vistosos aparatitos, especie de molinetes, que suelen verse en las vidrieras de las casas de óptica, y que "andan solos", pero que en realidad marchan a costa de la energía luminosa: la luz está compuesta de corpúsculos pequeñísimos, llamados *fotones*, que al chocar como una granizada, en número de billones, contra las aspas del molinete, lo ponen en movimiento. Es un verdadero molino de luz. Del mismo modo, los "relojes sin cuerda" marchan a costa de la energía del movimiento corporal. Últimamente se ha difundido un juguete muy gracioso: el "patito bebedor". Sin que "nadie" lo mueva, se inclina, bebe y luego se levanta, para volver a inclinarse a los pocos segundos. El movimiento es producido por un líquido volátil contenido en su interior: el vapor sube, aumenta el peso de la cabeza, y el patito se inclina a beber; el agua del vaso produce la condensación del vapor que vuelve a la base, con lo cual el patito "ya ha saciado su sed" y se levanta, repitiéndose el juego.

Todas las máquinas productoras de trabajo que ha construido el hombre hasta el presente, en más de dos mil años, obedecen al inexorable Principio de la Conservación de la Energía, que se puede enunciar así: *la energía no sale de la nada.*

Cuando una máquina entrega energía, lo que en verdad hace es *transformar una clase de energía en otra.* Se preguntará entonces para qué sirve una máquina que se limita a transformar una cantidad de energía en otra cantidad exactamente igual. Con ese mismo criterio, habría que preguntar para qué sirven las casas donde se cambia moneda. Todo el mundo sabe que a veces es necesario cambiar moneda porque uno se va a otro país. Algo semejante pasa con la energía: a veces es necesario transformar una forma de energía en otra forma más cómoda, o más útil.

Por ejemplo, con sólo quemar carbón no se puede hacer marchar un tren: es inútil poner una pila de carbón, aunque sea del mejor, al lado de un tren parado.



y luego, poniéndole fuego, esperar que el tren se ponga en marcha. Cualquiera se da cuenta de que es menester transformar la energía térmica del carbón en la energía mecánica de un pistón, que pueda hacer girar una rueda. Esto es, precisamente, lo que hace la máquina de vapor.

Las máquinas se limitan, pues, a *transformar energía, jamás a crearla.*

Muchos de estos razonamientos los conocen los inventores de movimientos continuos, pero hay al alcance de todo el mundo una fuerza gratuita: *la fuerza de la gravedad.* ¿Por qué no aprovecharla? Basta imaginar, por ejemplo, la tremenda energía que entregaría una masa de plomo cayendo desde una gran altura. Haciéndola caer repetidas veces sobre una plataforma elástica o lo que fuere, se podría aprovechar para hacer funcionar diferentes instalaciones. Se han construido así molinos de gravedad, que "marchan" a costa de la nada. Pero hay una razón para que estos aparatos no funcionen: para levantar de nuevo la pesa hasta la altura inicial, hay que gastar exactamente la misma cantidad de energía que la pesa entregó al caer. Y si esa energía se gasta en algo que no sea volver a subir la pesa, ésta se queda abajo y se acabó el movimiento.

Esto ya lo sabía Galileo hace más de trescientos años, y aun antes, el propio Leonardo de Vinci.

Principio de la conservación de la energía: la energía se transforma, pero no se crea ni se destruye. La energía se conserva.

Hasta ahora sólo hemos hablado de la energía mecánica, pero hay otras clases de energía: el calor producido al quemar carbón puede mover una locomotora: *energía calórica*; la corriente eléctrica puede mover un motor, que a su vez puede realizar un trabajo: *energía eléctrica.*

Es sumamente curioso que todas estas energías, aparentemente tan distintas, den al final el mismo resultado: *todas se manifiestan produciendo trabajo.*

Esto nos hace pensar que las distintas formas de energía son, en el fondo, una misma cosa. Como un actor, la energía puede representar distintos papeles con sólo cambiar de traje.

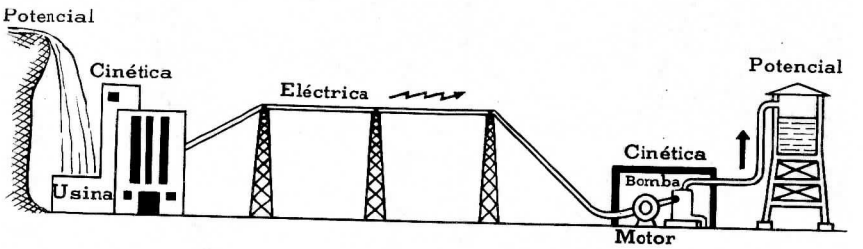
Veamos una transformación típica de este gran actor: la energía potencial del agua contenida en un dique se transforma en energía cinética al caer; la energía cinética del agua hace mover las turbinas de una usina; estas turbinas mueven a su vez una dinamo, que es un aparato que transforma la energía cinética en energía eléctrica; la energía eléctrica viaja, a través de cables, hasta un motor eléctrico, que es un aparato que funciona al revés de la dinamo: transforma la energía eléctrica en energía cinética, pues pone en movimiento una rueda; el movimiento de esta rueda se transmite a una bomba de agua, y esta bomba envía el agua hasta un tanque, convirtiendo la energía cinética nuevamente en potencial.

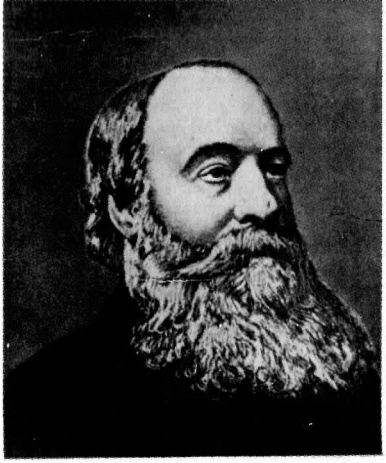
Si no hubiese pérdidas en el camino, la energía almacenada al final en el tanque sería igual a la que primitivamente se tenía en el dique.

Un poco de historia

La humanidad necesitó llegar hasta el siglo XIX para darse cuenta de que en el universo existe algo que figura en todos los procesos sin aumentar ni disminuir, aunque cambiando de apariencia. *Ese algo es la energía.*

En el descubrimiento de la energía hay que recordar, sobre todo, dos nombres: *Roberto Mayer* y *James Prescott Joule.*





James P. Joule.

Roberto Mayer fue un modesto médico alemán, nacido en 1814 en la ciudad de Heilbronn. En el verano de 1840, siendo médico de un barco, al llegar a Batavia observó en las sangrías que efectuaba a los enfermos, que la sangre venosa era allí más clara que en Europa. Este hecho singular le llamó poderosamente la atención, y para explicarlo realizó numerosas experiencias y pensó mucho. El resultado de sus investigaciones fue el descubrimiento del *Principio de Conservación de la Energía*, uno de los dos o tres pilares básicos de la Física.

Los escritos de Mayer fueron rechazados por las revistas científicas alemanas, y el pobre médico intentó suicidarse y concluyó por volverse loco, siendo internado en un manicomio. El caso de Mayer es uno de los más tristes de la historia de la Física, y muestra hasta qué punto los genios pueden ser desconocidos por el resto de sus semejantes, incluso de otros genios.

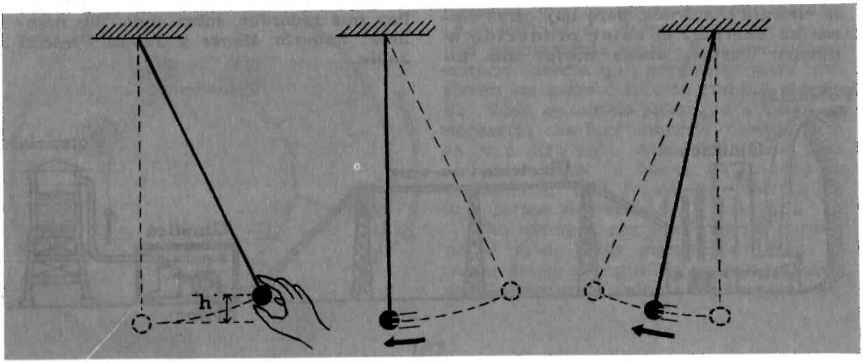
En cuanto al inglés Joule, cuyos trabajos contribuyeron decisivamente al descubrimiento del famoso principio, nació en Salford en 1818, y murió en 1889. Estudió química, y su padre, rico cervecero de Mánchester, le construyó un pequeño laboratorio en la fábrica, pues por una deformidad física no lo admitieron como profesor en la Universidad. Hoy es una de las glorias de la ciencia inglesa.

El juego de la energía en el péndulo

Para hacer oscilar un péndulo debemos entregarle energía, a fin de sacarlo del reposo. ¿Qué hace el péndulo de ella? Imaginémoslo en la posición de la figura: toda la energía que le hemos entregado para levantarlo hasta la altura h, el péndulo la tiene en forma de energía potencial: $E_p = P\,h$.

Cuando lo soltamos, el péndulo se mueve con velocidad cada vez mayor, lo que significa que su energía cinética, $\frac{1}{2}\,m\,v^2$, va creciendo, hasta hacerse máxima al pasar por su posición de equilibrio, pues ahí su velocidad es máxima. En ese punto, su energía potencial es nula, pues $h = 0$. ¿Qué se ha hecho de ella? Simplemente, se ha transformado íntegramente en energía cinética.

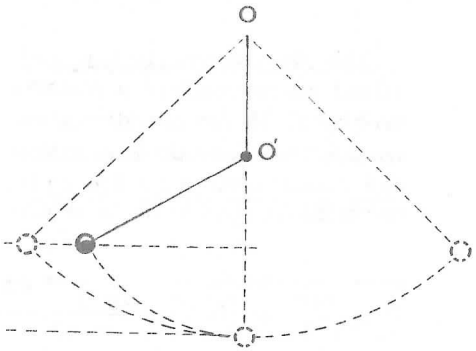
Cuando el péndulo alcanza nuevamente su altura máxima, su velocidad, y por lo tanto su energía cinética es allí nula: toda ella



se ha transformado en energía potencial.

En un punto intermedio de su trayectoria, tiene a la vez energía cinética y energía potencial: su suma es igual a la energía potencial a la altura h, o bien a su energía cinética al cruzar la vertical.

Hay una experiencia muy sencilla para comprobar, de una manera más, la conservación de la energía. Se deja oscilar al péndulo, y en determinado momento se interpone un obstáculo, como indica la figura: se observará que el péndulo, que ahora gira alrededor de O', alcanza no obstante la misma altura h que cuando giraba alrededor de O.



PROBLEMA: *Un chico arroja una piedra de 500 g verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 31 m/s. Calcular su energía cinética, su energía potencial y su* energía mecánica *(potencial más cinética) en el instante inicial, a 5 y a 20 m de altura, y cuando alcanza su altura máxima.*

En el instante inicial:

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot (31 \text{ m/s})^2}{2} = 240{,}25 \text{ joules (M. K. S.)};$$

$E_p = 0$ (puesto que está a una altura cero);

$E_m = E_c + E_p = 240{,}25$ J.

A 5 m de altura:

Previamente hay que calcular la velocidad que tiene cuando está a 5 m de altura. Como el movimiento es uniformemente retardado:

$$v_5 = v_0 - g\,t. \qquad (1)$$

Pero desconocemos t, el tiempo que emplea en llegar a 5 m de altura. Sin embargo, sabemos que:

$$h = v_0\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Esta ecuación de 2º grado tiene como incógnita el tiempo t: la resolvemos:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\,g \cdot h}}{2 \cdot \frac{1}{2}\,g} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h}}{g} \qquad (2)$$

Reemplazando en la fórmula (1) de la velocidad el valor del tiempo expresado en la (2):

$$v_5 = v_0 - g\,\frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h}}{g} =$$

$$= v_0 - v_0 \mp \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h} = \mp \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,h}.$$

Hay dos signos: (+) y (−). ¿Cuál corresponderá a nuestro problema? Hemos considerado como positivo el sentido de la velocidad inicial; como a los 5 m no ha cambiado el sentido de la velocidad, sigue siendo positivo: corresponde el signo (+).

¿Y qué significa el signo (−)? Que la piedra volverá a pasar por esa misma altura, con esa misma velocidad, pero *bajando* (signo −).

Ahora calculemos la E_c:

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,(v_0^2 - 2\,g\,h)}{2} = \frac{0{,}5\text{ kg}\,[(31\text{ m/s})^2 - 2\cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5\text{ m}]}{2} =$$

$$= \frac{0{,}5\text{ kg}\left(961\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 98\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)}{2} = \frac{0{,}5\text{ kg}\cdot 863\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} = 215{,}75\text{ J}.$$

$$E_p = P\cdot h = 0{,}5\text{ kg}\cdot 5\text{ m} = 2{,}5\text{ kgm} = 24{,}50\text{ J}.$$

Energía total:

$$E_m = E_c + E_p = 240{,}25\text{ J}.$$

Un cálculo análogo nos conduce a que, a 20 m de altura:

$$\left.\begin{array}{l} E_c = 142{,}25\text{ J} \\ E_p = \ 98{,}00\text{ J} \end{array}\right\}\ E_m = 240{,}25\text{ J}.$$

Cuando alcanza su altura máxima:

Primero calculemos cuál es la altura máxima. Sabemos que en ella la velocidad se anula:

$$v = v_0 - g\,t = 0,$$

de modo que podemos calcular el tiempo que emplea en llegar a ella:

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{v_0}{g} \\ h = v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{array}\right\}\ \therefore\ h = \frac{v_0^2}{2\,g}$$

Y como:

$$h = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\left(31\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{961}{9{,}8}\,m = 49{,}03\,m.$$

Luego:

$$E_p = P\cdot h = 240{,}25\text{ J}$$

Como $v = 0$, es

$$E_c = \frac{m\,v^2}{2} = 0.$$

Y la energía mecánica total es:

$$E_m = E_p + E_c = 240{,}25\text{ J}.$$

En resumen:

Altura	E_c	E_p	E_m
0 m	240,25 J	0 J	240,25 J
5 m	215,75 J	24,5 J	240,25 J
20 m	142,25 J	98 J	240,25 J
49,03 m	0 J	240,25 J	240,25 J

El rendimiento de una máquina

En todos los cálculos anteriores hemos supuesto que el trabajo entregado a una máquina es igual al realizado por ésta al vencer una resistencia a lo largo de un camino. Es decir:

$$\text{Trabajo entregado} = \text{Trabajo obtenido}.$$

Pero podemos decir que las máquinas "cobran" por trabajar, pues al levantar un cuerpo con una polea fija, por ejemplo, no sólo debemos vencer el peso del cuerpo, sino que debemos mover la polea, y eso ya representa un trabajo. Además, la polea está apoyada en un eje, y al moverse roza con él, lo que significa otro trabajo más. El trabajo realizado para mover la polea y para vencer el rozamiento es trabajo perdido (el que "cobra" la máquina para trabajar), de modo que en la práctica, la igualdad anterior se transforma en:

$$\text{Trabajo entregado} = \text{Trabajo obtenido} + \text{trabajo perdido}$$

Una máquina será tanto más "rendidora" cuanto menos trabajo "cobre", es decir, cuanto menos trabajo se pierda en hacerla funcionar.

DEFINICIÓN: *Se llama rendimiento de una máquina al cociente entre el trabajo obtenido y el trabajo entregado.*

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Trabajo obtenido}}{\text{Trabajo entregado}}$$

$$R = \frac{T'}{T}$$

En general, ese cociente se multiplica por 100, y el rendimiento se expresa en "porcientos".

PROBLEMA: *Con un torno se levanta una carga de 100 $\vec{kg}$ hasta una altura de 3 m. Para ello se entrega un trabajo de 320 kgm. Calcular el rendimiento.*

Trabajo obtenido:

$$T' = 100\ \vec{kg} \cdot 3\ m = 300\ kgm.$$

Trabajo entregado:

$$T = 320\ kgm.$$

Rendimiento: $R = \frac{300\ kgm}{320\ kgm} =$

$= 0{,}9375$; o bien: $R = 93{,}75\ \%$.

El rozamiento

La lucha por el rendimiento máximo

Uno de los factores que más disminuyen el rendimiento de una máquina es el rozamiento entre las superficies en contacto. Al producirse el movimiento, el roce entre las superficies produce calor, que es una forma de energía, y esa energía calórica no se aprovecha.

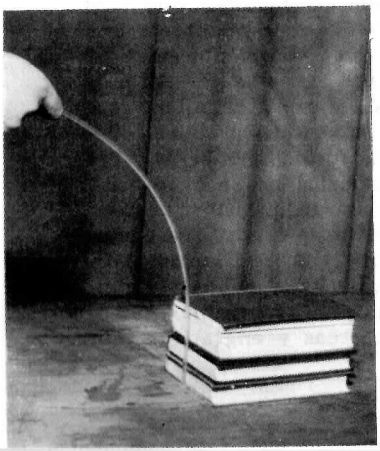
Sin embargo, no hay que pensar que siempre el roce sea perjudicial. Sin él no podríamos hacer muchas cosas; por ejemplo, caminar, frenar, transmitir movimientos por correas y engranajes, etc.

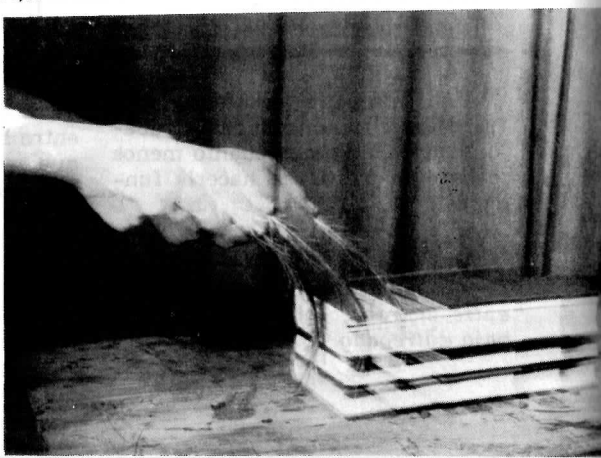
La rueda disminuye el rozamiento.

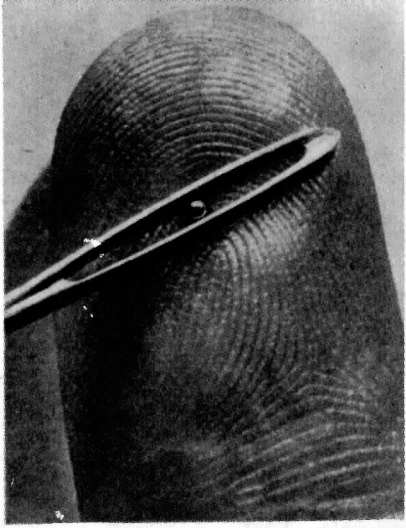
Posiblemente, uno de los primeros inventos que haya hecho el hombre para disminuir el rozamiento en aquellos casos en que le es perjudicial, ha sido la rueda. Resulta ocioso que hablemos de sus ventajas, pero una pequeña experiencia casera nos dará una idea de la diferencia que existe entre arrastrar un cuerpo haciéndolo deslizar, y moverlo "sobre ruedas". Tómese un libro y hágaselo deslizar por sobre el escritorio; luego colóquense debajo dos lápices, o dos varillas del mismo diámetro, apóyese el libro sobre ellos, y repítase la experiencia: la resistencia al movimiento será ahora incomparablemente menor.

Una idea de este tipo fue la que hizo nacer los cojinetes de bolillas, empleados actualmente en millones de máquinas de todo género. Hay muchas clases de estos cojinetes; algunos usan bolillas y otros

La varilla flexible no logra mover los libros apoyados, pero basta colocar dos lápices debajo para que se muevan fácilmente.







Los rodamientos a bolillas, uno de los mayores inventos en la lucha contra el rozamiento.

cilindros; y los hay de los más variados tamaños, desde pequeñísimas esferitas, que pueden pasar a través del ojo de una aguja, hasta enormes esferas de 1,5 m de diámetro. Sus aplicaciones son de las más diversas: desde el automóvil y la bicicleta, hasta los relojes.

Problemas

1. Un fusil pesa 4 $\vec{kg}$. La bala pesa 20 $\vec{g}$ y sale del fusil con una velocidad de 400 m/s. Calcular la velocidad de retroceso del fusil, su energía cinética y la energía cinética de la bala.

R.: 2 m/seg; 8×10^7 erg; 16×10^9 erg

2. Una fuerza actúa formando un ángulo de 60° con la vertical, levantando una masa de 1 kg. Si gasta una energía de 2 joules: ¿a qué altura consigue levantar dicha masa? ¿Cuál es la energía potencial de dicha masa? Si el proceso dura 60" ¿cuál es la potencia invertida?

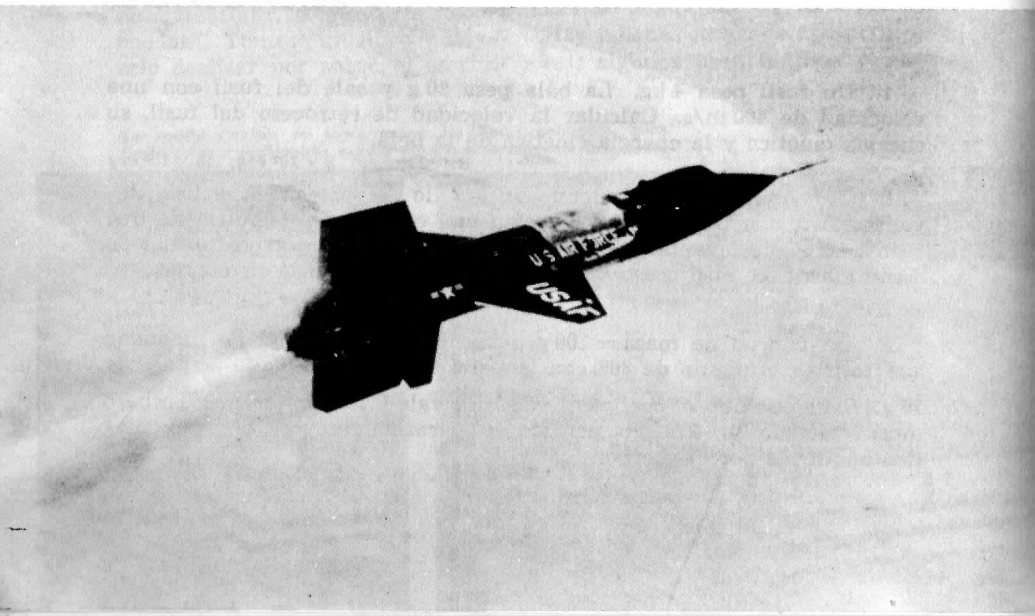
R.: 0,40 cm; 2 J; $\frac{1}{30}$ w

3. Un cuerpo de masa = 100 g sube 100 cm por un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la vertical. La fuerza que actúa vale 75 $\vec{g}$. Sabiendo que el coeficiente de roce vale 0,2, calcular: *a)* Trabajo total realizado; *b)* Energía perdida en el rozamiento; *c)* Energía cinética adquirida por el cuerpo.

R.: 7.35×10^4 erg; 1 697 400 erg; 752 600 erg

VI

DINÁMICA DE LOS FLUIDOS



¿Cómo se comportan los fluidos en movimiento? A pesar de las experiencias citadas en primer término en el texto, y que pueden producir algo de desconcierto, los fluidos en movimiento se comportan, en líneas generales, con la misma sencillez que los sólidos.

El estudio de la Fluidodinámica tiene una importancia grande, que fácilmente ha de advertirse con sólo pensar que en él está basado nada menos que el vuelo de los aviones. En estos últimos años se ha avanzado mucho en el estudio de esta parte de la física, y en la lucha por superar ese límite que significa la velocidad del sonido, se han hecho descubrimientos sumamente curiosos sobre el comportamiento del aire, cuando un cuerpo se desplaza por él a una velocidad cercana a la del sonido. Una de las consecuencias de esa diferencia en el comportamiento, según que la velocidad del móvil sea cercana a la del sonido o no, se traduce en que la línea de los aviones destinados a vuelos supersónicos sea muy distinta de la de los aviones comunes, sobre todo en el ángulo de las alas y en la altura de la cola.

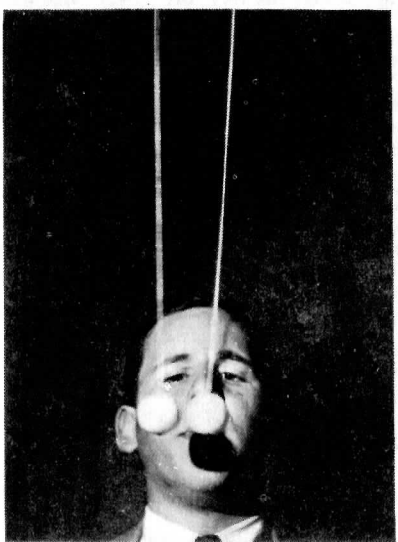
23 DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

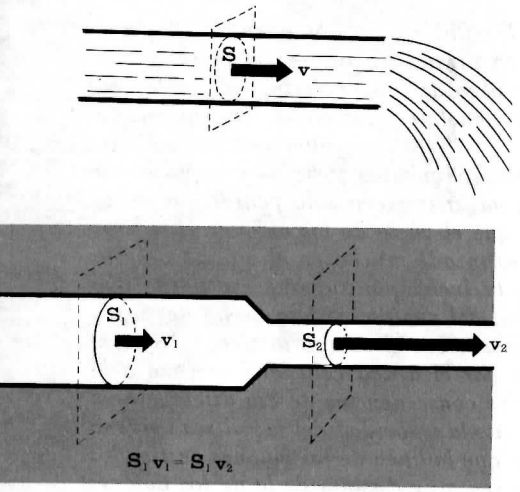
Dos sorpresas

Seguramente el lector se sorprenderá por los dos problemas que planteamos en seguida.

1) Sobre un carretel de hilo apoyamos una hojita de papel. Del otro lado soplamos fuertemente, a la vez que soltamos el papel. ¿Qué hace éste?

2) Colgamos, suspendidas por dos hilos livianos, dos pelotitas de ping-pong, de modo que estén a la misma altura, aunque sin tocarse. Soplamos fuertemente entre ambas. ¿Qué hacen las pelotitas?





Suponemos que sus respuestas serán, a 1: la hojita de papel es separada violentamente del carretel; a 2: las pelotitas de ping-pong se separan. Pues bien: *sucede exactamente lo contrario.* La hojita de papel se queda "caprichosamente" adherida al carretel, y cae cuando dejamos de soplar; las pelotitas se acercan, y hasta chocan, separándose cuando dejamos de soplar.

Pero no hay tal "capricho": en ambos casos, los cuerpos se limitan juiciosamente a obedecer las leyes de la Naturaleza. ¿Cuáles son esas leyes? Comencemos por el principio.

Caudal de una corriente

Supongamos una corriente de agua, por ejemplo, un arroyuelo, o simplemente el agua que corre por una cañería. Se llama *caudal* Q de la corriente, el cociente entre el volumen V de líquido que pasa por una sección S, y el tiempo t que emplea en pasar:

$$Q = \frac{V}{t}$$

Si la velocidad con que se mueve el líquido es v, en t segundos recorrerá una distancia $d = v\,t$. Si suponemos que la corriente de agua tiene forma cilíndrica, el volumen V de agua que ha pasado en t segundos ocupa el volumen de un cilindro que tiene S de base y $v\,t$ de altura. Luego,

$$Q = \frac{S\,v\,t}{t} = S\,v.$$

EJEMPLO: *Por un tubo de sección* $S = 10\ cm^2$ *circula una corriente cuya velocidad es de* $5\ \frac{m}{s}$. *¿Qué cantidad de líquido atraviesa a S en 10 seg.?*

$$\left.\begin{array}{l} Q = \dfrac{V}{t} \therefore\ V = Q\,t \\ Q = S\,v \end{array}\right\} \therefore\ V = S \cdot v \cdot t$$

$$V = 10\ cm^2 \cdot 5\ \frac{m}{s} \cdot 10^s = 10\ cm^2 \cdot 500\ \frac{cm}{s} \times$$

$$\times\ 10^s = 50\,000\ cm^3 = 50\ dm^3 = 50 \text{ litros.}$$

EJEMPLO: *La velocidad de un líquido a través de una sección* $S = 5\ cm^2$ *es de* $100\ \frac{cm}{s}$. *¿Cuál es el caudal de esa corriente?*

$$Q = S \cdot v =$$

$$5\ cm^2 \cdot 100\ \frac{cm}{s} = 500\ \frac{cm^3}{s}.$$

Relación entre la velocidad y la sección

Si obturamos a medias la boca de una canilla, observaremos que la velocidad de salida del líquido

(Cortesía de Shell Mex Argentina.)

aumenta, aunque la cantidad total de líquido que sale en un tiempo dado será la misma. Este sencillo ejemplo nos enseña que cuanto menor es la sección del conducto, mayor es la velocidad del líquido. Pero, ¿qué relación hay entre sección y velocidad?

Supongamos que el caudal sea constante en el conducto de la figura.

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } S_1 \\ \quad Q = S_1 \cdot v_1 \\ \text{En } S_2 \\ \quad Q = S_2 \cdot v_2\end{array}\right\} \therefore\ S_1 v_1 = S_2 v_2\,,$$

o también:

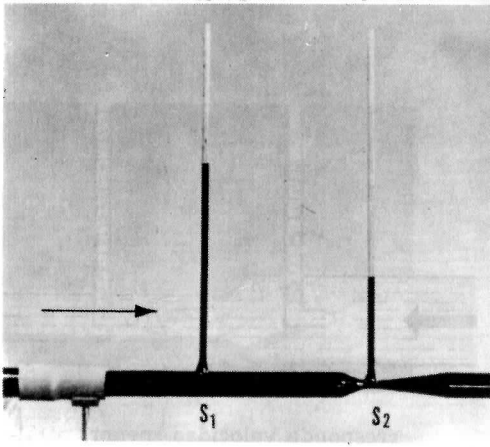
$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}}$$

Luego, las velocidades son inversamente proporcionales a las secciones. Es decir, que si la sección de un conducto se hace 2, 3, 4, etc., veces menor, la velocidad del líquido que la atraviesa se hace 2, 3, 4, etc., veces mayor.

Por supuesto que esta importante relación, llamada *Ecuación de la Continuidad*, y cuyo descubrimiento se debe a Castelli, discípulo de Galileo, sólo se cumple cuando el caudal es constante. En tal caso, el movimiento se llama *estacionario*.

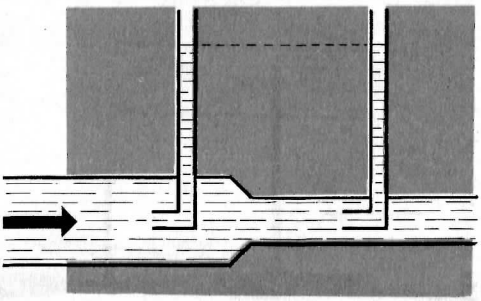
¿Qué indica un manómetro en una cañería?

En dos secciones distintas de un mismo tubo se han colocado tubos abiertos, de manera que sus bocas



queden al mismo nivel. Sirven como manómetros de aire libre (¿por qué?). Si el líquido está en reposo observaremos que en los dos el líquido sube hasta la misma altura, porque de acuerdo con la ley fundamental de la hidrostática, la diferencia de presión entre dos puntos de un líquido en reposo sólo depende de la diferencia de altura entre ellos. Pero si el líquido se mueve se observan indicaciones distintas: marca más el que está conectado en la sección mayor. Pero como a sección mayor co-

Empleo del manómetro.



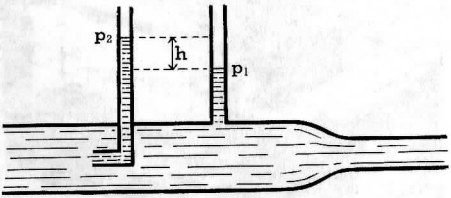
rresponde velocidad menor, resulta que la presión es mayor donde la velocidad es menor.

Esta experiencia enseña que:

a) *En los líquidos en movimiento no se cumple la ley general de la hidrostática.*

b) *La presión de un líquido en movimiento es mayor donde la velocidad es menor, o, lo que es lo mismo, donde mayor es la velocidad, menor es la presión.*

Por otra parte, este último resultado, de gran importancia en la hidrodinámica, puede deducirse fácilmente de las leyes de la dinámica. En efecto: en S_1 la velocidad de una partícula líquida es menor que en S_2; ello significa que entre S_1 y S_2 esa partícula fue acelerada; pero toda aceleración es producida por una fuerza, que tiene la dirección y sentido de la aceleración. De manera que existe una fuerza dirigida de S_1 a S_2. Pero esa fuerza sólo puede provenir de una diferencia de presiones entre S_1 y S_2.



Presión hidrodinámica

La presión no es constante en las distintas secciones de una cañería. Pero hay algo que es constante. Si acodamos los tubos en la punta, como indica la figura, observaremos que ahora el líquido sube hasta el mismo nivel en los dos, aunque las secciones, presiones y velocidades son diferentes.

Para saber qué es lo que permanece constante en las distintas secciones, coloquemos un manómetro común y un tubo acodado –que en Física se llama "tubo de Pitot"– en dos lugares de igual sección. Observaremos que entre ellos hay un desnivel h. Ese desnivel se debe a lo siguiente: en el manómetro el agua sube por efecto de la presión. En el tubo de Pitot, en cambio, el ascenso se debe al efecto de la presión más el de la velocidad (por eso la boca del tubo se coloca contra la corriente; si se la colocara a favor, indicaría lo mismo que el manómetro). Cuando el agua entra en el tubo acodado, lleva una cierta velocidad v, que "ayuda" a subir al agua. En el otro tubo, la velocidad no influye. La altura h puede calcularse si admitimos que es la misma altura a que llega un cuerpo lanzado hacia arriba con velocidad v;

$$h = \frac{v^2}{2g},$$

siendo v la velocidad del líquido en esa sección.

Si p_1 es la presión indicada por el manómetro, y p_2 la que indica

Presión hidrostática y presión hidrodinámica.

el tubo de Pitot, se tiene que:

$$p_2 - p_1 = h\,\varrho$$

(ϱ, peso específico del líquido), o sea: $p_2 = p_1 + h\,\varrho$,

y como $h = \frac{v^2}{2g}$, y $\varrho = \delta\, g$ (δ, densidad), es $h\,\varrho = \frac{v^2}{2g} \cdot \delta\, g$, y por lo tanto:

$$\boxed{p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v^2}$$

p_2 se llama *presión hidrodinámica*, y es lo que indica el tubo de Pitot.

DEFINICIÓN: *Se llama presión hidrodinámica a la suma de la presión hidrostática más la mitad de la densidad del líquido por el cuadrado de su velocidad.*

$$P = p + \frac{\delta\, v^2}{2}$$

CONSECUENCIA: *En un líquido en movimiento, todos los puntos situados al mismo nivel tienen la misma presión hidrodinámica.*

Obsérvese la analogía de esta conclusión con la que obtuvimos en hidrostática: en un líquido en reposo, todos los puntos situados a un mismo nivel tienen la misma presión hidrostática.

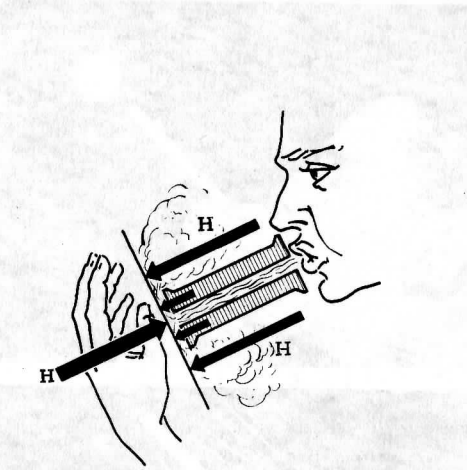
Se comprende ahora por qué un manómetro marca más donde la sección es mayor; en ambas hay presiones hidrodinámicas iguales:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_2^2,$$

y como $v_1 < v_2$, resulta: $p_1 > p_2$.

Aplicando la conclusión anterior podemos explicar por qué la hojita de papel se "pega" al carretel cuando se sopla. Por una parte, y de abajo hacia arriba, actúa la presión atmosférica H.

La corriente de aire es más veloz en la parte comprendida entre

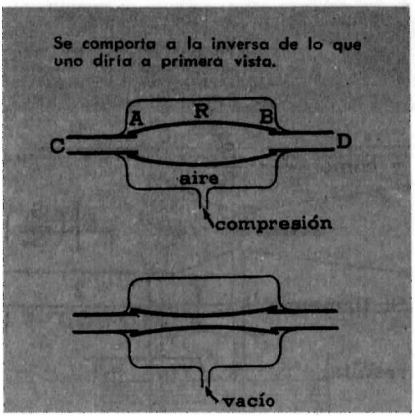


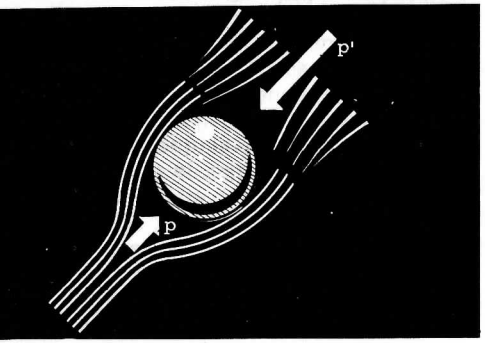
la hojita y el carretel que en el borde de la hoja; luego, la presión estática será menor en aquella zona, y como en ésta vale H, se explica que la hojita sea apretada contra el carretel.

El caso de las pelotitas de ping-pong es análogo.

El experimento de Banki

El recipiente R contiene un pequeño tubo A B de goma, de paredes muy delgadas, y que está acoplado al tubo C D de vidrio. En R puede hacerse variar la presión a voluntad, comprimiendo o extra-





yendo el aire del mismo. Por A B y C D circula agua. Si la presión en R aumenta, el tubo de goma se ensancha, porque como la presión hidrodinámica debe permanecer constante, si aumenta la presión estática debe disminuir la velocidad, y para ello la sección debe aumentar.

Un juguete aerodinámico

Consiste en un pequeño tubo y una pelotita de ping-pong. Se sopla por el tubo sobre la pelota, que en lugar de ser rechazada por el chorro de aire, baja hasta alcanzar una posición de equilibrio. Este hecho se explica porque al chocar con la pelota, el chorro de aire se abre, su sección aumenta bruscamente y la velocidad del aire baja. En consecuencia, la presión p' es mayor que la p.

Los vaporizadores

Las presiones hidrodinámicas en M y N son iguales:

$$p_M + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_M^2 = p_N + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_N^2$$

Como en M la sección del chorro de aire es mayor que en N,

$$v_M < v_N \;\therefore\; p_M > p_N,$$

y como p_M es la presión atmosférica, lo mismo que en R, $p_R > p_N \;\therefore$ el líquido sube.

Velocímetro de fluidos

El tubo de Venturi es un velocímetro de fluidos. Consiste en dos troncos de cono, unidos por sus bases menores; las alturas son dis-

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_2^2 \;\therefore\; p_1 - p_2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\delta\,(v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2}\,\delta\left[\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1\right] v_1^2$$

y como $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{S_1}{S_2}$:

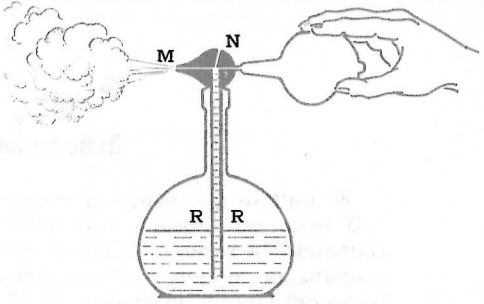
$$p_1 - p^2 = \tfrac{1}{2}\,\delta\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] v_1^2 \;\therefore\; v_1 = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\delta\,[(S_1/S_2)^2 - 1]}}$$

Si llamamos $k = \sqrt{\dfrac{2}{\delta\,[(S_1/S_2)^2 - 1]}}$

resulta: $v_1 = k\sqrt{(p_1 - p_2)}$.

tintas. Los tubos verticales T_1 y T_2 desembocan en S_1 y S_2; sus otros extremos están sumergidos en un líquido. Cuando el fluido pasa por S_2, su velocidad es mayor que en S_1, de modo que como la presión estática disminuye, el líquido sube por T, hasta alcanzar un desnivel h. Como las presiones hidrodinámicas en S_1 y S_2 son iguales:

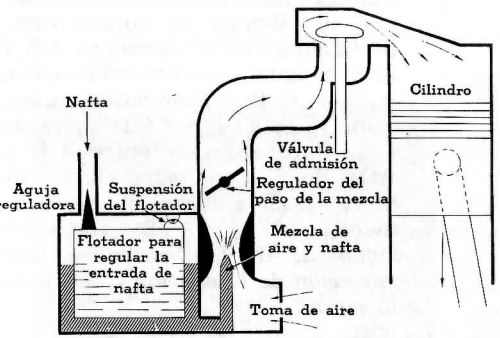
Se calibra el tubo, y se dispone así de un velocímetro de fluidos; se lo emplea en los aviones, pues al medir la velocidad del aire mide la del avión.



La ley fundamental de la hidrodinámica: el teorema de Bernouilli

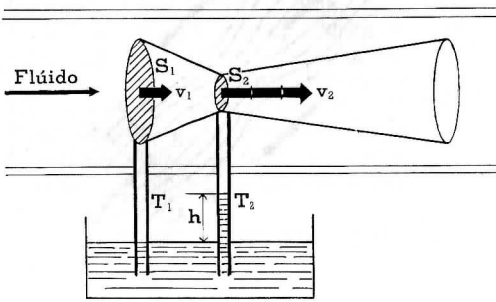
Recordemos el enunciado de la ley fundamental de la hidrostática: la diferencia de presión entre dos puntos de un fluido en reposo, separados por un desnivel h, es igual al producto del peso específico del fluido por el desnivel h. ¿Ocurrirá lo mismo cuando el fluido está en movimiento? Bernouilli, famoso físico y matemático francés, demostró que sí, pero considerando en lugar de las presiones estáticas las presiones hidrodinámicas. La ley, que se conoce con el nombre de *teorema de Bernouilli*, fue enunciada así:

> La diferencia de presión hidrodinámica entre dos puntos de un fluido en movimiento estacionario, separados por un desnivel h, es igual al producto del peso específico por el desnivel h.



Carburador de un automóvil: funciona como los vaporizadores. El regulador está conectado directamente al acelerador.

Tubo de Venturi para avión. Mide la velocidad del avión. (Cortesía de Sperry Gyroscope Co.)



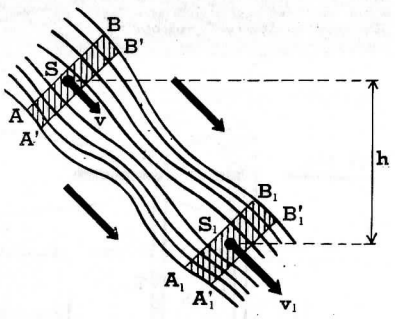
Demostración

El líquido que ocupa la sección A B está, un lapso t más tarde, ocupando la sección A' B'; el que ocupaba la sección $A_1 B_1$ ocupará, luego del lapso t, la sección $A'_1 B'_1$. Como el movimiento es estacionario, el volumen de líquido comprendido entre las secciones A B y A' B' es igual al comprendido entre $A_1 B_1$ y $A'_1 B'_1$. Todo sucede, pues, como si en el lapso t la masa de agua comprendida entre A B y A' B', donde tiene velocidad v, hubiera pasado a ocupar el comprendido por $A_1 B_1$ y $A'_1 B'_1$, con velocidad v_1. Ha habido, pues, una variación de la energía cinética de la masa

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_1^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, v^2.$$

Pero esa variación de energía es igual al trabajo realizado por las fuerzas exteriores. Éstas son: el peso P de la masa m; el producto de la presión hidrostática en A B, por esa sección $(p \cdot S)$, y la de $A_1 B_1$ por esta sección $(p_1 \cdot S_1)$. Sus trabajos son:

$P\,h$; $p \cdot S \cdot A\,A'$; $-p_1 S_1 A_1 A'_1$ (signo negativo, pues el trabajo es en contra de la fuerza). Luego:



$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_1^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 = P\,h + p\,S \cdot A\,A' - p_1 S_1 \cdot A_1 A'_1.$$

Pero

$m = V\delta$, y $S \cdot A\,A' = S_1 \cdot A_1 A'_1 = V$; por lo tanto;

$$\tfrac{1}{2}\, V\delta\, v_1^2 - \tfrac{1}{2}\, V\delta\, v^2 = V\varrho\, h + p\,V - p_1\,V.$$

o sea, simplificando V:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\, v_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\delta\, v^2 = \varrho h + p - \varrho_1$$

$$(p_1 + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v_1^2) - (p + \tfrac{1}{2}\,\delta\, v^2) = \varrho h$$

$$P_1 - P = h\,\varrho$$

pues P_1 y P son las presiones hidrodinámicas en $A_1 B_1$ y A B, respectivamente.

Consecuencias

1) Si $h = 0$, resulta:

$$P_1 = P.$$

es decir, los puntos situados al mismo nivel tienen la misma presión hidrodinámica.

2) Si $v_1 = v = 0$, es decir, si el líquido está en reposo, resulta

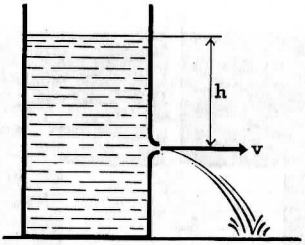
$$p_1 - p = h\,\varrho.$$

que es la ley fundamental de la hidrostática. El teorema de Bernouilli es más general que la ley fundamental de la hidrostática, pues la contiene como caso particular.

3) ¿Con qué velocidad sale un líquido por un orificio de un recipiente?

Este problema fue estudiado por primera vez por Torricelli, quien experimentalmente comprobó que la velocidad de salida del líquido es la misma que la que adquiriría un cuerpo si cayera libremente desde la superficie libre hasta el orificio, es decir,

$v = \sqrt{2gh}$. Demuéstrese esta fórmula aplicando el teorema de Bernouilli.



El agua sale con la velocidad que alcanzaría si cayera desde una altura **h**.

Viscosidad

Cuando un líquido se mueve por un tubo, el rozamiento de las diversas capas líquidas, entre sí y con las paredes del tubo, determina que no todos los puntos del líquido se muevan con la misma velocidad. Esta característica de los líquidos se denomina *viscosidad*. Un líquido es más perfecto, cuanto menos viscoso es. El agua puede considerarse casi como un líquido perfecto, mientras que la miel, de elevada viscosidad, dista mucho de serlo. La viscosidad de un líquido depende de varios factores, pero el que más influye es la *temperatura*: la viscosidad disminuye a medida que aumenta la temperatura. Es muy común calentar los frascos de miel para conseguir que ésta fluya con rapidez.

En los bordes de la navajita es visible el comportamiento de la superficie del agua, que como si fuera una membrana de goma, impide que la hoja se hunda, a pesar que su peso específico es mucho mayor que el del agua.

Tensión superficial y capilaridad

La validez de la hidrostática

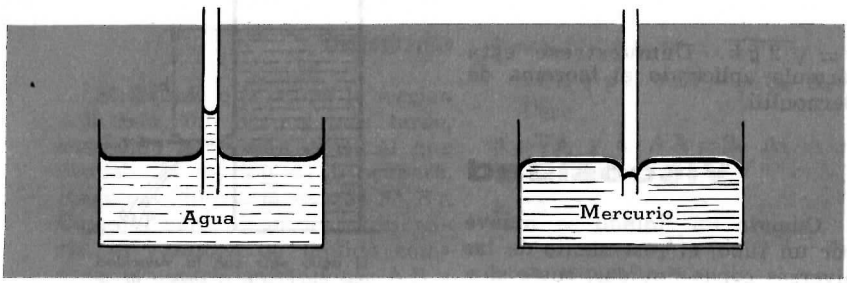
Las siguientes experiencias contradicen manifiestamente los principios y las leyes de la hidrostática:

1) Una hojita de afeitar, o una aguja de coser, pueden flotar sobre el agua si se las coloca con cierta precaución.

La condición para que un cuerpo flote es que su peso específico sea *menor* que el del líquido... y sin embargo, el del acero es mayor que el del agua.

2) Si en una cubeta que contiene agua se introduce un tubo delgado (se los llama *capilares*, que viene del latín "capillus", es decir, cabello), se observará que el agua *sube* por el tubo, pese a lo que afirma la ley de los vasos comunicantes.

Si la misma experiencia se re-



pite en una cubeta con mercurio en lugar de agua, se observará que en el tubo el nivel es ahora *menor* que en la cubeta...

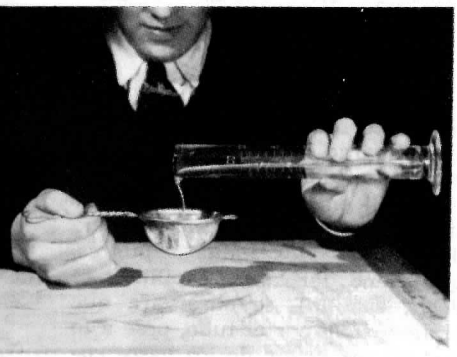
3) Pese a que los líquidos carecen de forma propia y se extienden al ser derramados, una gota de agua dejada caer sobre una superficie adopta una forma perfectamente definida. El mismo fenómeno puede observarse también con otros líquidos.

4) Una experiencia más sensacional consiste en transportar agua con un colador. Tómese un colador de té, parafínese el fondo –sin obturar los agujeros, por supuesto– y viértase agua con cierta precaución. Se observará que el agua no cae, pese a los agujeros.

Este conjunto de experiencias desmiente todas las conclusiones de la hidrostática; pero en su oportunidad hemos citado muchas otras experiencias, igualmente válidas, que las confirman.

En esta encrucijada sólo hay una salida: admitir que las leyes de la hidrostática no valen para pequeñas porciones de líquido, ni en los tubos de pequeño diámetro, y que en la superficie ocurren fenómenos para los cuales son válidas otras leyes.

El colador está engrasado, pero sus agujeritos están libres, como puede verse por el humo del cigarrillo que lo atraviesa sin dificultad.

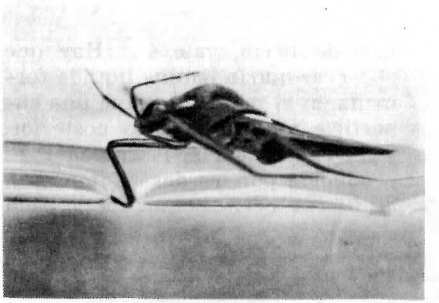


A pesar de que los agujeritos están abiertos, el agua no pasa por el colador.

La "membrana" superficial

Si al efectuar la experiencia de colocar la hojita de afeitar observamos cuidadosamente la superficie del agua (conviene hacerlo a contraluz), veremos que en los bordes no se mantiene horizontal; presenta el mismo aspecto que un globo de goma inflado cuando lo apretamos con los dedos: ligeramente hundido en los bordes.

Todo parece indicar que la superficie del agua se comporta en estos casos como si fuera una membrana elástica tensa. Así, por ejemplo, la hojita se hunde si su cara superior se moja, como si la "membrana" se hubiese roto. Los insectos que caminan sobre el agua parece que en realidad se apoyaran sobre una membrana tendida.



Cómo aprovechan los insectos la tensión superficial para poder caminar sobre el agua. (Tomado de Science Illustrated.)

Tensión superficial

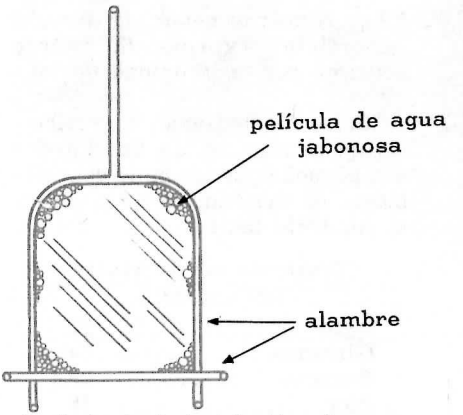
Una manera sencilla de probar que en la superficie de los líquidos hay una fuerza, consiste en formar una lámina líquida (por ejemplo, con agua jabonosa) en un marquito de alambre, uno de cuyos lados pueda moverse libremente. Se observará que el lado móvil se mueve hacia el borde opuesto, llevado por la membrana, que al mismo tiempo se contrae.

Esta experiencia nos sugiere una forma de medir esa fuerza: colgar pesitas del lado móvil.

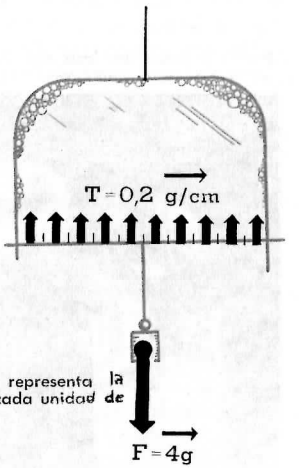
DEFINICIÓN: *Se llama tensión superficial al cociente entre la fuerza y la longitud en que actúa:*

$$T = \frac{f}{l}.$$

EJEMPLO: Supongamos que la fuerza F que hace subir el alambrecito, cuya longitud supondre-



El alambrecito horizontal está suelto, pero la tensión superficial de la película jabonosa le impide caer, equilibrando su peso.



La tensión representa la fuerza por cada unidad de longitud.

mos de 10 cm, vale $4\,\vec{g}$. Hay que observar que la lámina líquida formada en el marquito tiene una superficie anterior y otra posterior, y en consecuencia, la fuerza F es producida por las dos. Entonces *f*, la fuerza correspondiente a cada superficie, vale $2\,\vec{g}$, por lo cual

$$T = \frac{2\,\vec{g}}{10\text{ cm}} = 0{,}2\,\frac{\vec{g}}{\text{cm}}.$$

Es decir: por cada centímetro de longitud actúa una fuerza de $0{,}2\,\vec{g}$. Numéricamente, la tensión superficial expresa la fuerza actuante por cada unidad de longitud.

Como las tensiones superficiales de la mayoría de los líquidos son pequeñas, se las mide generalmente en dyn/cm, como lo indica la siguiente tabla:

TENSIONES SUPERFICIALES
(en dyn/cm)

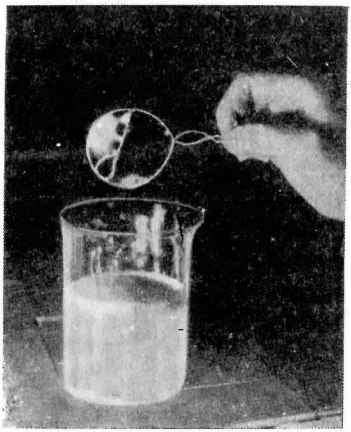
Agua	75
Glicerina	65
Benceno	29,4
Éter	16
Cloroformo	26
Alcohol	22
Mercurio	436

Propiedades de la tensión superficial

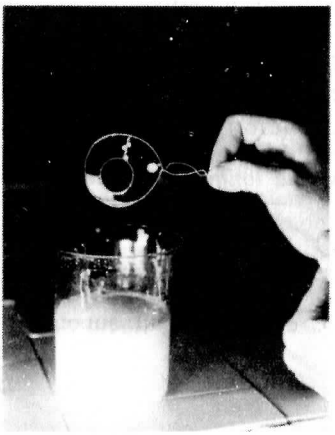
a) Tiene el mismo valor en todas direcciones: Se comprueba con una experiencia de muy sencilla realización. Con alambre delgado, se hace un aro de unos 5 cm de diámetro, dejando un manguito para tomarlo. Se hace un lacito con un hilo de seda, y se lo cuelga del aro. El conjunto se sumerge en agua jabonosa. Al retirarlo, dentro del aro se ha formado una película, y en ella se encuentra el lacito de seda. Con una aguja se pincha dentro del lazo, para romper la película jabonosa: al lograrlo se observa que el lazo es "tironeado" igualmente de todos lados, tomando una forma *circular*. Si la tensión superficial se ejerciera con mayor intensidad en una dirección determinada, el lazo se alargaría en esa dirección.

b) No depende del espesor y extensión de la membrana. Para comprobarlo basta llevar el alambrecito a una posición más inferior; se observará que las mismas pesitas bastan para mantenerlo en equilibrio, aunque ha aumen-

Dentro y fuera del lazo hay líquido; las tensiones se equilibran.



Sólo hay líquido afuera del lazo; la tensión exterior lo pone "tirante", dándole forma de circunferencia.

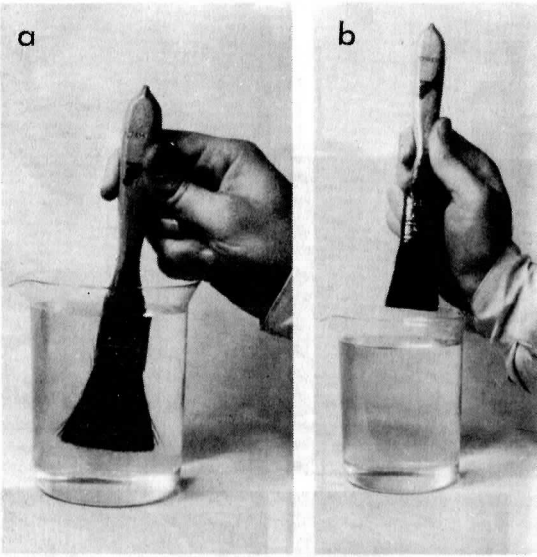


tado la superficie y disminuido el espesor.

Aquí se presenta una acentuada diferencia entre una membrana elástica y la "membrana" superficial, lo que prueba que la analogía no debe extremarse demasiado: si se quiere estirar una membrana elástica, se requiere una fuerza mayor a medida que aumenta la tensión de la misma.

c) Varía con la temperatura y la superficie de contacto. En todos los líquidos se comprueba que la tensión superficial disminuye a medida que aumenta la temperatura, hasta que se anula a una determinada temperatura. Así, para el agua, la tensión superficial es nula a los 374° C.

También influye mucho en el valor de la tensión superficial el medio que está en contacto con la superficie. Así, por ejemplo, para el agua en contacto con aire (cuadro anterior), la tensión superficial vale 75 dyn/cm; en contacto con mercurio, su valor aumenta a 421 dyn/cm, y con aceite de oliva disminuye a 21 dyn/cm.

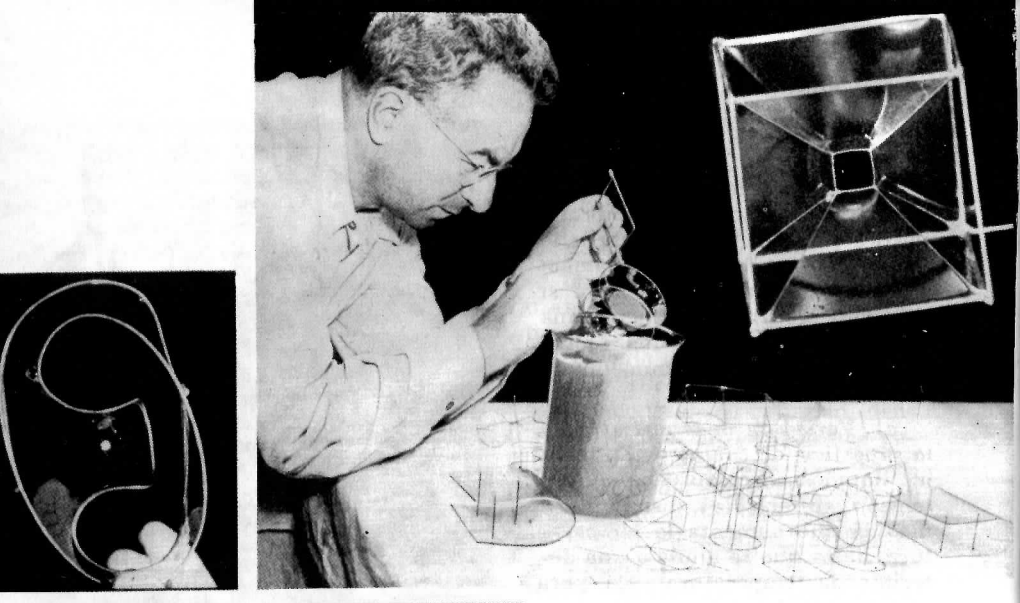


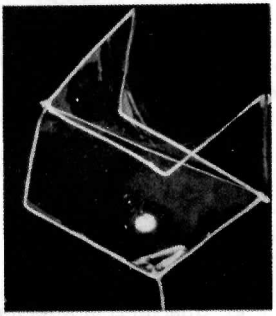
a) Dentro del agua, las cerdas del pincel se mantienen separadas entre sí como cuando está seco; b) cuando el pincel está en el aire, pero mojado, las cerdas se atraen entre sí por la tensión superficial.

Características de las láminas líquidas

Como una consecuencia inmediata de la tensión superficial, las láminas líquidas tienden a disminuir su superficie libre. Ya hemos visto una prueba de esta afirmación en el caso del marquito de alambre con un lado móvil. También en la experiencia del lacito de seda la superficie líquida se hace mínima, ya que el lacito adopta forma circular, y es sabido que, a igualdad de perímetro, la figura de área máxima es el círculo. Si en una mezcla adecuada de agua y alcohol se sumerge una masa de aceite de la misma densidad, adopta una forma perfectamente esférica (recuérdese que, a igualdad de volumen, la esfera tiene menor superficie que cualquier otro cuerpo).

Si se sumerge un pincel en agua, se observará que los pelos de éste, cuando está sumergido, se separan, pero quedan unidos al retirarlo del agua. Las láminas líquidas que se forman entre pelo y pelo se contraen, disminuyendo su superficie. Lo mismo ocurre si usamos una pluma de ave, o si sumergimos nuestra cabeza en agua.





Las pompas de jabón son esféricas, porque para un volumen dado la esfera es el cuerpo geométrico que tiene la menor superficie posible. El doctor Courant, de la Universidad de Nueva York, ha estudiado estas cuestiones empleando para ello marquitos de alambre que sumerge en agua jabonosa. Al sacarlos, la tensión superficial se encarga de dar a la película jabonosa la menor superficie posible, cosa que es necesario conocer para resolver ciertos problemas matemáticos. (**Tomado de Science Illustrated.**)

Sumergiendo en soluciones jabonosas marquitos de diversas formas, se obtienen superficies muy curiosas y bellas, como muestran las fotografías.

Lo que ocurre con una gota de aceite

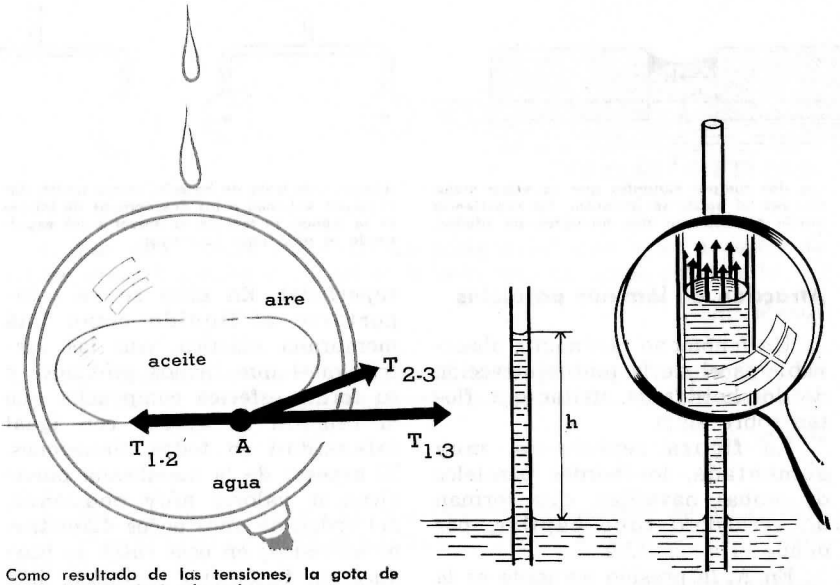
Cuando una gota de líquido cae sobre una superficie, puede ocurrir que se extienda completamente –como el aceite sobre el agua–, o que no lo haga –como el mercurio sobre el vidrio. Veamos cuáles son las condiciones que determinan una de las dos posibilidades. En la figura se observa que en el vértice A de la gota (que supondremos de aceite), hay tres tensiones en acción:

$T_{1\text{-}2}$: tensión del aceite en contacto con agua $= 18 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$.

$T_{1\text{-}3}$: tensión del agua en contacto con aire $= 75 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$.

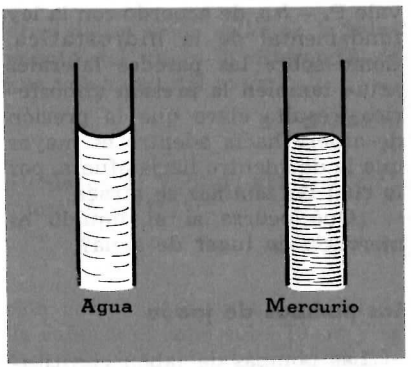
$T_{2\text{-}3}$: tensión del aceite en contacto con aire $= 32 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}$.

Para que el punto A quede en equilibrio, la resultante de las tres tensiones debe ser cero, en cuyo caso la gota no se extiende. Para determinar si ello ocurre, basta



Como resultado de las tensiones, la gota de aceite se extenderá sobre el agua.

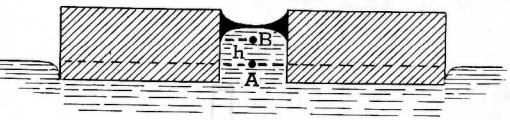
componer las tres tensiones siguiendo cualquiera de los métodos aprendidos. Por ejemplo, mediante el polígono de las fuerzas; si se cierra formando un triángulo, la resultante es nula. Pero si uno de los lados es mayor que la suma de los otros dos, como ocurre con los datos, el triángulo no se forma, por lo cual no hay equilibrio y la gota se extiende, formando una delgadísima capa, con llamativos colores.



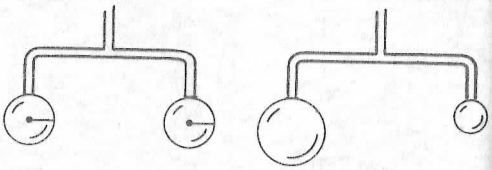
Capilaridad

El ascenso o descenso de líquidos por tubos capilares –violando la ley de los vasos comunicantes– es un fenómeno de fácil observación. Si se sumerge en café una punta de un terrón de azúcar, el líquido sube; en los calentadores de alcohol o querosene, el combustible llega a la llama por capilaridad; la acción del papel secante se explica por la misma causa. También la circulación de la savia por las plantas se debe en parte a la capilaridad.

En los capilares, la superficie libre del líquido no es un plano horizontal: el agua forma una superficie cóncava (llamada *menisco cóncavo*), mientras que el mercurio –que desciende por los tubos– forma un *menisco convexo*.



Los dos cuerpos flotantes que no están mojados por el agua, se juntarán. La experiencia puede hacerse con dos navajitas de afeitar.



Aunque uno trate de hacerlo, nunca podrá dar el mismo volumen a las dos pompas de jabón; en la menor, la tensión es mayor e irá expulsando el aire hacia la mayor.

Atracción de láminas paralelas

Un fenómeno fácilmente observable es el de la mutua atracción de dos hojitas de afeitar que flotan sobre agua.

La figura representa, muy aumentada, los bordes paralelos de ambas navajitas, que forman un verdadero tubo capilar, por donde el agua sube.

En A, la presión actuante es *la atmosférica*; pero en B es *menor*: vale $P_a - h\varrho$, de acuerdo con la ley fundamental de la hidrostática. Como sobre las paredes laterales actúa también la presión atmosférica, resulta claro que la presión de afuera hacia adentro es mayor que la de adentro hacia afuera, por lo cual las *láminas* se atraen.

¿Qué ocurre si el líquido es mercurio en lugar de agua?

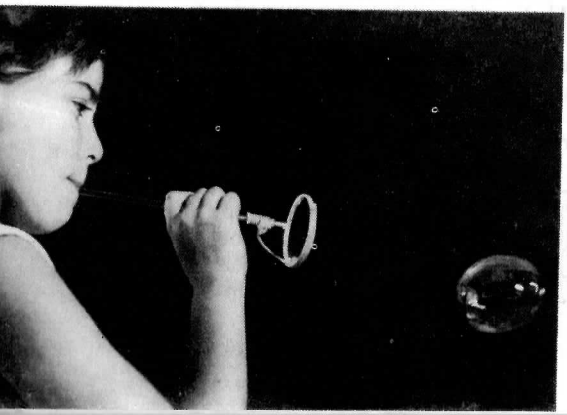
Las pompas de jabón

Las pompas de jabón constituyen un ejemplo de la tensión superficial. En ellas se ve comportarse al líquido como una membrana elástica, con las restricciones que hemos señalado, y su forma esférica comprueba que la tensión se ejerce con igual intensidad en todas direcciones. El espesor de la membrana puede alcanzar valores muy pequeños, del orden de unos pocos diámetros moleculares; en esos casos se produce un fenómeno luminoso, llamado *interferencia*, que hace que la pompa se vea coloreada.

Si se comunican dos pompas de distintos radios, por ejemplo, mediante un tubo, se observa que la menor va disminuyendo de volumen, a la vez que aumenta el de la mayor. Esto significa que la presión es mayor en la pompa menor. Se demuestra, en efecto, que la diferencia entre la presión exterior y la interior es:

$$\Delta P = 4\,T/R,$$

es decir, que en el interior de la pompa, la presión depende de la inversa de su radio.



Procure hacer pompas de jabón del mismo volumen. ¿Es eso posible?

Problemas

1. Por una canilla cuya sección mide 2 cm^2 sale agua a razón de 1 litro cada 10 segundos. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua?

R.: 50 cm/s

2. El agua es conducida hasta la canilla del problema anterior por un caño de 4 cm^2 de sección. ¿Con qué velocidad corre el agua por ese caño?

R.: 25 cm/s

3. Un manómetro indica en una cañería una presión de 0,2 $\vec{kg}/cm^2$, y la velocidad del agua es de 60 cm/s. ¿Cuánto vale la presión hidrodinámica?

R.: 0,218 $\vec{kg}/cm^2$

4. Las secciones de un tubo de Venturi de un avión están en la relación de 3 a 1, y en determinado momento del vuelo la diferencia de presiones es de 15 cm de Hg. ¿Cuál es la velocidad del avión?

R.: 227,5 km/h

5. ¿Cuál será la diferencia de presiones en el Venturi del problema anterior, si la razón de las secciones fuera de 2 : 1?

R.: 5,6 cm Hg

6. Por un caño de 60 cm^2 de sección corre agua con un caudal de 6 litros por segundo. En un trozo de la cañería el caño sube 10 cm y se estrecha hasta que la sección vale 20 cm^2. ¿Cuál es la presión hidrostática en esta sección, si en aquélla era de 0,2 $\vec{kg}/cm^2$?

R.: 146 200 dyn/cm^2

7. ¿Hasta qué altura asciende el agua pura en un capilar de vidrio limpio de 1 mm de radio?

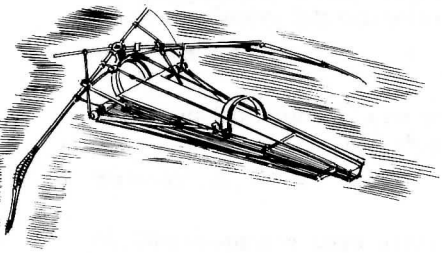
R.: 1,5 cm

8. ¿Hasta qué altura subiría el agua de la canilla en el mismo capilar si no estuviera especialmente limpio?

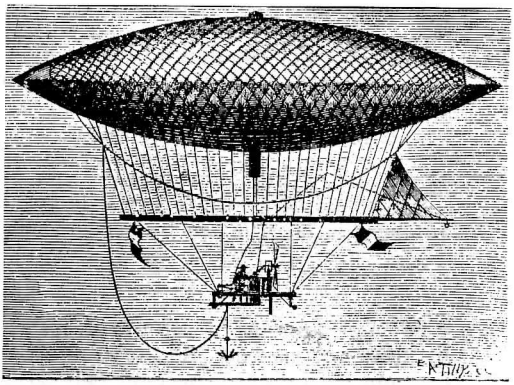
R.: 1,35 cm

a) Alegoría de Icaro.
b) Helicóptero de Leonardo de Vinci
c) Globo de Guzmán.
d) Avión de Wright.

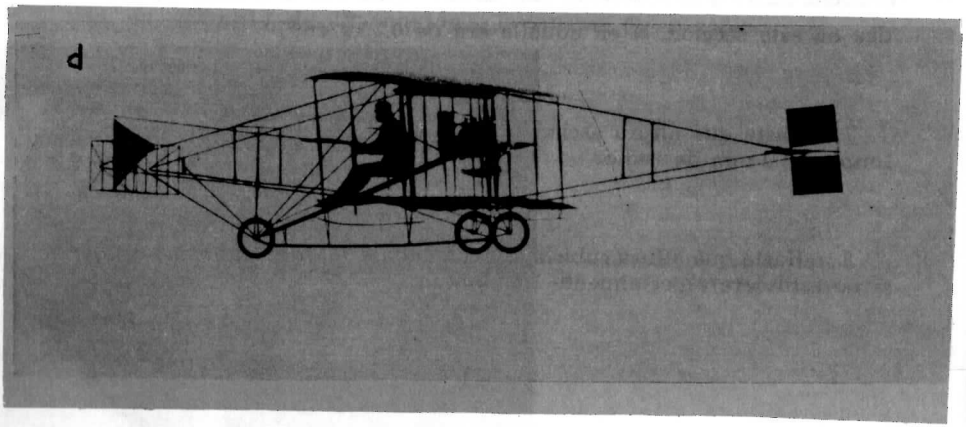
b



c



d

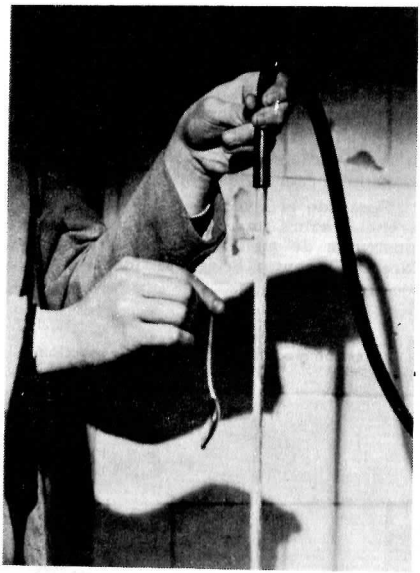


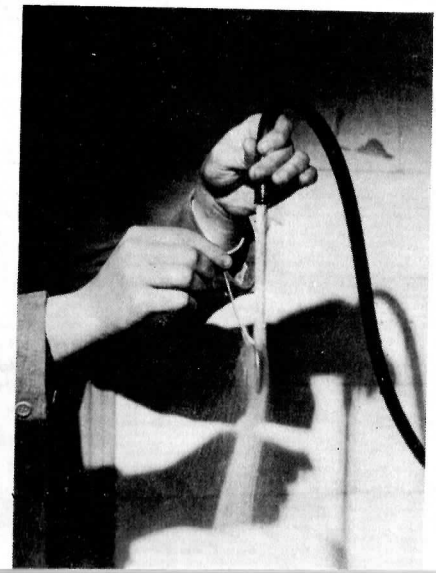
24 POR QUÉ VUELA UN AVIÓN

La conquista del espacio ha sido uno de los sueños más obsesionantes del hombre. Desde la antigüedad, el vuelo de los pájaros lo atrajo poderosamente, y mil veces trató de imitarlo. La leyenda vinculada con vuelos más antigua que se conoce es la de Dédalo e Icaro. Minos, rey fabulosamente rico de Creta, encargó a Dédalo la construcción de un laberinto para guardar al Minotauro. Al finalizar la obra, Dédalo fue encarcelado junto con su hijo Icaro. Para escapar, éstos construyeron alas con plumas de aves, y se las sujetaron al cuerpo con cera. Al poder volar, Icaro, entusiasmado, desoyó las advertencias de su padre y subió cada vez más, hasta que los rayos solares fundieron la cera, e Icaro murió ahogado al caer en el mar Egeo.

Fuera de la leyenda, hay algunas referencias sobre una "máquina de volar" construida de madera por Architas, de Tarento, inventor griego al que se atri-

Versión moderna de un avión de reacción.





buyen el tornillo y la polea (siglo IV a. de J. C.).

Durante la Edad Media no hubo trabajos importantes, salvo uno de Roger Bacon, en el que predijo la futura conquista del aire por aparatos con motor. Es digno de mencionar Oliver de Malmesbury, del siglo XI, por el entusiasmo y la fe que puso en sus trabajos, pues intentando volar a la manera de Dédalo, concluyó como Ícaro.

Durante el Renacimiento, en 1505, aparece el estudio *Sobre el vuelo de los pájaros*, de Leonardo de Vinci, primer tratado científico sobre el problema del vuelo.

Por fin, en 1783, los hermanos Montgolfier logran volar en su famoso aeróstato de aire caliente. ¡El hombre había logrado volar! Pero aun así, se trataba de un triunfo a medias, pues el vuelo se había realizado con un aparato elevado por un gas menos denso que el aire. No se había conseguido igualar a los pájaros, que son más pesados que el aire...

En 1809, Cayley, inglés, publicó un tratado completo sobre el vuelo con motor, y construyó un aeroplano, que no pudo volar porque, como aun no se conocía el motor de explosión, lo había dotado de una máquina de vapor, que resultaba excesivamente pesada. Pero el proceso continuaba irresistiblemente, y el histórico acontecimiento se produjo el 17 de diciembre de 1903 en Kitty Hawk, Carolina del Norte, Estados Unidos: Wilbur Wright consiguió volar 260 metros en 50 segundos, en una máquina construida por él y su hermano Orville. No nos detendremos para señalar los progresos de la aviación desde aquella fecha, pero sí mencionaremos un hecho que significó una revolución en el vuelo con motor: en 1930, un capitán de la aviación británica, Frank Whittle, patentó un motor de reacción para ser empleado en aviones. En aquella época, el Ministerio del Aire británico consideró que las dificultades prácticas eran excesivas, y desechó el proyecto. Pero el inventor prosiguió pacientemente sus estudios y ensayos. Cuando estalló la guerra en 1939, había llegado a un punto avanzado, y consiguió el apoyo oficial. En 1941 pudo ser probado con buen éxito el primero de los aviones de reacción.

El chorro de agua golpea la cucharita... ¡y sin embargo la atrae! Esto enseña por qué vuela un avión.

Por qué un avión puede ascender

El principio de Arquímedes explica por qué puede ascender un aeróstato o cualquier cuerpo de peso específico menor que el del aire. ¿Cómo explicar el vuelo de un cuerpo de mayor peso específico que el del aire? La respuesta la obtenemos en la anterior fotografía: si se sopla fuertemente por encima de la hoja, se observará que ésta sube. Evidentemente, la corriente de aire ha producido una fuerza hacia arriba mayor que el peso de la hoja. El teorema de Bernouilli explica el origen de esta fuerza, llamada en aerodinámica *fuerza sustentadora*. La velocidad del aire es mayor en la cara superior que en la inferior; como en ambas la presión hidrodinámica tiene el mismo valor, la presión estática es mayor abajo, y la hojita sube.

El mismo resultado se obtiene si se procede a la inversa: en lugar de hacer circular el aire, movemos la hoja de papel a través del aire. Y ésa es la idea del avión: los motores le imprimen la velocidad necesaria, y la forma de las alas es tal, que la velocidad del aire es mayor en la cara superior que en la inferior.

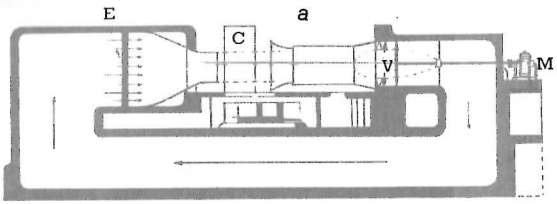
Los espectros aerodinámicos

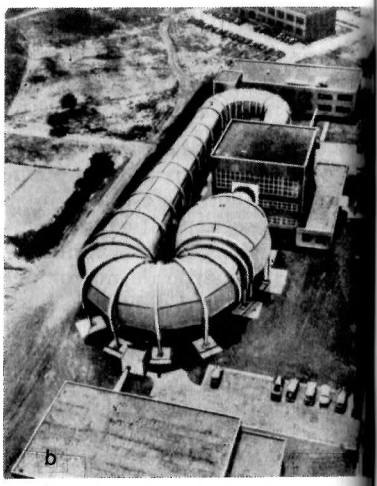
Uno de los problemas más importantes es determinar la forma de ala más conveniente para que la fuerza sustentadora sea máxima y la resistencia al avance mínima. Esa determinación se hace prácticamente en los túneles aerodinámicos, que, en esencia, consisten en un tubo en el cual un extractor

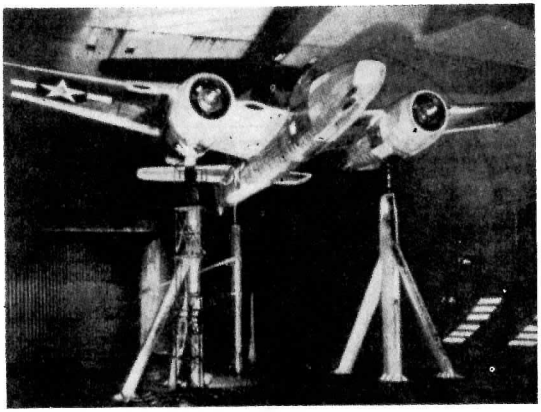
Espectro aerodinámico de un ala.

produce una corriente de aire que actúa sobre el modelo en estudio. En la figura de la pág. 332, V es el extractor que, movido por el motor M, produce la corriente de aire en el sentido de la flecha; E es un enrejado en forma de panal de abejas, cuyo objeto es producir una corriente de aire uniforme, eliminando los torbellinos; C es la cámara de experimentación, donde se coloca el modelo. El comportamiento del modelo se determina haciendo visible la forma de la corriente al incidir sobre él, mediante humo introducido en el túnel, o bien por procedimientos fotográficos especiales. El conjunto de las líneas de corriente constituye el *espectro aerodinámico* del cuerpo en estudio.

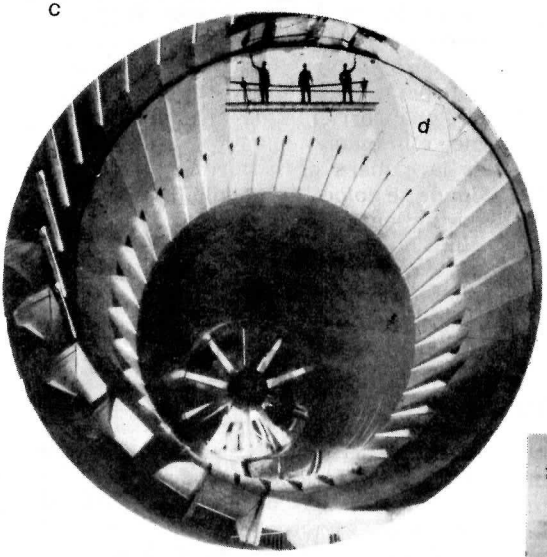
En general, los espectros presentan dos formas, que dependen de la forma del cuerpo y su velocidad: *espectro turbulento*, cuando se observa la presencia de torbellinos, y *laminar*, en caso contrario. El perfil comúnmente llamado *aerodinámico* tiene un espectro laminar.

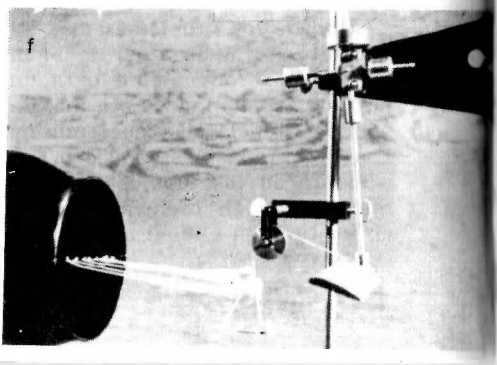






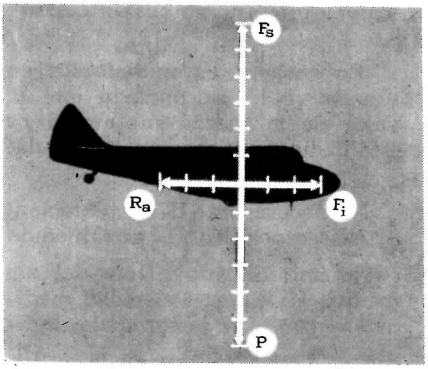
c





a) Corte de un túnel de viento.
b) Vista de un túnel de viento.
c) Avión probándose dentro de un túnel.
d) Interior del túnel.
e) Rejilla de un túnel de viento.
f) Probando un ala en la balanza aerodinámica.

Las fuerzas que actúan en el vuelo de un avión



Son las siguientes:

1) Peso del avión;
2) Fuerza sustentadora;
3) Resistencia al avance;
4) Fuerza impulsora.

Fuerza sustentadora

Origen

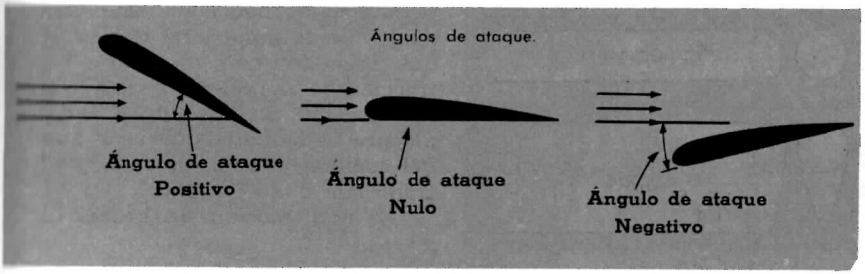
La fuerza sustentadora es provocada por la depresión que experimenta el aire en la parte superior del ala, y la compresión en la cara inferior. La experiencia enseña que 2/3 de la fuerza sustentadora se deben a la depresión, y 1/3 a la compresión. Lo contrario de lo que ocurre con los barriletes, donde la fuerza sustentadora se debe casi exclusivamente a la compresión inferior.

Para tener una idea de la magnitud que puede tener la fuerza sustentadora, supongamos que la presión en la cara inferior sea igual a la atmosférica (1 $\vec{kg}/cm^2$) y que en la superior sea inferior en sólo 1 %. La sobrepresión será de 0,1 $\vec{kg}/cm^2$, lo que significa una fuerza sustentadora de 1 000 $\vec{kg}$ por cada m^2 de superficie del ala.

El perfil más favorable

En los túneles aerodinámicos se ensaya la obtención de perfiles que muestren la máxima diferencia entre la velocidad del aire en la cara superior y en la inferior, y la práctica ha demostrado que la forma más adecuada es la de las alas: convexa en la parte superior y redondeada por delante.

La distribución de presiones depende de la forma, de la velocidad y del ángulo de ataque, que es el ángulo que forma la dirección del movimiento con la recta tangente al borde inferior del ala.



Valor de la fuerza sustentadora

En ensayos experimentales en túneles se ha encontrado que el valor de la fuerza sustentadora está dado por la siguiente fórmula:

$$F_s = C_s \varrho S v^2$$

(C_s: coeficiente de sustentación; ϱ: peso específico del aire medido en kg/m^3; S: superficie del ala medida en m^2; v: velocidad medida en m/s). Con las unidades indicadas, F_s resulta expresada en kg.

Resistencia al avance

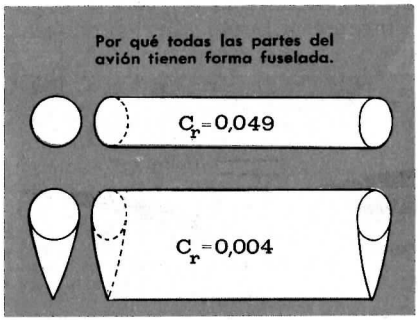
Origen

El avión debe vencer una resistencia al avance provocada por tres diferentes factores:

1) *Resistencia de viscosidad o de rozamiento*, debida al rozamiento con el aire. Para disminuirla en lo posible, se pule la superficie del avión, y especialmente la de las alas.

2) *Resistencia de perfil.* El mejor perfil es el que tiene espectro laminar, pero con todos se observan pequeños torbellinos, que producen un cierto frenamiento.

3) *Resistencia inducida.* Es el factor más importante de los tres. Su existencia es inevitable, pues está originada por la fuerza sustentadora: el aire que pasa por encima del ala tiene mayor velocidad que el que pasa por debajo, y por eso tiene éste mayor presión. Al llegar al borde posterior del ala, el aire que pasó por debajo del ala sube, y al encontrarse con el de arriba forma torbellinos que se oponen al avance.



Valor de la resistencia

La siguiente fórmula se obtuvo en los túneles de ensayo:

$$R_a = C_r \varrho S v^2$$

(C_r: coeficiente de resistencia al avance; ϱ: peso específico del aire en kg/m^3; S: superficie del ala en m^2; v: velocidad en m/s). Empleando estas unidades, resulta R_a en kg. La fórmula es análoga a la de la fuerza sustentadora, pero ambas son válidas sólo para velocidades inferiores a unos 750 km/h. Para velocidades superiores se han obtenido otras fórmulas, mucho más complicadas.

Fuerza impulsora

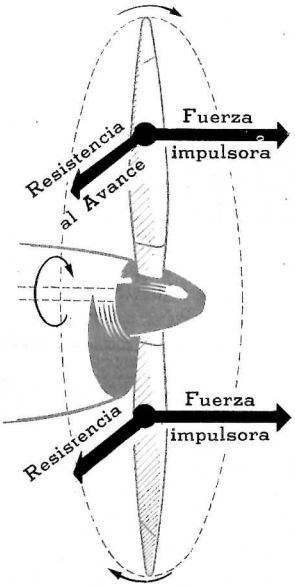
Debido a su perfil, semejante al de un ala, en la hélice en movimiento aparece una fuerza, del mismo origen que la sustentadora, pero dirigida hacia adelante, llamada fuerza impulsora, que es la que hace avanzar al avión. La tracción de la hélice aumenta con la velocidad, pero cuando el avión alcanza velocidades próximas a la del sonido, la hélice sirve más de freno que de impulsora.

La construcción de hélices es

un problema muy delicado, pues éstas deben soportar enormes fuerzas centrífugas y han de tener sus paletas exactamente equilibradas, con el fin de no someter al eje a esfuerzos perjudiciales.

El vuelo supersónico

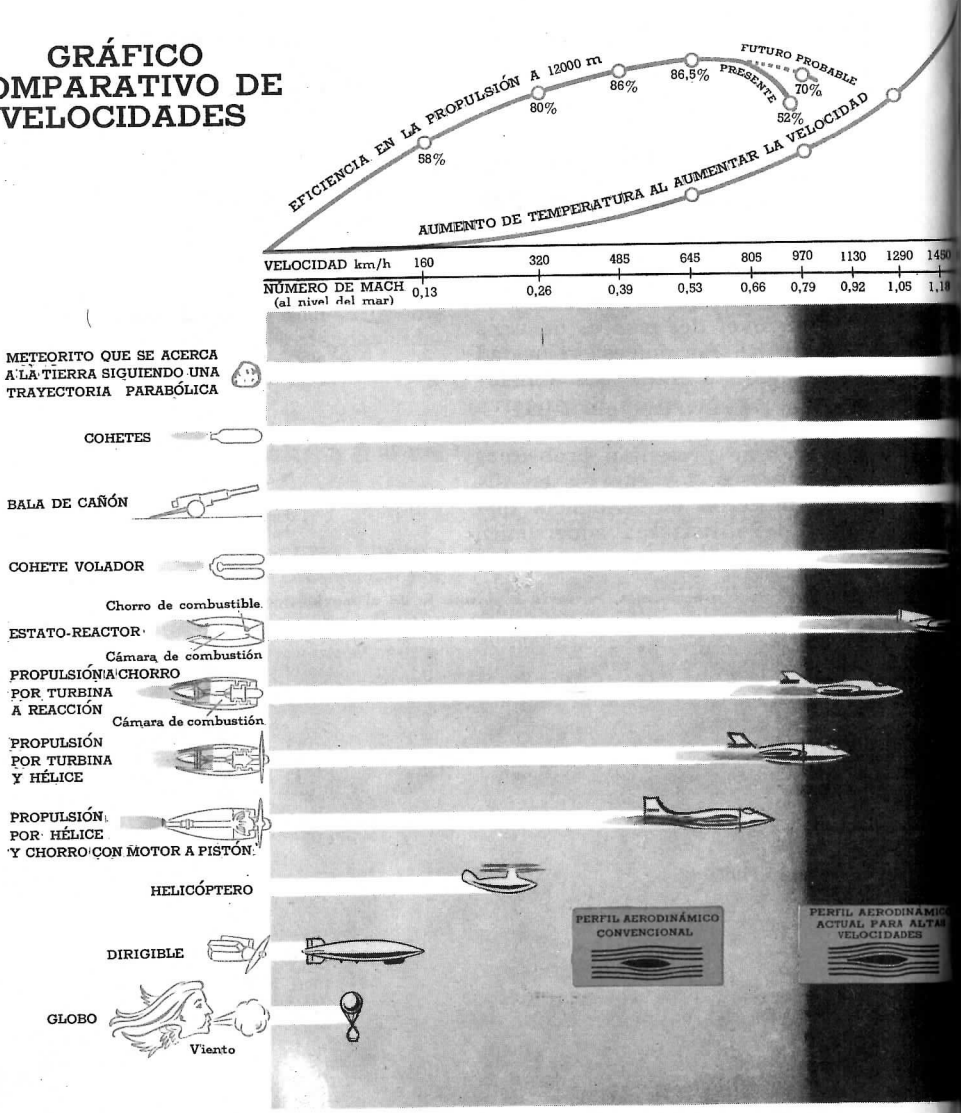
Una conquista de la aeronáutica actual es la construcción de aviones supersónicos. La velocidad del sonido al nivel del mar es de unos 1 200 km/h. ¿Por qué esa velocidad constituyó un límite tan anhelado? La experiencia demuestra que cuando un cuerpo pasa los 900 km/h se presentan problemas muy curiosos; los ensayos en túneles pusieron en evidencia que en la aerodinámica supersónica las leyes y fórmulas empleadas



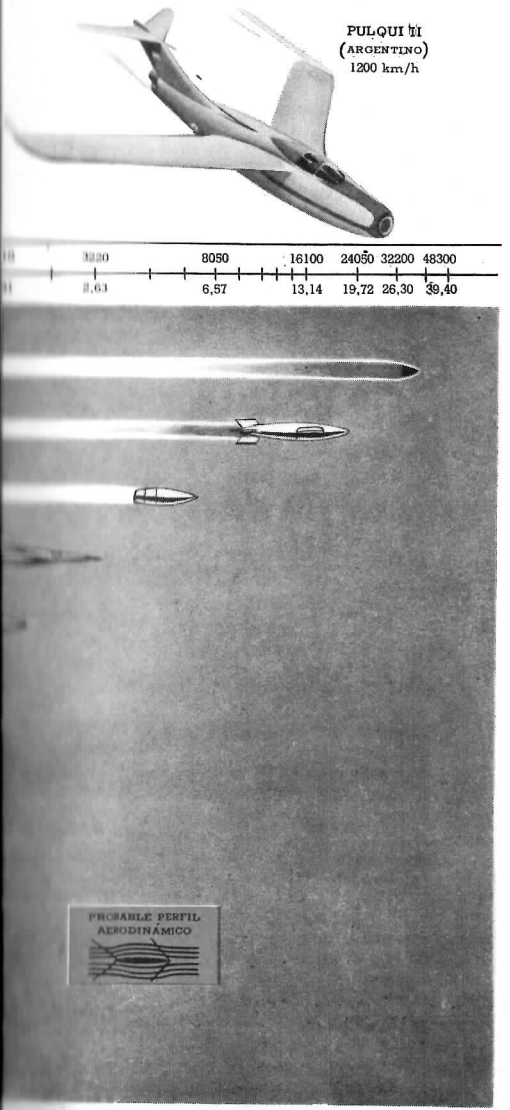
Fuerzas que actúan sobre la hélice.

En los aviones convencionales, la fuerza impulsora la da el movimiento de la hélice.

GRÁFICO COMPARATIVO DE VELOCIDADES



con anterioridad no son válidas. Actualmente hay dos aerodinámicas: la clásica, cuyos resultados son válidos para aviones que no superen los 750 - 800 km/h, y la que estudia los problemas que se crean en vuelos a velocidades superiores a los 800 km/h.



El número de Mach

Es el cociente entre la velocidad del móvil y la del sonido. Por ejemplo, un avión que, al nivel del mar, vuele a 600 km/h, tiene un número de Mach:

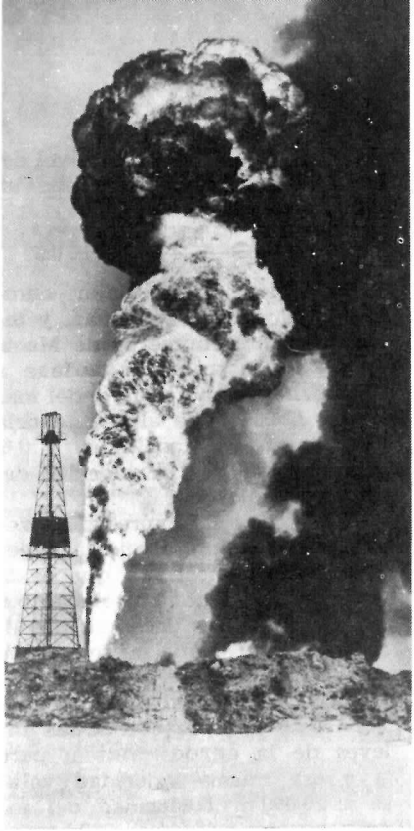
$$M = \frac{v}{v_s} = \frac{600 \text{ km/h}}{1\,200 \text{ km/h}} = 0{,}5.$$

Un avión puede viajar siempre a una misma velocidad, y tener diferentes números de Mach. Si el avión anterior volase a 600 km/h, pero no al nivel del mar sino a 11 000 m de altura, tendría un número de Mach igual a 0,6, pues a esa altura la velocidad del sonido es sólo de 1 000 km/h.

Esta forma de expresar las velocidades se debe a que la experiencia ha demostrado que es la velocidad del avión con respecto a la del sonido (es decir, su número de Mach) lo que influye en su comportamiento. Un avión que vuela a 600 km/h al nivel del mar ($M = 0{,}5$) cumple con todas las leyes de la aerodinámica; pero si a esa misma velocidad volase a 20 000 m (velocidad del sonido, aproximadamente 900 km/h) ($M = 0{,}65$), su comportamiento se apartaría completamente de esas leyes.

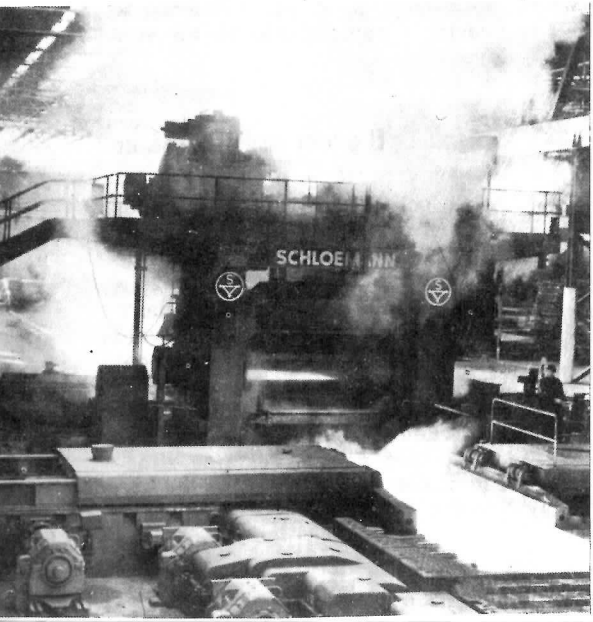
El primer vuelo supersónico

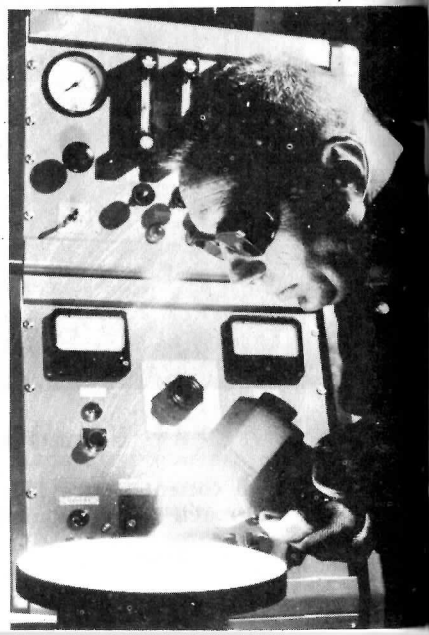
En octubre de 1947, en Estados Unidos, un avión X-1 de la Bell Aircraft Company, lanzado desde una superfortaleza volante B-29 a 19 000 m de altura, se elevó hasta cerca de los 21 000 m, donde voló a una velocidad mayor que la del sonido a esa altura. Desde entonces, distintos tipos de aviones realizan vuelos supersónicos, y ya se construyen aeronaves que superan varias veces la velocidad del sonido.



VII

EL CALOR





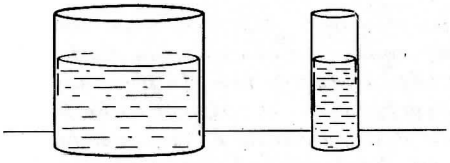
¿Qué es el calor? ¿Qué es la temperatura? Anticipemos que son dos conceptos distintos, aunque suele confundírselos en la vida diaria. Las aplicaciones del estudio de esta parte de la física son innumerables y de lo más diversas, desde el termómetro hasta las más potentes turbinas, desde el cálculo de la dilatación de un cuerpo hasta las familiares ollas a presión. No es arriesgado decir que el estudio sistemático y fructífero de todos los problemas referentes al calor comenzó en el siglo pasado; y que con él se vinculan los nombres de Joule, Sadi Carnot y otros. Pronto la teoría que consideraba al calor como un fluido imponderable, y que en su época dio buenos resultados, se mostró insuficiente, y fue reemplazada por la teoría cinética, que, a grandes rasgos, puede condensarse diciendo que establece que el calor de un cuerpo se debe al movimiento de sus moléculas. Esta teoría explica satisfactoriamente todo lo que conocemos sobre el calor, desde la dilatación de los cuerpos hasta sus cambios de estado (sólido, líquido, gaseoso), lo mismo que las distintas formas en que el calor se transmite de un cuerpo a otro.

Los últimos capítulos de esta parte de nuestro libro se refieren al comportamiento de las máquinas de vapor, y conducen al establecimiento de los principios fundamentales de la termodinámica: el calor se puede transformar en trabajo, pero toda máquina que se utilice para la transformación no puede, por perfecta que sea, aprovechar el 100 % de la energía.

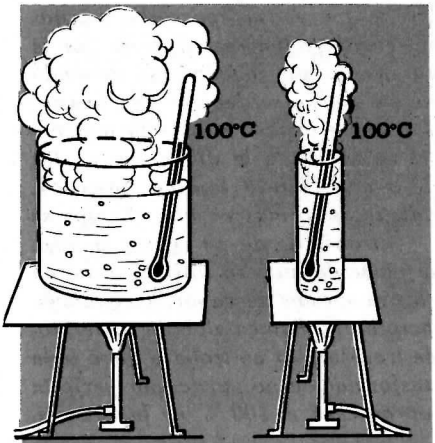
25 TERMOMETRÍA

Temperatura

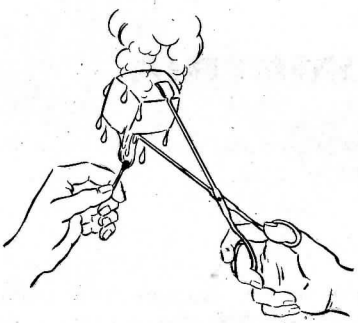
En la vida diaria usamos muy a menudo dos palabras cuyo significado suele confundirse: *calor* y *temperatura*. Aunque íntimamente ligados, son dos conceptos diferentes. ¿Cuál es la diferencia?



El nivel es el mismo, pero tienen distintas cantidades de agua.



La temperatura es la misma, pero tienen distintas cantidades de calor.



Alta temperatura y poca cantidad de calor.

Para explicarla hagamos la siguiente comparación: si en un recipiente echamos agua, ésta alcanzará un cierto nivel. Si se echa más agua, el nivel sube, pero nadie confundirá la *cantidad* de agua con el *nivel* del agua. Una diferencia semejante hay entre *cantidad de calor* y *temperatura* o "nivel calórico". Al calentar agua en un recipiente, se le entrega una cierta *cantidad de calor*, y la *temperatura*, o "nivel" del calor, sube, como sube el nivel del agua cuando se echa más en el recipiente.

Más todavía: dos cuerpos pueden tener la *misma temperatura* y *distintas cantidades de calor*. Es algo análogo a dos recipientes en los que el agua alcanza el mismo nivel, mientras que en uno de ellos hay más agua que en el otro.

Si hacemos hervir agua en los dos recipientes de la izquierda, la temperatura alcanzada es la misma para los dos, 100° C, pero el que tiene más agua tiene mayor cantidad de calor.

Otro ejemplo: la llama de un fósforo no alcanza a fundir completamente el trocito de hielo indicado en la figura, a pesar de que la temperatura de la llama es de unos 700° C; en cambio, en un recipiente con agua a unos 50° C, el trocito se funde rápidamente. La llama del fósforo tiene alta temperatura, pero poca cantidad de calor. El agua contenida en el recipiente tiene baja temperatura, pero más cantidad de calor.

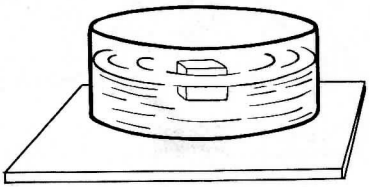
Efectos del calor

Cuando se entrega calor a un cuerpo, su temperatura aumenta, pero experimenta además otra mo-

dificación importante: aumenta de volumen, se dilata.

Todos los cuerpos, sólidos, líquidos o gaseosos, se dilatan cuando se les entrega calor.

Esta propiedad se aprovecha, entre otras cosas, para construir *termómetros*, cuyo objeto es determinar qué temperatura ha alcanzado un cuerpo.



Temperatura más baja, pero mayor cantidad de calor.

La piel, nuestro primer termómetro

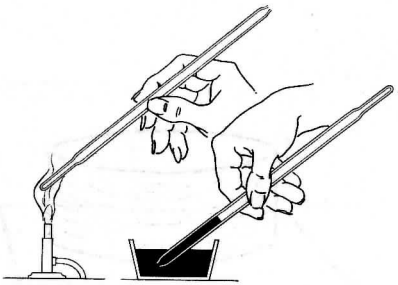
Estamos tan familiarizados con los termómetros (*termos*: temperatura; *metro*; medida), que puede parecer obvia la siguiente pregunta: ¿Por qué hubo que inventar los termómetros?

Nuestras primeras "mediciones" de temperaturas las hacemos mediante el sentido del tacto. Desde chicos sabemos diferenciar entre cuerpos calientes, tibios o fríos. La piel es, pues, nuestro primer termómetro.

Pero ese "termómetro" no sólo tiene el inconveniente de no poder diferenciar temperaturas pequeñas, sino que a veces nos da informes erróneos. Basta hacer la siguiente prueba: tres recipientes contienen agua a tres temperaturas diferentes (fría, tibia y caliente, de izquierda a derecha). Introducimos una mano en cada uno de los recipientes extremos, y luego las dos juntas en el del medio: la mano izquierda "dirá" que el agua está caliente, y la derecha, que está fría.

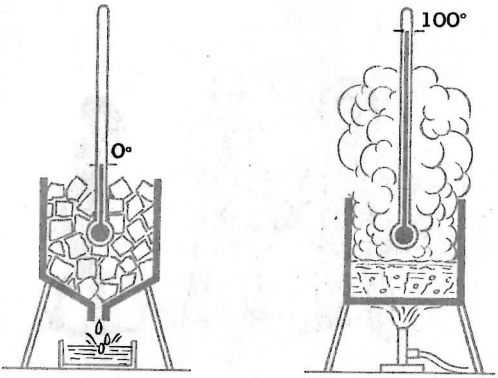
La piel no es un buen termómetro: en un día primaveral, e esquimal siente calor y el africano, frío. La temperatura es, sin embargo, la misma. La figura de abajo muestra cómo se conformaron ambos.

Termómetro de mercurio



Introducción del mercurio en el tubo capilar. (En la figura, el tubo se representa muy grueso para que sea visible.)

Se toma un tubo de sección muy fina (tubo capilar), con una ampolla cerrada, el *bulbo*, en un extremo y con una abertura en el otro. Se calientan las dos extremidades, y luego se introduce la extremidad abierta en una cubeta con mercurio. Éste penetra en el tubo y luego, mediante suaves golpecitos, se lo hace llegar hasta el bulbo. Repitiendo la operación se consigue llenar el bulbo y el tubo. Se procede luego a cerrar el tubo con una llama, después de haber hecho hervir el mercurio, para eliminar cualquier partícula de aire.

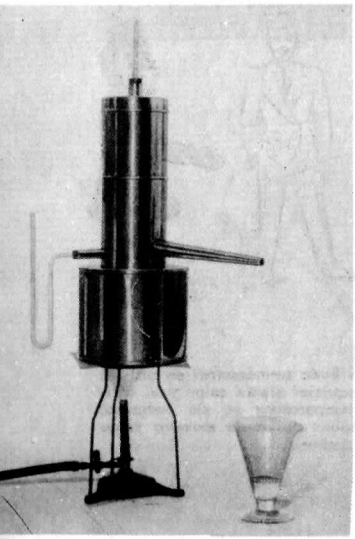


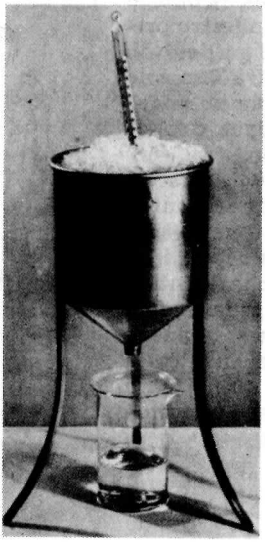
Determinación de los puntos fijos.

Puntos fijos. Escala Celsius

Ahora es necesario graduar el termómetro. Se eligen dos temperaturas determinadas, fácilmente reproducibles en cualquier momento: la de fusión del hielo y la de ebullición del agua. A la primera se le asigna el número 0, y a la segunda, el 100.

Para que el termómetro esté a



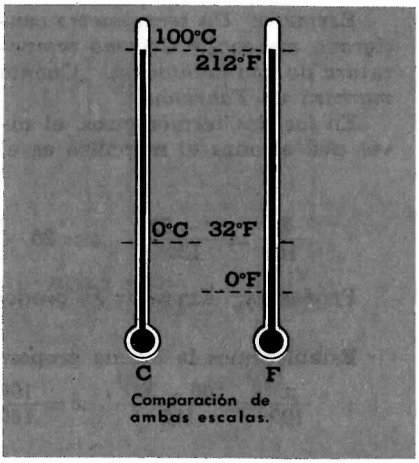


Puntos de fusión y de ebullición.

0 grados se lo coloca en hielo machacado y en fusión: la columna de mercurio desciende durante unos minutos, hasta que alcanza un nivel estable. Se hace ahí una raya en el vidrio: es el *punto fijo 0.*

Para que el termómetro esté a 100 grados, se lo coloca en vapores de agua en ebullición. El nivel sube un cierto tiempo, pero luego alcanza una posición estable. Se hace ahí otra raya en el vidrio: es el *punto fijo 100.*

Luego se divide el intervalo entre los dos puntos fijos en 100 partes iguales, y ya se tiene un termómetro graduado en la *escala centígrada, o Celsius.*



Comparación de ambas escalas.

Escala Fahrenheit

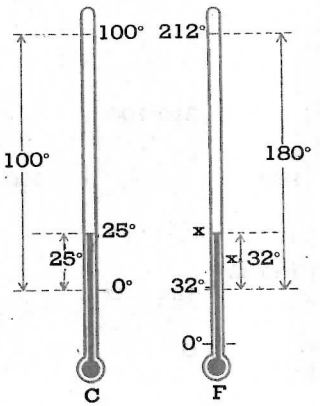
Se obtiene dividiendo el intervalo entre los puntos fijos en 180 partes iguales. Al nivel inferior se le asigna el número 32, y al superior, el 212. El cero de esta escala está, pues, 32 grados Fahrenheit por debajo de la temperatura de fusión del hielo[1].

Pasaje de una escala a otra

Si medimos la longitud de una habitación empleando un *metro* y una *yarda,* obtendremos como medidas dos números distintos. Sin embargo, la *longitud que medimos es la misma.*

Si, deseando medir la temperatura de un lugar, usamos un termómetro centígrado y un Fahrenheit, obtendremos también dos números diferentes, pero, claro está, *la temperatura es una sola.*

Estamos habituados a uno de esos números, el primero; en cambio no lo estamos a temperaturas expresadas en grados Fahrenheit. Es conveniente acostumbrarse a traducir a nuestro "lenguaje" éstas últimas.



[1] En realidad, los puntos fijos elegidos por Fahrenheit para construir su escala fueron: el inferior, 0° F la temperatura de fusión de cierta mezcla de hielo y sal de amonio; el superior, la temperatura de ebullición del mercurio, a la que asignó 600° F.

EJEMPLO: *Un termómetro centígrado marca 25° C como temperatura de una habitación. ¿Cuánto marcará un Fahrenheit?*

En los dos termómetros, el nivel que alcanza el mercurio es el mismo, pero frente a ese mismo nivel hay números diferentes. Nuestro problema consiste en expresar en grados F ese intervalo, que vale 25° C. Es sencillo establecer una proporción:

$$\frac{25}{100} = \frac{x - 32}{180} \therefore\ x = 25 \cdot \frac{180}{100} + 32 = 25 \cdot \frac{9}{5} + 32 = 77° \text{ F}$$

PROBLEMA: *Expresar en grados C una temperatura de 100° F.*

Establecemos la misma proporción que antes (ver figura pág. 345):

$$\frac{x}{100} = \frac{100 - 32}{180} \therefore\ x = \frac{100}{180}\,(100 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 68 = 37{,}8° \text{ C.}$$

Luego: $t = 100° \text{ F} = 37{,}8° \text{ C.}$

OBSERVACIÓN: Como se ve, para cualquier pasaje se plantea la proporción y se despeja la incógnita. Para los °F hay que tener presente que hay que *sumar* o *restar* 32° F.

PROBLEMA: *Expresar en grados F una temperatura de — 4° C.*

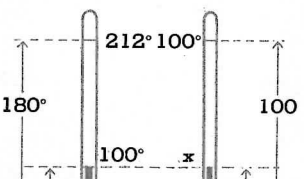
Como siempre, establecemos la proporción:

$$\frac{32 - x}{180} = \frac{4}{100} \therefore\ x = 32 - \frac{180 \cdot 4}{100} = 32 - 7{,}2 = 24{,}8° \text{ F}$$

PROBLEMA: *Expresar en grados C una temperatura de — 20° F.*
La proporción es ahora:

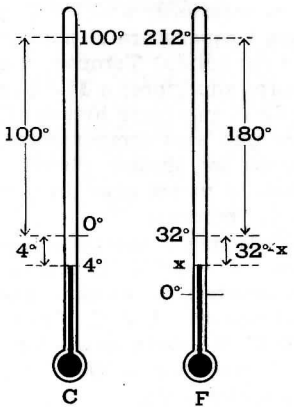
$$\frac{-20 - 32}{180} = \frac{x}{100} \therefore\ x = -52\,\frac{100}{180} = -28{,}9° \text{ C.}$$

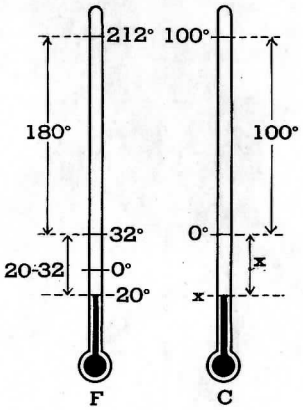
$$t = -20° \text{ F} = -28{,}9° \text{ C.}$$



Termómetro clínico (de máxima)

Es el termómetro que el médico usa para tomar la temperatura de un enfermo. Cerca del bulbo tiene una estrangulación, que no impide que el mercurio pase por ella cuando la temperatura sube. Pero cuando la temperatura baja, el mercurio no puede pasar al bul-





bo, quedando registrada la máxima temperatura alcanzada. Sacudiendo el termómetro se consigue que el mercurio vuelva al bulbo.

La escala absoluta o de lord Kelvin

Si bien en la vida diaria las escalas centígrada y Fahrenheit son las más importantes, en los estudios científicos se usa otra, llamada *absoluta* o *de lord Kelvin*, por haberla inventado este físico inglés.

En la escala absoluta, al 0° C se le hace corresponder 273° K (°K se lee *grados Kelvin*); a los 100° C corresponden 373° K. Se ve inmediatamente que 1° K es igual que 1° C, y que el 0° K está a una temperatura que un termómetro centígrado señalará como — 273° C.

El pasaje de una escala a la otra es muy sencillo, pues, según el caso, basta sumar o restar 273. Por ejemplo, ¿cuánto se leerá en un termómetro centígrado si la temperatura es de 315° K?

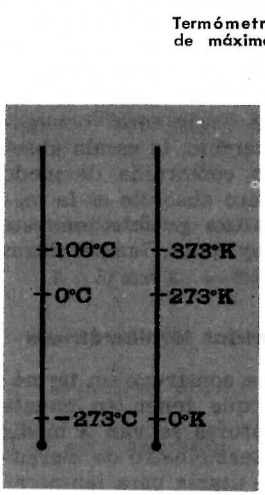
Se leerá:

$$315 - 273 = 42° \text{ C}.$$

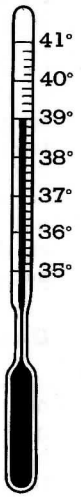
A la inversa: ¿qué temperatura absoluta equivale a 25,3° C?

$$25{,}3 + 273 = 298{,}3° \text{ K}.$$

En la escala centígrada se llama "cero" a la temperatura co-



Termómetro de máxima.



rrespondiente a la fusión del hielo, simplemente por comodidad u ocurrencia del que la inventó, pero no indica que sea la menor temperatura posible (basta pensar en las temperaturas "bajo cero" o negativas). En cambio, la escala absoluta ha sido construida de modo tal, que el cero absoluto es la menor temperatura posible; en esta escala no hay, pues, temperaturas negativas.

Otras sustancias termométricas

Cuando se construye un termómetro, hay que tener en cuenta qué temperaturas se van a medir con él. Un termómetro de mercurio no puede usarse para temperaturas inferiores a — 39° C, porque a esa temperatura el mercurio pasa a ser sólido. Tampoco a temperaturas superiores a 357° C, porque a ella el mercurio hierve. De manera que esas temperaturas constituyen los límites dentro de los cuales se puede usar un termómetro de mercurio.

Para medir temperaturas inferiores a — 39° C, es común usar termómetros de alcohol, pues éste solidifica a — 110° C. Pero hierve a 76° C. También se usa toluol, cuyos límites son — 100° C y 110° C, respectivamente.

Otros termómetros

Generalmente se atribuye a Galileo la invención del primer termómetro, al que llamó *termoscopio*, aunque algunos creen que la idea fue dada por Herón, célebre inventor griego. Galileo resolvió el problema de inventar un termómetro con un aparato que funcionaba aprovechando la dilatación del aire, al aumentar la temperatura. La idea, pues, es la misma que la del termómetro de mercurio: comparando variaciones de volumen se pueden comparar temperaturas.

Pero el volumen es sólo *una* de las características de los cuerpos, que cambia con la temperatura. ¿No será posible aprovechar otra? Sí, se puede. Hay termómetros *eléctricos*, en los que se aprovecha la propiedad que tienen los cuerpos conductores de la electricidad de variar su resistencia con la temperatura; termómetros ópticos, llamados *pirómetros*, que se basan en los cambios de color con las variaciones de temperatura, etc.

El color y la temperatura

¿Cómo medir la temperatura de un cuerpo, alrededor de los 1 500° C o 2 000° C? Se usan los pirómetros. Cuando la temperatura de un cuerpo llega a unos 600° C, comienza a emitir luz: primero de un color rojo oscuro, luego se va aclarando, se hace rojo brillante, amarillo, y por último, cuando la temperatura es muy elevada, blanco. Midiendo con el pirómetro esos cambios de color, para lo cual el aparato lleva vidrios de colores, a fin de poder hacer la comparación, se conoce la temperatura. Estos aparatos se usan frecuentemente para medir las temperaturas de los hornos.

Problemas

1. ¿Cuál es la temperatura normal de una persona (36,5° C) expresada en grados Fahrenheit?

R.: 97,7° F

2. Expresar en grados Fahrenheit las siguientes temperaturas medidas en grados Celsius: *a)* — 5° C; *b)* — 30° C.

R.: *a)* 23° F; *b)* — 22° F

3. Expresar en grados Celsius las siguientes temperaturas medidas en grados Fahrenheit: *a)* 152° F; *b)* 25° F; *c)* 0° F; *d)* 8° F; *e)* — 50° F.

R.: *a)* 66,7° C; *b)* — 3,9° C; *c)* — 17,9° C; *d)* — 13,3° C; *e)* — 45,5° C

4. ¿A qué temperatura los termómetros Fahrenheit y Celsius marcarán lo mismo?

R.: — 40° C; — 40° F

5. Expresar en la escala Kelvin las temperaturas siguientes: *a)* 50° C; *b)* 0° C; *c)* — 35° C.

R.: *a)* 323° K; *b)* 273° K; *c)* 238° K

6. Expresar en la escala Kelvin las temperaturas siguientes: *a)* 72° F; *b)* 0° F; *c)* — 215° F.

R.: *a)* 295,2° K; *b)* 255,3° K; *c)* 135,8° K

7. Expresar en grados Fahrenheit el cero absoluto.

R.: — 459,4° F

26 DILATACIÓN DE LOS CUERPOS

Dilatación de los sólidos

Hay una experiencia sencilla que prueba que un cuerpo se dilata al calentarse: una bolita de metal pasa ajustadamente por un anillo. Luego se calienta la bolita, y ya no pasa por el anillo: se ha dilatado.

Dilatación lineal

Si calentamos una varilla, su longitud aumenta. Pero, ¿de qué factores depende el aumento de longitud?

Dependencia de la temperatura

Tomemos una varilla de hierro de 50 cm de largo. Para poder apreciar las variaciones de longitud, que son pequeñas, usamos el aparato de la figura. Al alargarse, la barra empuja a la aguja y la hace girar un ángulo fácilmente medible.

Colocamos la barra a una temperatura conocida (hielo en fusión), y luego la calentamos. Cuando el termómetro marque 20° C, anotemos el aumento de longitud; luego a los 40° C, etc. Encontraremos:

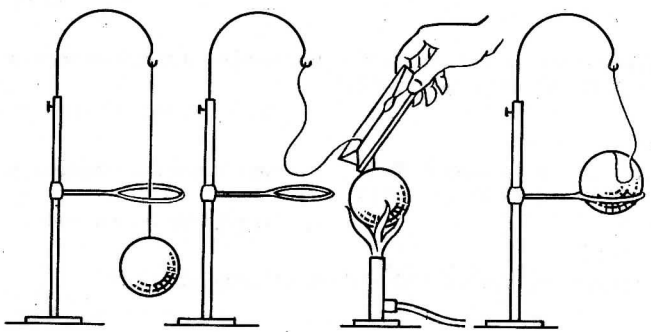
Aumentos de temperatura (en °C):

$\Delta t = 0 \quad 20 \quad 40 \quad 60 \quad 80 \quad 100$

Aumentos de longitud (en mm):

$\Delta l = 0 \quad 0{,}12 \quad 0{,}24 \quad 0{,}36 \quad 0{,}48 \quad 0{,}60$

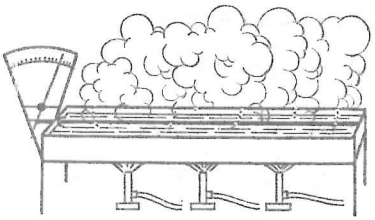
Puesto que a un *aumento* de temperatura le corresponde un



aumento de longitud, y no sólo eso, sino que a un aumento de temperatura *doble* le corresponde un aumento de longitud *doble*: al *triple*, el *triple*; al *cuádruple*, el *cuádruple*, etc., podemos decir:

Las variaciones de longitud son directamente proporcionales a las variaciones de la temperatura.

Al decir variaciones nos referimos indistintamente a aumentos o disminuciones.

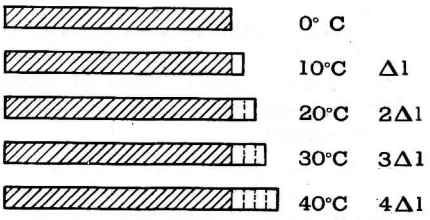


Variaciones de longitud debidas a la temperatura.

Dependencia de la longitud

Si en lugar de trabajar con una varilla de hierro de 50 cm de largo usáramos otra de 1 m, encontraríamos que se cumple la proporcionalidad con las variaciones de temperatura, pero que para una variación de temperatura igual, a esta nueva varilla le corresponde una variación de longitud *doble*; y si fuera una varilla de 1,5 m de largo, la correspondiente variación sería *triple*. Es decir que:

Las variaciones de longitud son directamente proporcionales a la longitud inicial.



Hay proporcionalidad directa entre las variaciones de longitud y las variaciones de temperatura.

Dependencia del material

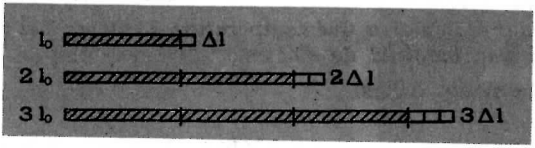
Ahora usemos una varilla de *cobre*. Encontraremos que cumple con las proporcionalidades anteriores, pero en condiciones iguales (longitudes iniciales iguales, e iguales variaciones de temperatura); la varilla de cobre sufre variaciones de longitud distintas de las que experimenta la de hierro.

Y si usamos una tercera, de *aluminio*, sus variaciones de longitud son distintas de las dos anteriores.

Las variaciones de longitud dependen del material.

Coeficiente de dilatación lineal

Las dos primeras conclusiones que obtuvimos nos dicen que las variaciones de longitud están en proporción con las variaciones de longitud y con las longitudes iniciales. En símbolos:



tanto para el hierro:

$$\frac{\Delta l}{l_0 \Delta t} = \text{constante} = \lambda_{Fe},$$

como para el cobre:

$$\frac{\Delta l'}{l_0 \Delta t} = \text{constante} = \lambda_{Cu},$$

como para el aluminio:

$$\frac{\Delta l''}{l_0 \Delta t} = \text{constante} = \lambda_{Al}.$$

Pero *el valor de esas razones es distinto para los distintos materiales; cada material tiene el suyo.* Se lo llama COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL.

DEFINICIÓN: *Se llama coeficiente de dilatación lineal, el cociente entre la variación de longitud de una varilla y el producto de su longitud inicial por la variación de temperatura.*

SIGNIFICADO FÍSICO: *El coeficiente de dilatación representa el aumento de longitud de cada unidad de longitud, cuando la temperatura sube 1° C.*

EJ.: *El coeficiente de dilatación lineal del hierro es 0,000012* $\frac{1}{°C}$, *lo que significa que una varilla de hierro de 1 m de longitud aumenta su largo en 0,000012 m cuando la temperatura aumenta 1° C; un alambre de hierro de 1 km de longitud aumenta 0,000012 km = 12 milímetros cuando la temperatura aumenta 1° C.*

Coeficientes de dilatación lineal de algunas sustancias

Hierro	0,000012	1/°C
Aluminio	24	
Cobre	17	
Vidrio	09	
Plomo	30	
Platino	09	
Acero	01	
Cinc	63	

La fórmula de la dilatación

De la definición de coeficiente de dilatación:

$$\frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta t} = \lambda,$$

podemos despejar Δl:

$$\Delta l = \lambda \cdot l_0 \cdot \Delta t,$$

y como Δl es la diferencia entre la longitud l a la temperatura final, y la longitud l_0 a la temperatura inicial, resulta:

$$l - l_0 = \lambda\, l_0\, \Delta t.$$

Si llamamos simplemente t a la variación de temperatura, pasando l_0 y sacando factor común resulta:

$$\boxed{l = l_0 (1 + \lambda t)}$$

Esta fórmula permite calcular la longitud que tendrá una varilla de longitud inicial l_0 cuando se eleva su temperatura en t °C.

PROBLEMA: *Calcular la longitud que tendrá a 70° C una varilla de hierro cuya longitud a 20° C es de 40 cm.* (Para λ_{Fe}, ver tabla).

Aplicando la fórmula:

$$l = l_0 (1 + \lambda t)$$

$$l = 40 \text{ cm } (1 + 0{,}000012 \frac{1}{°C} \cdot 50° \text{ C}) = 40 \text{ cm } (1 + 0{,}0006) = l = 40{,}024 \text{ cm}.$$

PROBLEMA: *Calcular a qué temperatura la barra del problema anterior tendrá una longitud de 40,1 cm.*

El alargamiento Δl es:

$$\Delta l = \lambda\, l_0 \Delta t \;\therefore\; \Delta t = \frac{\Delta l}{\lambda\, l_0} = \frac{1\text{ mm}}{0{,}000012\ \frac{1}{°\text{C}} \cdot 400\text{ mm}} =$$

$$= \frac{1}{0{,}0048}\,°\text{C} = 208{,}3°\text{ C}.$$

La temperatura debe estar 208,3° C por encima de la que tenía cuando su longitud era de 40 cm. Luego: $t = 228{,}3°$ C.

La dilatación en las construcciones. 1. Algunos puentes tienen un extremo fijo y el otro descansa sobre rodillos, con el fin de que la dilatación se efectúe libremente.

2. Entre un riel y otro se deja un espacio libre, para que la dilatación no los tuerza.

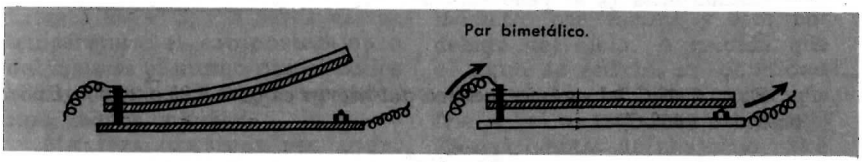
3. En los caminos pavimentados, cada 10 m, aproximadamente, se deja una ranura, que se rellena con asfalto, espacio que absorbe la dilatación.

APLICACIONES. Si se pegan dos cintas de metales distintos, como cada uno tiene su propio coeficiente de dilatación, al aumentar la temperatura la barra se arquea. Si la temperatura vuelve a tener su valor, la barra se pone nuevamente derecha; si la temperatura disminuye, la barra se arquea en sentido contrario.

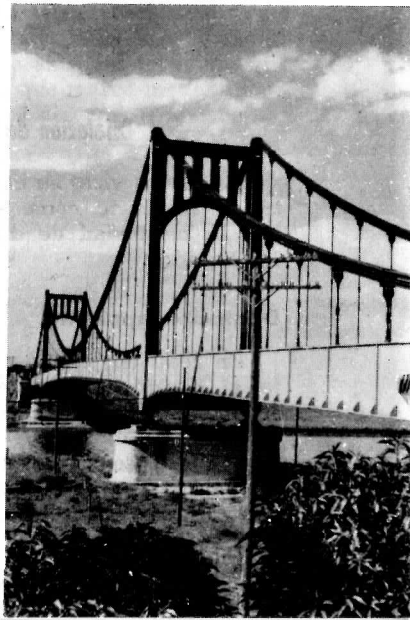
Esta propiedad se utiliza para construir *termóstatos*. Son aparatos que sirven para mantener la temperatura dentro de ciertos límites. Si la temperatura aumenta, la barra se arquea y corta el circuito: la corriente eléctrica de calentamiento se interrumpe y la temperatura disminuye; cuando disminuye demasiado, se arquea en sentido contrario y restablece la corriente.

También se usa para construir termómetros metálicos.

Cómo utilizó Aníbal la dilatación para cruzar los Alpes. Cuando el ejército de Aníbal veía obstruida su marcha por



Par bimetálico.



inmensos peñascos, los rompían de la siguiente manera (entonces no se conocía la pólvora): se encendía fuego junto a la roca, que así se dilataba por acción del calor. Luego se le arrojaba agua helada; la brusca contracción bastaba para rajar piedras inmensas.

Este mismo método fue empleado en las minas, para abrir túneles, hasta el siglo XVII.

Variación del peso específico con la temperatura

El peso específico de un cuerpo es el cociente entre su peso y su volumen; se comprende que al dilatarse, su peso específico deba disminuir, y que ocurra lo contrario si se produce contracción.

Llamaremos ϱ_0 al peso específico de un cuerpo cuyo peso es P y su volumen V_0.

$$\therefore \varrho_0 = \frac{P}{V_0}.$$

Si aumentamos su temperatura en Δt, su volumen será V y su peso específico, ϱ:

$$\varrho = \frac{P}{V}.$$

Como $V = V_0 [1 + \gamma \cdot \Delta t]$, resulta:

$$\varrho = \frac{P}{V_0 [1 + \gamma \Delta t]};$$

pero

$$\frac{P}{V_0} = \varrho_0 \therefore$$

$$\boxed{\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \Delta t}}$$

EJ.: *A 0° C, el peso específico del hierro es* $\varrho_0 = 7{,}85\ \vec{g}/cm^3$. *¿Cuánto valdrá a 100° C?*

$$\varrho = \frac{\varrho}{1 + \gamma \Delta t} = \frac{7{,}85\ \vec{g}/cm^3}{1 + 3 \cdot 0{,}000012\ \frac{1}{°C} \cdot 100° C} =$$

$$= \frac{7{,}85}{1 + 0{,}0036}\ \frac{\vec{g}}{cm^3} \cong 7{,}82\ \vec{g}/cm^3.$$

Dilatación de los líquidos

Ya hemos visto en el termómetro de mercurio, cómo se aprovecha la propiedad de dilatarse de los líquidos.

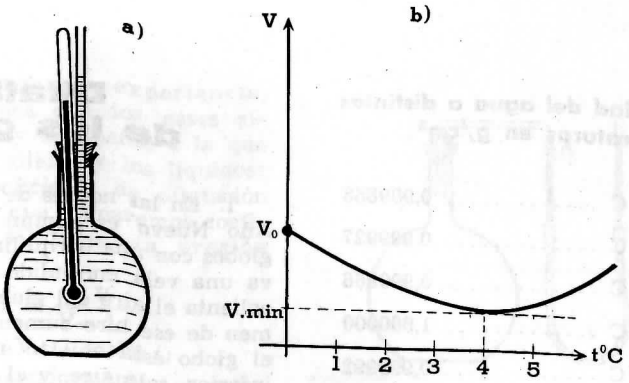
Dilatación aparente

En realidad, cuando se calienta el líquido contenido en un recipiente, también se dilata el recipiente, de modo que la dilatación que observamos es la dilatación aparente del líquido.

Dilatación verdadera

Es la suma de la dilatación aparente más la del recipiente.

EL AGUA NO SIGUE LAS REGLAS. Efectuemos la siguiente experiencia: llenemos con agua un balón como el de la figura, y enfriémoslo hasta 0° C, pero sin dejar que el agua se solidifique. Luego, calentemos y observemos el nivel del agua en el tubito, y el termómetro. Veremos una cosa curiosa: a partir de 0° C, a medida que la temperatura sube, el agua ¡no se



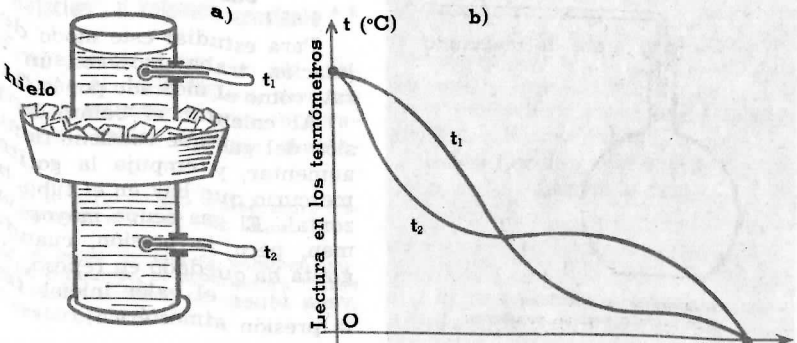
dilata! ... y ¡disminuye de volumen! Esto va en contra de las leyes que hemos establecido, pero el agua se complace en no tenerlas en cuenta.

La temperatura llega a 1° C, a 2° C, a 3° C, y sigue contrayéndose. Llega a los 4° C, y a partir de esa temperatura, el comportamiento del agua es el mismo que el de los demás cuerpos: a mayor temperatura, mayor volumen.

MÁXIMA DENSIDAD DEL AGUA. Como en toda nuestra experiencia anterior la masa de agua no ha cambiado, pero sí su volumen, el cociente de ambos, la densidad, también ha ido cambiando. A menor volumen corresponde mayor densidad, de modo que cuando el volumen sea el menor de todos (a 4° C), la densidad será la mayor de todas.

Hay una experiencia sencilla para comprobarlo. Un recipiente cilíndrico se rodea con hielo en su parte media. Se lo llena de agua a unos 10° C, y se coloca un termómetro por encima y otro por debajo del hielo. A medida que el agua se enfría, su densidad aumenta, de modo que el agua más fría se irá al fondo del recipiente. El termómetro de abajo nos dice que así sucede, pues indica menor temperatura.

Pero al llegar a los 4° C, el agua que tenga menor temperatura será menos densa, e irá a la parte superior: es ahora el termómetro de arriba el que marca menor temperatura, los dos por debajo de 4° C.



inmensos peñascos, los rompían de la siguiente manera (entonces no se conocía la pólvora): se encendía fuego junto a la roca, que así se dilataba por acción del calor. Luego se le arrojaba agua helada; la brusca contracción bastaba para rajar piedras inmensas.

Este mismo método fue empleado en las minas, para abrir túneles, hasta el siglo XVII.

Variación del peso específico con la temperatura

El peso específico de un cuerpo es el cociente entre su peso y su volumen; se comprende que al dilatarse, su peso específico deba disminuir, y que ocurra lo contrario si se produce contracción.

Llamaremos ϱ_0 al peso específico de un cuerpo cuyo peso es P y su volumen V_0.

$$\therefore \quad \varrho_0 = \frac{P}{V_0}.$$

Si aumentamos su temperatura en Δt, su volumen será V y su peso específico, ϱ:

$$\varrho = \frac{P}{V}.$$

Como $V = V_0 [1 + \gamma \cdot \Delta t]$, resulta:

$$\varrho = \frac{P}{V_0 [1 + \gamma \Delta t]};$$

pero

$$\frac{P}{V_0} = \varrho_0 \quad \therefore$$

$$\boxed{\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \gamma \Delta t}}$$

EJ.: *A 0° C, el peso específico del hierro es* $\varrho_0 = 7{,}85\ \vec{g}/cm^3$. *¿Cuánto valdrá a 100° C?*

$$\varrho = \frac{\varrho}{1 + \gamma \Delta t} = \frac{7{,}85\ \vec{g}/cm^3}{1 + 3 \cdot 0{,}000012\ \frac{1}{°C} \cdot 100° C} =$$

$$= \frac{7{,}85}{1 + 0{,}0036}\ \frac{\vec{g}}{cm^3} \cong 7{,}82\ \vec{g}/cm^3.$$

Dilatación de los líquidos

Ya hemos visto en el termómetro de mercurio, cómo se aprovecha la propiedad de dilatarse de los líquidos.

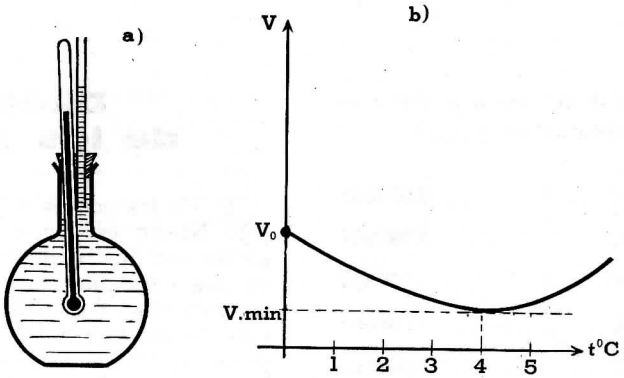
Dilatación aparente

En realidad, cuando se calienta el líquido contenido en un recipiente, también se dilata el recipiente, de modo que la dilatación que observamos es la dilatación aparente del líquido.

Dilatación verdadera

Es la suma de la dilatación aparente más la del recipiente.

EL AGUA NO SIGUE LAS REGLAS. Efectuemos la siguiente experiencia: llenemos con agua un balón como el de la figura, y enfriémoslo hasta 0° C, pero sin dejar que el agua se solidifique. Luego, calentemos y observemos el nivel del agua en el tubito, y el termómetro. Veremos una cosa curiosa: a partir de 0° C, a medida que la temperatura sube, el agua ¡no se



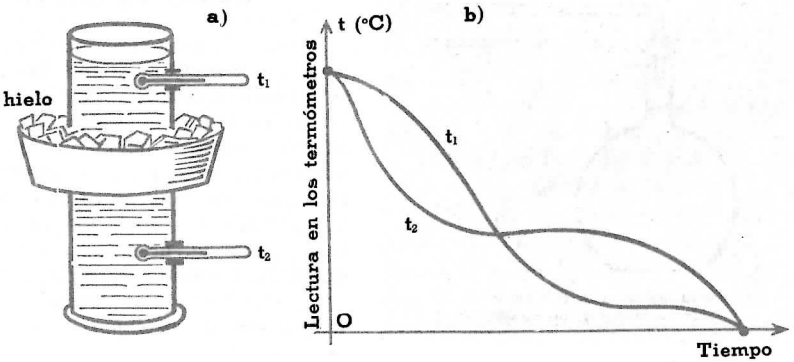
dilata!... y ¡disminuye de volumen! Esto va en contra de las leyes que hemos establecido, pero el agua se complace en no tenerlas en cuenta.

La temperatura llega a 1° C, a 2° C, a 3° C, y sigue contrayéndose. Llega a los 4° C, y a partir de esa temperatura, el comportamiento del agua es el mismo que el de los demás cuerpos: a mayor temperatura, mayor volumen.

MÁXIMA DENSIDAD DEL AGUA. Como en toda nuestra experiencia anterior la masa de agua no ha cambiado, pero sí su volumen, el cociente de ambos, la densidad, también ha ido cambiando. A menor volumen corresponde mayor densidad, de modo que cuando el volumen sea el menor de todos (a 4° C), la densidad será la mayor de todas.

Hay una experiencia sencilla para comprobarlo. Un recipiente cilíndrico se rodea con hielo en su parte media. Se lo llena de agua a unos 10° C, y se coloca un termómetro por encima y otro por debajo del hielo. A medida que el agua se enfría, su densidad aumenta, de modo que el agua más fría se irá al fondo del recipiente. El termómetro de abajo nos dice que así sucede, pues indica menor temperatura.

Pero al llegar a los 4° C, el agua que tenga menor temperatura será menos densa, e irá a la parte superior: es ahora el termómetro de arriba el que marca menor temperatura, los dos por debajo de 4° C.

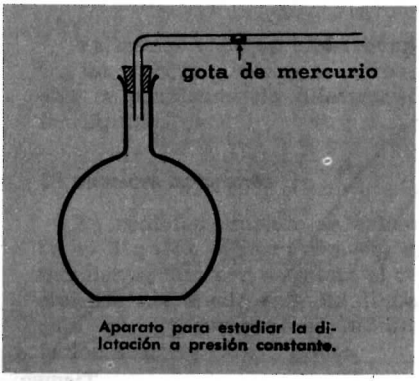


Densidad del agua a distintas temperaturas en g/cm³

0° C	0,999868
1° C	0,999927
2° C	0,999968
4° C	1,000000
5° C	0,999992
10° C	0,999727
15° C	0,999126
20° C	0,998230

El hielo es menos denso que el agua. Al llegar a los 0° C, el agua está a punto de solidificarse, y si se la enfría, ese enfriamiento la transforma en hielo. Al transformarse en hielo, la misma masa de agua ocupa un volumen mayor, de modo que la densidad del hielo es menor que la del agua. Por eso el hielo flota en el agua.

Si se llena una botella de agua y se la tapa, al formarse hielo la botella se rompe. Lo mismo suele ocurrir con las cañerías de agua en noches de mucho frío.



Aparato para estudiar la dilatación a presión constante.

Dilatación de los gases

1. En las noches de Navidad y Año Nuevo es común ver volar globos con una barquilla en la que va una vela encendida. La llama calienta el aire del globo; el volumen de ese aire aumenta, y como el globo está abierto en su parte inferior, sale aire, y el que queda dentro está más caliente y es más liviano que el de la atmósfera. El principio de Arquímedes explica lo demás.

2. ¿No llama la atención que los globos en que se efectúan ascensiones estratosféricas estén casi desinflados al partir? Es que a miles de metros de altura, la presión de la atmósfera es menor que al nivel del suelo, y entonces el globo se dilatará. Si partiera muy inflado, al llegar a la estratosfera se dilataría más y reventaría.

Estos ejemplos nos muestran que un gas puede dilatarse de dos maneras: *a)* Aumentando su temperatura; *b)* Disminuyendo su presión.

Dilatación a presión constante

Para estudiar este modo de dilatación, trabajemos con un aparato como el indicado por la figura.

Al calentar el balón, la presión del gas que contiene tiende a aumentar, y empuja la gotita de mercurio que hay en el tubo horizontal. El gas ocupa mayor volumen, pero la presión, cuando la gotita ha quedado en reposo, vuelve a tener el valor inicial (el de la presión atmosférica).

Al efectuar la experiencia, encontraremos que los gases siguen una ley semejante a la que siguen los sólidos y los líquidos: hay un coeficiente de dilatación del gas, α', que llamaremos coeficiente de *dilatación a presión constante*:

$$\alpha' = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta t}$$

$$V = V_0 (1 + \alpha' \Delta t).$$

Como anteriormente, se cumple que:

1) *El aumento de volumen es directamente proporcional al aumento de temperatura, cuando la presión permanece constante.*

2) *El aumento de volumen es directamente proporcional al volumen inicial, cuando la presión permanece constante.*

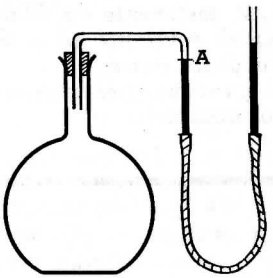
Pero al tratar de comprobar con distintos gases si cada uno tiene *su* coeficiente de dilatación a presión constante, nos encontramos con una cosa curiosa:

3) *El coeficiente de dilatación a presión constante tiene el mismo valor para todos los gases.*

Se ha encontrado que si la temperatura inicial es de 0° C, ese valor es: $\alpha' = 0{,}0036 \frac{1}{^\circ C} = \frac{1}{273} \frac{1}{^\circ C}$ *

"Dilatación" a volumen constante **

Trabajemos ahora con un aparato como el de la figura, que nos permitirá calentar el gas encerrado en el balón, aunque manteniendo constante el volumen que ocupa. Si su temperatura aumenta, aumenta su presión, y tiende a bajar el nivel de la rama de la izquierda, aumentando así el volumen. Pero subamos la rama de la derecha de modo que el nivel de la izquierda esté siempre en A y el volumen permanezca constante.



"Dilatación" a volumen.

Lo que ahora queremos estudiar no es la variación de volumen con la temperatura, pues el volumen permanece constante, sino *cómo varía la presión cuando varía la temperatura.*

Midiendo, encontraremos que:

1) *Las variaciones de presión son directamente proporcionales a las variaciones de temperatura, cuando el volumen permanece constante.*

2) *Las variaciones de presión son directamente proporcionales a la presión inicial, cuando el volumen permanece constante.*

Estas dos conclusiones nos permiten definir un coeficiente de dilatación a volumen constante:

$$\alpha'' = \frac{\Delta P}{P_0 \cdot \Delta t} \quad \therefore$$

$$\therefore P = P_0 (1 + \alpha'' \cdot \Delta t).$$

Experimentando con gases distintos, encontraremos que:

* Si se parte de una temperatura distinta de 0° C, α' toma otro valor.

** A pesar de que el volumen permanece constante, se acostumbra llamar dilatación al aumento de presión con la temperatura.

3) *El coeficiente de dilatación a volumen constante es el mismo para todos los gases.*

Los gases nos tienen reservada otra sorpresa más:

El coeficiente de dilatación a volumen constante es igual al coeficiente de dilatación a presión constante.

Como $\alpha'' = \alpha'$, los llamamos indistintamente $\alpha = 0{,}0036\ \frac{1}{°C}$.

OBSERVACIÓN: El coeficiente α tiene ese valor cuando se lo calcula a partir de 0° C. Las fórmulas se pueden escribir, pues, así:

$V = V_0 (1 + \alpha t)$ y $P = P_0 (1 + \alpha t)$, siendo V_0 y P_0, el volumen y la presión a 0° C, y t, directamente la temperatura centígrada final.

EJEMPLO: *Se conoce el volumen de una masa de gas a 20° C. Calcularla a 120° C* (manteniendo constante la presión).

Supongamos que hacemos el cálculo así:

$$V_{120} = V_{20} (1 + \alpha \Delta t) = \\ = V_{20} (1 + 0{,}0036 \cdot 100) = V_{20} \cdot 1{,}36.$$

Luego, sería:

$$V_{120} = V_{20} \cdot 1{,}36.$$

Este cálculo no es correcto, pues se ha partido de 20° C y no de 0° C, como corresponde al valor $\alpha = 0{,}0036\ \frac{1}{°C}$. El cálculo correcto es el siguiente:

1) Partiendo de V_{20}, se calcula V_0:

$$V_{20} = V_0 (1 + \alpha \cdot 20) \quad \therefore \quad V_0 = \frac{V_{20}}{1 + 0{,}0036 \cdot 20}$$

2) Con ese valor de V_0, se calcula V_{120}:

$$V_{120} = V_0 (1 + \alpha t) = \frac{V_{20}}{1 + 0{,}0036 \cdot 20} (1 + 0{,}0036 \cdot 120) = \\ = V_{20}\ \frac{1{,}432}{1{,}072} = V_{20} \cdot 1{,}34.$$

Luego, es:

$$V_{120} = V_{20} \cdot 1{,}34.$$

El cero absoluto

Si a partir de 0° C disminuimos la temperatura de una masa de gas, manteniéndola a volumen constante, la presión disminuye. Cuanto más frío está el gas, menos presión tiene. ¿A qué temperatura habría que llegar para que su presión se redujera a cero?

Apliquemos las fórmulas que hemos obtenido:

$$\alpha = \frac{\Delta p}{p_0 \Delta t} \quad \therefore \quad \Delta t = \frac{\Delta p}{\alpha \cdot p_0}$$

Para que la presión llegue a cero, debe haber disminuido en p_0, de modo que $\Delta p = - p_0$, donde el signo menos indica que ha habido disminución. Reemplazando en la fórmula:

$$\Delta t = \frac{- p_0}{\alpha\ p_0} = - \frac{1}{\alpha} = \\ = - \frac{1}{0{,}0036\ \frac{1}{°C}} = - 273° \text{ C}.$$

Como partimos de 0° C, resulta que a una temperatura de — 273° C, la presión de una masa de gas se anularía, cesando todo movimiento de las moléculas. Si bien esto no ocurre en la realidad, porque todos los gases se licuan antes de alcanzar esa temperatura, ésta ha sido una de las razones que llevaron a considerarla como la más baja temperatura existente, designándola con el nombre de *cero absoluto*.

Las leyes de Gay-Lussac

Empleando la temperatura absoluta, las conclusiones que obtuvimos antes tienen una expresión sumamente sencilla:

1) DILATACIÓN A PRESIÓN CONSTANTE. Llegamos a la conclusión de que:

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

(partiendo de 0° C).

Como $\alpha = 0{,}0036 \frac{1}{°C} = \frac{1}{273° C}$, resulta:

$$1 + \alpha t = 1 + \frac{t}{273° C} = \frac{273 + t}{273} = \frac{T}{273}$$

y como: $273° K = 0° C$, llamando T_0 a esta temperatura:

$$1 + \alpha t = \frac{T}{T_0}.$$

Luego:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) = V_0 \frac{T}{T_0}$$

$$\boxed{\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}}$$

Esa proporcionalidad es la expresión simbólica de la:

PRIMERA LEY DE GAY LUSSAC: *Si se mantiene constante la presión, los volúmenes que ocupa una misma masa de gas son directamente proporcionales a las temperaturas absolutas.*

PROBLEMA: *Se infla un globo de goma a una temperatura de 20° C y se lo ata. Luego se lo lleva a una temperatura de 30° C. Calcular su volumen a esta temperatura, sabiendo que cuando se lo infló ocupaba 3 dm³.*

Los volúmenes son directamente proporcionales a las temperaturas absolutas, pues suponemos que la presión se mantiene constante durante la experiencia:

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \therefore V = \frac{V' T}{T'} =$$

$$= \frac{3 \text{ dm}^3 \cdot (273 + 30)° K}{(273 + 20)° K} = 3{,}1 \text{ dm}^3.$$

Obsérvese que con esta expresión no es necesario considerar el volumen a 0° C.

PROBLEMA: *Calcular a qué temperatura el volumen del globo sería doble del inicial.*

Suponemos que la goma se estira con toda facilidad, de modo que la presión del aire encerrado sea siempre la misma.

$$\frac{2 V'}{T} = \frac{V'}{T'} \therefore T \cdot V' = 2 V' T' \therefore T = 2 T'$$

$$T = 2 \cdot 293° K = 586° K = 313° C.$$

PROBLEMA: *A 0° C y a 760 mm Hg, la densidad del aire es de 0,001293 g/dm³. Calcular la densidad a 17° C y 760 mm Hg.*

$$\left.\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{M}{V_0}\\ \delta &= \frac{M}{V}\end{aligned}\right\} \therefore \frac{\delta_0}{\delta} = \frac{M}{V_0} : \frac{M}{V} = \frac{V}{V_0}, \text{ y como: } \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0},$$

resulta:

$$\frac{\delta_0}{\delta} = \frac{T}{T_0}.$$

Este problema nos ha llevado a un resultado interesante:

Si la presión se mantiene constante, las densidades de un gas son inversamente proporcionales a sus temperaturas absolutas.

Esto era previsible, pues si aumentamos la temperatura de una masa de gas y mantenemos constante la presión, el gas aumenta de volumen. Como la misma masa de gas ocupa ahora un volumen mayor, su densidad será menor. Pero lo que nos dice la ley con toda precisión es que la proporcionalidad es inversa, es decir, que si la temperatura absoluta es *doble*, la densidad será la *mitad*; si es el *triple*, la densidad se habrá reducido a la *tercera parte*, y así sucesivamente.

En el caso particular del problema planteado:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{T_0}{T} \therefore \delta = \delta_0 \frac{T_0}{T} =$$

$$= 0{,}0013 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{273}{290} \cong 0{,}0012 \frac{g}{cm^3}.$$

2) Dilatación a volumen constante. Hemos llegado a la conclusión de que (pág. 354):

$P = P_0 (1 + \alpha t)$,

cuando $V =$ constante.

Pero empleando las temperaturas absolutas:

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} \therefore \boxed{\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0}}$$

Ésta es la expresión simbólica de la:

Segunda ley de Gay Lussac: *Si el volumen permanece constante, las presiones de una masa de gas son directamente proporcionales a sus temperaturas absolutas.*

Problema: *A 20° C y 760 mm Hg de presión se cierra herméticamente un recipiente de vidrio. Se lo coloca luego en agua hirviendo, de modo que su temperatura suba a 100° C. Calcular la presión del aire encerrado.*

Aplicando la segunda ley:

$$\frac{P}{T} = \frac{P_0}{T_0} \therefore P = \frac{P_0 T}{T_0} = \frac{760 \text{ mm Hg} \cdot 373° \text{ K}}{293° \text{ K}} = 967{,}5 \text{ mm Hg}.$$

Problema: *Un recipiente de vidrio está hecho para resistir hasta 5 atmósferas de presión. Se lo llena de aire a la presión de 1 atmósfera y a una temperatura de 20° C, y luego de cerrarlo se lo calienta. Calcular hasta qué temperatura puede resistir, suponiendo que el vidrio no se funda.*

$$\frac{P}{T} = \frac{P'}{T'} \therefore T' = \frac{P' T}{P} = \frac{5 \text{ at} \cdot 273° \text{ K}}{1 \text{ at}} = 1\,365° \text{ K} = 1\,092° \text{ C}.$$

Problema: *A 0° C y a 1 atmósfera, la densidad del aire es de 1,3 g/dm³. En esas condiciones se llena un recipiente con aire, y luego de cerrarlo se lo calienta a 1 000° C. Calcular la densidad en esas nuevas condiciones. Se supone que el recipiente no se ha dilatado.*

La primera condición para resolver un problema es leer el enunciado. Esto parece tonto, y sin embargo, es la primera falla que en general se comete: Sólo pasear los ojos sobre él y... ¡a Por la primera sabemos trabajar hacer cálculos!

Aquí no hay nada que calcular, pues no han cambiado ni la masa de gas ni el volumen que ocupa; luego, la densidad es la misma.

Gay Lussac.

Ecuación de los gases

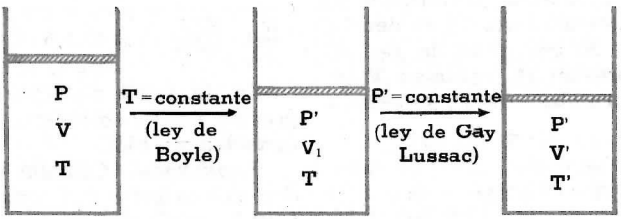
Hasta ahora hemos aprendido tres leyes sobre el comportamiento de los gases: la de Boyle-Mariotte y las dos de Gay Lussac. cuando la temperatura se mantiene constante; por las dos segundas, cuando se mantiene constante ya sea el volumen, ya sea la presión. ¿Qué pasa si nos plantean un problema en el que varían las tres cantidades? Podríamos resolverlo paso a paso, pero para poder hacerlo directamente, vamos a efectuar una experiencia:

Tenemos un recipiente cilíndrico, tapado herméticamente con un pistón, de modo que una vez que hemos colocado dentro una cierta masa de gas, trabajaremos siempre con *la misma masa.*

Inicialmente, la presión es P, la temperatura es T y el volumen es V (estado inicial).

Mantengamos la temperatura constante y aumentemos un poco la presión, por ejemplo, empujando el émbolo (estado intermedio).

De este estado intermedio pasamos a un tercero; manteniendo constante la presión, elevamos la temperatura, de modo que el volumen aumenta.



Cómo vincular dos estados cualesquiera.

En este tercer estado, el final, la temperatura de nuestra masa de gas es T', la presión es P', y el volumen es V'. ¿Cómo relacionar estas tres cantidades con las tres del estado inicial?

Observemos que del estado inicial se puede pasar al segundo aplicando la ley de Boyle-Mariotte, pues la temperatura ha permanecido constante y la masa de gas es la misma. Las presiones y los volúmenes están en proporción inversa:

$$P\,V = P'\,V_1 \qquad (1)$$

Del segundo estado pasamos al estado final, manteniendo constante la presión, de modo que podemos aplicar la primera ley de Gay Lussac:

$$\frac{V_1}{V'} = \frac{T}{T'}.$$

Despejando V_1, y reemplazando por su valor en (1):

$$V_1 = \frac{V'\,T}{T'} \quad \therefore \quad P\,V = P'\,\frac{V'\,T}{T'},$$

y pasando T al primer miembro, resulta:

$$\boxed{\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'}}$$

Las tres cantidades, presión, temperatura absoluta y volumen de una cierta masa de gas, están tan íntimamente ligadas entre sí, que si se parte de determinados valores para cada una, inexorablemente una de las tres tomará un determinado valor cuando se varíen arbitrariamente las otras dos.

PROBLEMA: *Una masa de gas ocupa, a 10° C y 755 mm Hg de presión, un volumen de 5 litros. ¿Qué volumen ocupará a 100° C y 3 atmósferas de presión?*

De la ecuación general de los gases:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'}$$

se despeja el volumen:

$$V' = V\,\frac{P}{P'}\cdot\frac{T'}{T} = 5\,l\,\frac{755\text{ mm Hg}}{2\,280\text{ mm Hg}}\cdot\frac{373°\text{ K}}{283°\text{ K}} \cong 2{,}18\,l.$$

VARIACIÓN DE LA DENSIDAD CON LA TEMPERATURA Y LA PRESIÓN. Cuando se varía la temperatura y la presión de un gas, su densidad varía. Supongamos una masa *m* de gas, a presión P, volumen V y temperatura absoluta T; su densidad es δ. Si esa masa de gas se lleva a presión P', volumen V' y temperatura absoluta T', su densidad es δ'.

$$\left.\begin{aligned}\delta &= \frac{m}{V}\\ \delta' &= \frac{m}{V'}\end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad \frac{\delta'}{\delta} = \frac{V}{V'} \qquad (1)$$

La ecuación general de los gases establece que:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'} \quad \therefore \quad \frac{V}{V'} = \frac{P'\,T}{T'\,P} \qquad (2)$$

De (1) y (2),

$$\frac{\delta'}{\delta} = \frac{P'\,T}{T'\,P} \quad \therefore \quad \boxed{\delta' = \delta\cdot\frac{P'}{P}\cdot\frac{T}{T'}}$$

La densidad a 0° C = 273° K y presión de 1 atmósfera se llama *densidad normal.*

PROBLEMA: *Calcular la densidad del oxígeno a 3 atmósferas y 546° K, sabiendo que su densidad normal es 1,81 g/dm³.*

$$\delta' = \delta \frac{P'}{P} \cdot \frac{T}{T'} = 1{,}81 \text{ g/cm}^3 \cdot \frac{3 \text{ at}}{1 \text{ at}} \cdot \frac{273^\circ \text{ K}}{546^\circ \text{ K}} =$$

$$= 1{,}81 \cdot \frac{3 \cdot 273}{546} \text{ g/cm}^3 \cong 2{,}71 \text{ g/cm}^3.$$

PROBLEMA: *Un frasco de 10 l se llena de aire a 755 mm Hg y 27° C. Se lo lleva a Córdoba y se lo destapa a 720 mm Hg y 7° C. ¿Entra o sale aire, y cuánto?*

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'} \therefore V' = V \frac{P}{P'} \cdot \frac{T'}{T} =$$

$$= 10\,\text{l} \frac{755}{720} \cdot \frac{280}{300} \cong 9{,}8\,\text{l}.$$

Entran 0,2 l de aire.

La ecuación general de estado de los gases

Cuando se conoce la temperatura, la presión y el volumen que ocupa una determinada masa de gas, se puede calcular qué valor tomará una de esas tres magnitudes cuando se varían arbitrariamente las otras dos, mediante la ecuación:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'}.$$

Pero si, por ejemplo, se nos plantea el siguiente problema: *¿Qué volumen ocupan 96 g de oxígeno, a 30° C, a la presión de 1 atmósfera?*, aquella ecuación no nos da los medios de resolverlo.

Sin embargo, a partir de ella se puede llegar a otra que permite hacerlo; en efecto: si se toma una determinada masa de un cierto gas, se la puede llevar a distintos estados (P; V; T); (P'; V'; T'); (P''; V''; T''), etc., que están vinculados entre sí por la relación:

$$\frac{P\,V}{T} = \frac{P'\,V'}{T'} = \frac{P''\,V''}{T''} =$$

$$= \text{constante} = k.$$

Pero esa constante tiene el valor k sólo para esa masa de ese gas, pues si se toma otra masa de ese mismo gas, los distintos estados estarán vinculados por una proporción análoga, pero la constante de proporcionalidad tendrá un valor distinto de k; y si se toma una masa igual a la primera, pero de otro gas, la constante también será distinta de las dos anteriores.

Sin embargo, si se toma una masa de 1 *mol*[1] de gas, sea cual fuere el gas, la constante que se obtiene es siempre la misma; es una constante, pues, universal, y se la llama R, la *constante de los gases*:

$$\frac{P\,V}{T} = R \text{ (para una masa de 1 mol de un gas cualquiera).}$$

[1] Suponemos aprendidas en Química las definiciones:

"*Peso molecular* de una sustancia es el cociente entre el peso de una molécula de una sustancia y la 16 ava parte del peso de un átomo de oxígeno."

"*1 mol* de una sustancia es una masa cuya medida en gramos es su peso molecular."

Ejemplo: el cociente entre el peso de una molécula de hidrógeno y la 16 ava parte del peso de un átomo de oxígeno es 2,016 (número abstracto); luego, el peso molecular del hidrógeno es 2,016. Por lo tanto, 1 mol de hidrógeno son 2,016 gramos de hidrógeno.

Si se tienen 250 gramos de hidrógeno, son 250 : 2,016 ≅ 124 moles de hidrógeno.

Esto resulta de la ley de Avogadro-Ampère: "Un mol de cualquier gas, en condiciones normales, ocupa un volumen de 22,4 l". Es decir, en condiciones normales

2,016 g de H (1 mol de H) ocupan 22,4 l; 32 g de O (1 mol de O) ocupan 22,4 l, etc.

Por lo tanto, para un mol de cualquier gas en condiciones normales.

$$R = \frac{P_o V_o}{T_o}$$

Como $P_o = 1$ atm
$T_o = 273°$ K
$V_o = 22{,}4$ l

$$R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22{,}4 \text{ l}}{273° \text{ K}} = 0{,}082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{mol} \cdot °\text{K}}$$

o también:

$$R = 82 \frac{\text{atm} \cdot \text{cm}^3}{\text{mol} \cdot °\text{K}}.$$

Si en lugar de tomar una masa de 1 mol se toma una masa de n moles, se tiene que:

$$\frac{P V}{T} = n R \therefore \boxed{P V = n R T}$$

Ésta es la forma más útil de la ecuación general de los gases, y permite resolver inmediatamente el problema planteado:

¿Qué volumen ocupan, a 30° C, 96 g de oxígeno, a la presión de 1 atmósfera?

De acuerdo con la ecuación general:

$$P V = n R T \therefore V = \frac{n R T}{P}.$$

Como el peso molecular del oxígeno es 32, los 96 g de oxígeno son

$$\frac{96}{32} = 3 \text{ moles}.$$

Luego:

$$V = \frac{3 \text{ mol} \cdot 82 \frac{\text{atm} \cdot \text{cm}^3}{°\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 303° \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 3 \cdot 82 \cdot 303 \text{ cm}^3 = 74\,538 \text{ cm}^3 \cong 74{,}5 \text{ l}.$$

Ej.: *¿Cuántos gramos de hidrógeno serán necesarios para llenar un globo de 5 m³ a una presión de 2 atmósferas y 27° C de temperatura?*

$$P V = n R T \therefore n = \frac{P V}{R T} = \frac{2 \text{ at} \cdot 5\,000\,000 \text{ cm}^3}{82 \frac{\text{at} \cdot \text{cm}^3}{°\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 300° \text{ K}} \cong 407 \text{ moles}.$$

Como 1 mol de hidrógeno es igual a 2,016 g, son necesarios:

$$407 \cdot 2{,}016 \text{ g} \cong 820 \text{ g}.$$

Problemas

1. ¿Cuánto medirá, a 40° C, un alambre de cobre que a 0° C mide 3 000 m?

R.: 3 002,04 m

2. Un tubo tiene una longitud de 998 mm a 18° C. Se hace pasar por él vapor de agua a 98,5° C y se alarga en 1,34 mm. ¿Cuánto vale el coeficiente de dilatación de ese material?

R.: 0,0000167 1/°C

3. ¿Cuáles deben ser las longitudes a 0° C de dos varillas cuyos coeficientes de dilatación son 0,9 y $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ 1/° C respectivamente, para que a cualquier temperatura su diferencia sea de 50 cm?

R.: 56,25 y 106,25 cm, respectivamente

4. Un reloj de péndulo de cobre marcha exactamente cuando se lo mantiene a 0° C. ¿Cuánto atrasa por día si se lo mantiene a 20° C?

R.: 14^s

5. El volumen de un trozo de mármol es, a 5° C, de 3,8 m^3. ¿Cuál será su volumen a 35° C?

R.: 3,803 m^3

6. El peso específico del mármol a 5° C es 2,6 $\vec{g}$/cm^3. ¿Cuánto vale a 35° C?

R.: 2,598 $\vec{g}$/cm^3

7. Un recipiente de cinc de 50 cm^3 está lleno de mercurio a la temperatura de 20° C. ¿Cuánto mercurio se derramará si la temperatura asciende hasta 80° C?

R.: 0,549 cm^3

8. El coeficiente de dilatación del mercurio es 0,000182 1/° C. ¿Cuál es su valor en 1/° F?

R.: 0,000101 1/°F

9. Una masa de cloro ocupa un volumen de 600 cm^3 a 0° C. ¿Qué volumen ocupará si se la calienta isobáricamente hasta 106° C?

R.: 833 cm^3

10. Una masa de nitrógeno, a 20° C y a 2 atmósferas de presión ocupa un volumen de 800 cm^3. ¿Qué variación de volumen se producirá al calentar isobáricamente hasta 156,6° C? ¿Qué variación de presión se produciría si el gas se calentara hasta esa misma temperatura, pero a volumen constante?

R.: 372,9 cm^3; 0,932 at.

11. Una masa de hidrógeno ocupa un volumen de 500 cm^3 en condiciones normales. ¿Qué variación de volumen se produce si se la comprime isotérmicamente hasta P = 4,5 at?

R.: 388,9 cm^3

12. Un gas ocupa 6 dm^3 a 0° C y 4 at. ¿Cuál será su presión a 546° K, si ocupa un volumen de 8 dm^3?

R.: 6 at

13. ¿Cuál es el peso del aire contenido en una sala de 8 m · 6 m · 4 m, a $t = 25°$ C y P = 756 mm Hg?

R.: 226,2 $\vec{kg}$

14. Un recipiente lleno de aire a 0° C y 760 mm Hg tiene una válvula de seguridad de 5 cm^2 de sección, cargada con una pesa de 10 $\vec{kg}$. ¿A qué temperatura se abre la válvula?

R.: 546° C

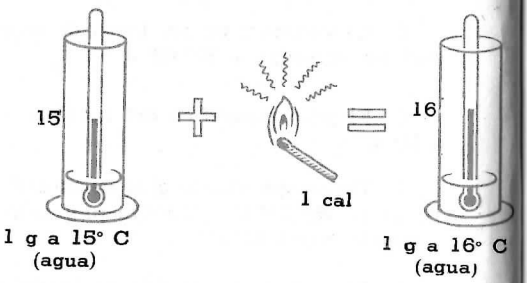
15. A 770 mm Hg y 27° C se tapó un recipiente de 950 dm^3 de aire atmosférico. ¿Cuántos gramos de aire se desprenderán del frasco si se lo abre en la cumbre de una montaña, a 680 mm Hg y 0° C?

R.: 33,4 g

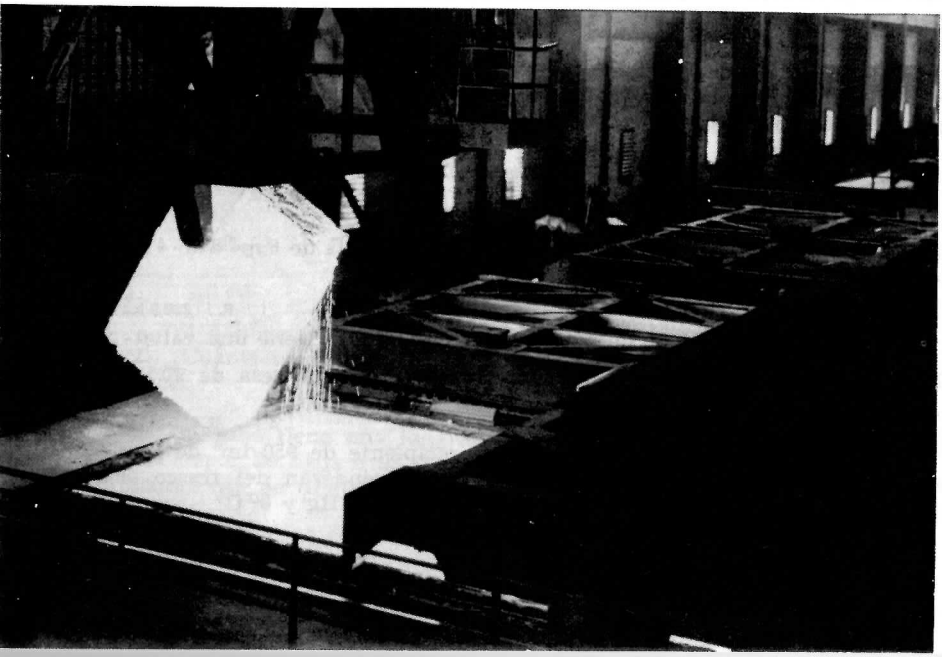
27 CALORIMETRÍA

La caloría

En los capítulos anteriores hemos tratado de la medición de temperaturas y de los efectos que provoca sobre los cuerpos un aumento de temperatura. En éste estudiaremos los intercambios de calor entre los cuerpos, de modo que deberemos medir cantidades de calor. Para ello, el primer paso ha de ser definir una unidad. Como unidad de cantidad de calor, usaremos la *caloría*.



DEFINICIÓN: *1 caloría es la cantidad de calor que entregada a 1 g de agua eleva su temperatura en 1° C.* Su símbolo es *cal.*



También se usa un múltiplo: la *gran caloría, caloría grande* o *kilocaloría*; su símbolo es *kcal*, y también es frecuente representarla con *Cal*.

$$1 \text{ kcal} = 1\,000 \text{ cal}.$$

EJ.: *¿Cuántas calorías se necesitan para calentar 500 g de agua, desde 20° C hasta 100° C?*

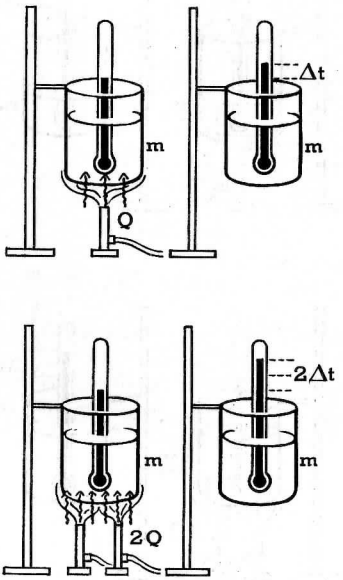
La regla de tres nos permite hacer el cálculo:

Para elevar 1° C la temperatura de 1 g se necesita 1 cal; luego, para elevar 80° C la temperatura de 500 g se necesitarán:

$$Q = 80 \cdot 500 \text{ cal} = 40\,000 \text{ cal}.$$

Si, a la inversa, 500 g de agua se enfrían desde 100° C hasta 20° C, han perdido 40 000 cal.

En general, cuando un cuerpo gana Q cal, a la cantidad de calor le asignaremos signo positivo; si las pierde, signo negativo.



Calor específico

Si se tienen dos masas iguales de agua, y a una se le entregan Q calorías y a la otra 2 Q, la segunda experimentará un aumento de temperatura *doble* del que experimenta la primera. Pero eso no sucede sólo con el agua, sino también con masas *iguales* de una *misma* sustancia cualquiera.

Si, por consiguiente, al entregarse calor a dos masas iguales de una misma sustancia, se observa que la primera experimenta un aumento Δt de temperatura, y la segunda un aumento doble, $2\,\Delta t$, ello significa que a la segunda se le entregó doble cantidad de calor que a la primera.

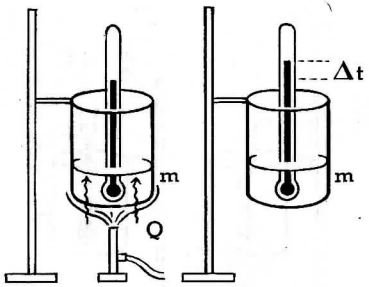
En general, pues, diremos que:

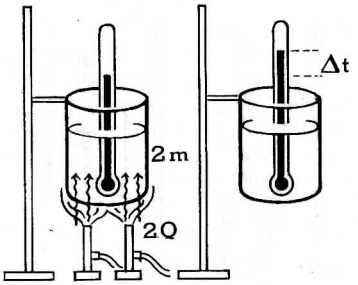
1) *Las cantidades de calor entregadas, o quitadas, a masas iguales de sustancias iguales, son directamente proporcionales a las variaciones de temperatura.*

En símbolos:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{Q'}{\Delta t'}$$ (masas iguales de sustancias iguales).

Consideremos dos recipientes que contienen masas *distintas* de agua. Se les entrega la cantidad de calor suficiente como para que ambas experimenten el *mismo* aumento de temperatura. Se observará que las cantidades de calor que se necesitaron están en proporción con las respectivas masas de agua. Pero esto sucede no sólo con el agua: si se tienen dos trozos de una misma sustancia (por ejemplo, 1 kg y 2 kg de hierro), para producir la misma va-





riación de temperatura en ambos es necesario darle al segundo doble cantidad de calor que al primero. Es decir que:

2) *Las cantidades de calor entregadas, o quitadas, a masas distintas de una misma sustancia para producir iguales variaciones de temperatura, son directamente proporcionales a las masas.*

En símbolos:

$\frac{Q}{m} = \frac{Q'}{m'}$ (sustancias y Δt iguales).

De las dos conclusiones anteriores resulta que si se tienen varios cuerpos de una *misma* sustancia, de masas distintas, m, m' y m'', y se les entregan cantidades de calor cualesquiera, Q, Q' y Q'', se producen aumentos de temperatura Δt, $\Delta t'$ y $\Delta t''$ tales, que las cantidades de calor están en proporción con los productos de cada masa por su aumento de temperatura:

$$\frac{Q}{m \cdot \Delta t} = \frac{Q'}{m' \cdot \Delta t'} =$$

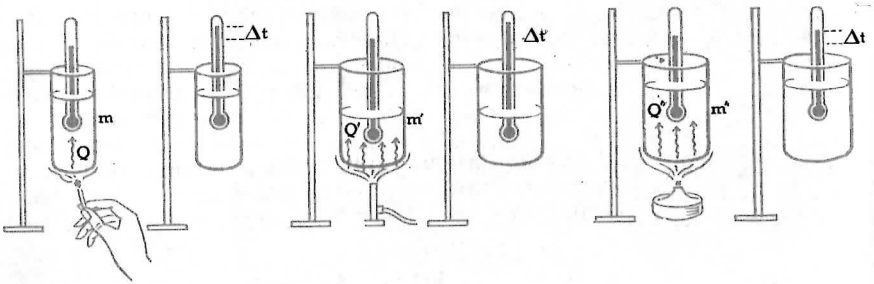
$$= \frac{Q''}{m'' \cdot \Delta t''} = \text{constante} = c.$$

Ese cociente representa la cantidad de calor que es necesario entregar a 1 gramo de una sustancia para que su temperatura se eleve en 1° C, y este cociente es el *calor específico* de la sustancia.

DEFINICIÓN: *Calor específico de una sustancia es el cociente entre la cantidad de calor que se le entregue y el producto de su masa por el aumento de temperatura provocado por dicha cantidad de calor.*

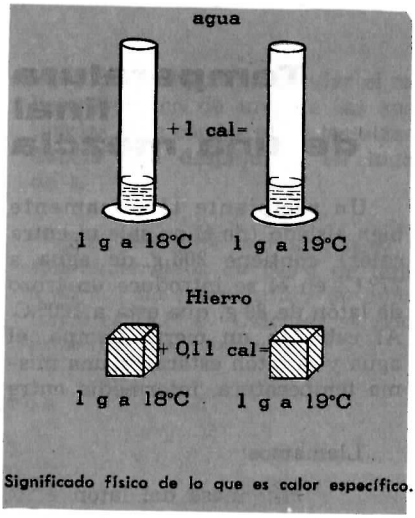
$$c = \frac{Q}{m \Delta t}$$

De acuerdo con esto, ¿cuál es el calor específico del agua? Evidentemente, $1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}$ (¿por qué no decir, simplemente, *1 cal*?).



CALORES ESPECÍFICOS (cal/g °C)
DE ALGUNAS SUSTANCIAS

Aluminio	0,226
Bronce	0,088
Cobre	0,093
Hielo	0,53
Hierro	0,11
Plomo	0,03
Vidrio	0,15
Cinc	0,093
Agua	1
Agua salada	0,95
Amoníaco	1,07
Mercurio	0,033
Alcohol	0,6



Significado físico de lo que es calor específico.

Cantidad de calor

De la definición de calor específico resulta:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t\,,$$

o sea: La cantidad de calor que un cuerpo recibe o cede se calcula multiplicando el calor específico por la masa y por la variación de temperatura.

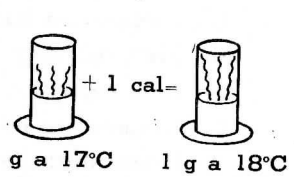
EJ.: *¿Qué cantidad de calor es necesario suministrar a un trozo de hierro de 36 kg para que su temperatura suba 300° C?*

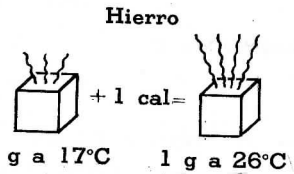
Aplicando la fórmula:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t$$

$$Q = 0{,}11 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 36\,000 \text{ g} \cdot 300° \text{ C}$$

$$Q = 1\,188\,000 \text{ cal}.$$





Una consecuencia de los distintos calores específicos.

EJ.: *¿Qué cantidad de calor cede un trozo de aluminio de 2 kg, que está a la temperatura de 400° C, si se enfría a 50° C?*

Aplicando la fórmula:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t \qquad \Delta t = 50° \text{ C} - 400° \text{ C} = -350° \text{ C}$$

$$Q = 0{,}22 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 2\,000 \text{ g} \cdot (-350° \text{ C})$$

$$Q = -147\,000 \text{ cal}.$$

El signo *menos* indica que el cuerpo se enfrió, es decir, perdió 147 000 cal.

Temperatura final de una mezcla

Un recipiente térmicamente bien aislado (de él no sale ni entra calor) contiene 200 g de agua a 27° C; en él se introduce un trozo de latón de 89 g, que está a 100° C. Al cabo de un cierto tiempo, el agua y el latón estarán a una misma temperatura, intermedia entre 27° C y 100° C. ¿Cuál es esa temperatura?

Dentro del recipiente ocurre lo siguiente:

1, el latón se enfría, cediendo Q_1 calorías;

2, el agua se calienta, recibiendo Q_2 calorías;

3, cuando las temperaturas del agua y del latón se igualan, cesa el intercambio de calor.

4, como el recipiente está aislado, $-Q_1 = Q_2$.

Llamamos:

m_1: masa del latón ..... $= 89$ g

c_1: calor específico del latón ..... $= 0{,}067 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$

t_1: temperatura inicial del latón ..... $= 100°$ C

m_2: masa del agua ..... $= 200$ g

c_2: calor específico del agua ..... $= 1 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$

t_2: temperatura inicial del agua ..... $= 27°$ C

t: temperatura final de la mezcla.

$$Q_1 = c_1 m_1 (t - t_1); \quad Q_2 = c_2 m_2 (t - t_2); \quad \text{y como } -Q_1 = Q_2.$$

$$-c_1 m_1 (t - t_1) = c_2 m_2 (t - t_2);$$

y despejando t:

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2}.$$

De acuerdo con los valores del ejemplo:

$$t = \frac{0{,}067 \cdot 89 \cdot 100 + 1 \cdot 200 \cdot 27}{0{,}067 \cdot 89 + 200 \cdot 27} \text{ °C} \cong 29{,}9° \text{ C}.$$

EJ.: *Se mezclan 100 g de agua a 60° C con 100 g de agua a 50° C. Calcular la temperatura de la mezcla.*

Calor perdido por el agua caliente = Calor ganado por el agua fría.

$$Q_1 = c_1 m_1 (t - t_1); \quad Q_2 = c_2 m_2 (t - t_2);$$

y como $$-Q_1 = Q_2,$$

$$\therefore -c_1 m_1 (t - t_1) = c_2 m_2 (t - t_2);$$

pero: $$c_1 = c_2, \text{ y } m_1 = m_2 \therefore -(t - t_1) = t - t_2$$

$$\therefore t = \frac{t_2 + t_1}{2} = \frac{50° \text{ C} + 60° \text{ C}}{2}$$

$$t = 55° \text{ C}$$

El resultado es significativo: la temperatura de equilibrio es el promedio de las temperaturas. Obsérvese que sólo resulta así cuando se mezclan masas iguales de sustancias iguales.

Medición del calor específico

Si en los problemas anteriores se conociera la temperatura de equilibrio, se podría calcular el calor específico de una de las sustancias si se conoce el de las otras: habría que despejar c en lugar de t.

EJ.: *400 g de mercurio a 60° C son sumergidos en 600 g de agua a 25° C. La temperatura de equilibrio es 25,8° C. Calcular el calor específico del mercurio.*

DATOS

$$c_1 = 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \qquad c_2 = ? \qquad t = 25{,}8°\ \text{C}$$
$$m_1 = 600\ \text{g} \qquad m_2 = 400\ \text{g}$$
$$t_1 = 25°\ \text{C} \qquad t_2 = 60°\ \text{C}$$

$$Q_1 = c_1\, m_1\, (t - t_1) \qquad Q_2 = c_2\, m_2\, (t - t_2)\ ;$$

y como $$Q_1 = -\,Q_2$$

$$\therefore\ c_1\, m_1\, (t - t_1) = -\,c_2\, m_2\, (t - t_2)\,.$$

Para calcular c_2 se lo despeja de la fórmula:

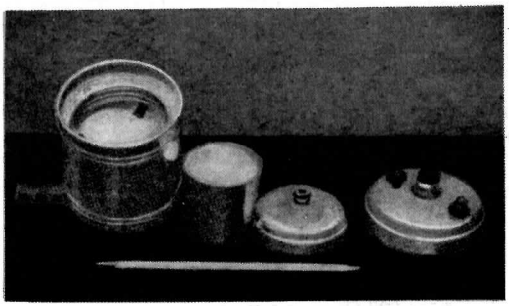
$$\boxed{c_2 = \frac{c_1\, m_1\, (t - t_1)}{m_2\, (t_2 - t)}}$$

Reemplazando por los valores:

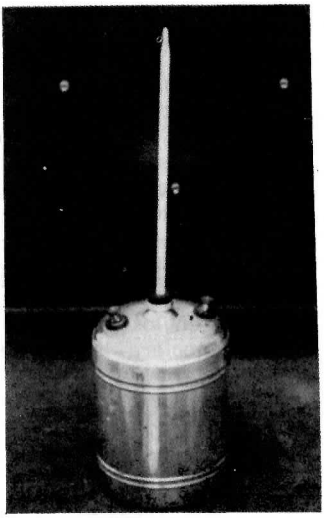
$$c_2 = \frac{1\ \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 600\ \text{g}\ (25{,}8°\ \text{C} - 25°\ \text{C})}{400\ \text{g} \cdot (60°\ \text{C} - 25{,}8°\ \text{C})} \cong 0{,}035\ \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$$

El calorímetro de las mezclas

Consiste en un recipiente que se aísla todo lo posible, para evitar pérdidas de calor. Contiene agua cuya masa se ha medido previamente; un termómetro sumergido en ella mide su temperatura. Se mide una cierta masa de la sustancia cuyo calor específico se busca, y se la calienta a una temperatura bien determinada (por ejemplo 100° C). Cuando está a esa temperatura, se la echa dentro del agua del calorímetro, agitándose el agua con el agitador, para que la temperatura sea uniforme, y se observa el termómetro, que señala un aumento de temperatura, que cada vez se hace más lento, hasta que llega un momento en que se detiene; se ha alcanzado entonces el equilibrio térmico, y la temperatura correspondiente es t. Con la fórmula hallada en el ejercicio anterior se obtiene el calor específico del cuerpo.



Las partes del calorímetro. En el recipiente de la izquierda, obsérvense los tapones donde va apoyado el recipiente que debe contener agua, cuyo objeto es disminuir al mínimo la cantidad de calor que se pierda por conducción, pues el aire tiene muy mala conductibilidad.



Aspecto exterior de un calorímetro.

EJ.: *Un calorímetro contiene 900 g de agua a 20° C; se introducen en él 1 200 g de limadura de hierro, cuya temperatura es de 100° C. El termómetro indica una temperatura de equilibrio de 30° C. ¿Cuánto vale el calor específico del hierro?*

$$c_2 = \frac{c_1 m_1 (t - t_1)}{m_2 (t_2 - t)} = \frac{1 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 900 \text{ g } (30° \text{ C} - 20° \text{ C})}{1\,200 \text{ g } (100° \text{ C} - 30° \text{ C})} \cong 0{,}11 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}.$$

En general, cuando se quiere hacer una determinación de cierta precisión, hay que considerar la masa del calorímetro, que también absorbe calor.

EJ.: *Se tienen varias bolitas del mismo volumen, pero de distintas sustancias: hierro, cobre, estaño, aluminio, plomo, níquel, oro y platino. Se las calienta a la misma temperatura, y luego se las deja sobre una plancha de cera, donde se hunden, pues funden la cera donde se apoyan. Con la ayuda de la tabla de calores específicos, determinar en orden decreciente cuáles se hunden más.*

Los calores específicos de los gases

Un gas puede calentarse de distintas maneras. Una de ellas es

entregarle calor, pero manteniendo constante el volumen, por lo cual la presión aumenta; otra es entregarle calor, manteniendo constante la presión, de modo que es el volumen lo que aumenta.

Si se procede de la primera manera se obtiene *el calor específico a volumen constante*; de la segunda, *el calor específico a presión constante*. Ambos calores específicos son distintos, y siempre es mayor el calor específico a presión constante.

El calor específico a volumen constante (c_v) es el cociente entre la cantidad de calor entregado a un gas, a volumen constante, y el producto de su masa por su variación de temperatura.

Representa la cantidad de calor que es necesario darle a *1 g* del gas para que, manteniendo constante su volumen, su temperatura aumente en *1° C*.

El calor específico a presión constante (c_p) es el cociente entre la cantidad de calor entregado a un gas, manteniendo constante su presión, y el producto de su masa por la variación de temperatura.

Representa la cantidad de calor que es necesario entregar a *1 g* del gas para que, manteniendo constante su presión, su temperatura aumente en *1° C*.

CALOR ESPECÍFICO DE ALGUNOS GASES (cal/g °C)

	A presión constante	*A volumen constante*
Aire	0,237	0,169
Argón	0,123	0,074
Anhídrido carbónico ...	0,184	0,156
Hidrógeno	3,477	2,40
Nitrógeno	0,244	0,172
Oxígeno	0,217	0,157
Anhídrido sulfuroso ...	0,152	0,123

La diferencia entre ambos calores específicos se debe a lo siguiente: el calor es una forma de energía, de manera que calentar un gas es darle capacidad para trabajar. Si el calentamiento se hace a volumen constante, el gas no trabaja; si se hace a presión constante, una parte del calor entregado se emplea en trabajar (aumentar su volumen, por ejemplo, empujando la tapa del recipiente que lo contiene), de manera que para elevar su temperatura en 1° C hay que dar más calor que si su volumen permaneciera constante.

EJ.: *Se tienen 200 g de hidrógeno a 20° C. Calcular la cantidad de calor necesaria para que su temperatura se eleve a 180° C.* a) *a volumen constante;* b) *a presión constante.*

a) Como siempre,

$$Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta t = 2{,}42 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 200 \text{ g} \cdot 160° \text{ C} = 77\,400 \text{ cal.}$$

b)

$$Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta t = 3{,}41 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 200 \text{ g} \cdot 160° \text{ C} = 109\,120 \text{ cal.}$$

Las 31,680 cal de diferencia se han necesitado para realizar el trabajo de aumentar el volumen.

Problemas

1. ¿Qué cantidad de calor pierden 350 g de agua, al enfriarse desde 85° C hasta 35° C?

R.: 17 500 cal

2. ¿Cuál es el calor específico de un agua salada, si para elevar en 1° C la temperatura de 1 g se necesitan 0,95 cal?

R.: 0,95 cal/g °C

3. 50 g de platino se enfrían hasta 50° C, desprendiendo 500 cal. ¿A qué temperatura estaba el platino?

R.: 364,4° C

4. La temperatura de dos cubos de igual volumen, uno de hierro y otro de platino, aumenta 10° C. ¿Cuál de los dos absorbió más calor, y cuántas veces más? (Consúltese la tabla de calores específicos).

R.: El de hierro absorbió 1,31 veces más

5. A una varilla de hierro de 1 m de longitud y 1 cm^2 de sección se le entregan 10 kcal. ¿Cuánto aumenta su longitud?

R.: 1,3 cm

6. Se mezclan 200 g de agua a 195° F, con 120 g de agua a 284° K. ¿Qué temperatura en °C tiene la mezcla?

R.: 60,7° C

7. Un calorímetro de latón, de 200 g, contiene 501,2 g de agua a 20° C; se introducen 250 g de plomo a 100° C, y la temperatura final de equilibrio es de 21,32° C. ¿Cuál es el calor específico del plomo?

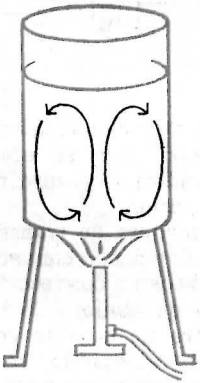
R.: 0,035 cal/g °C

8. Un calorímetro de latón, de 300 g, contiene 500 g de agua a 20° C. Se introducen un trozo de plomo de 200 g a 25° C y otro de hierro de 400 g a 100° C. ¿Cuál será la temperatura de equilibrio?

R.: 26,3° C

28 TRANSMISIÓN DEL CALOR

El calor pasa de los cuerpos de mayor temperatura a los de menor temperatura. Si dos cuerpos están a la misma temperatura, no pasa calor del uno al otro.



Al calentarse, el agua se mueve como indican las flechas.

Formas de transmisión

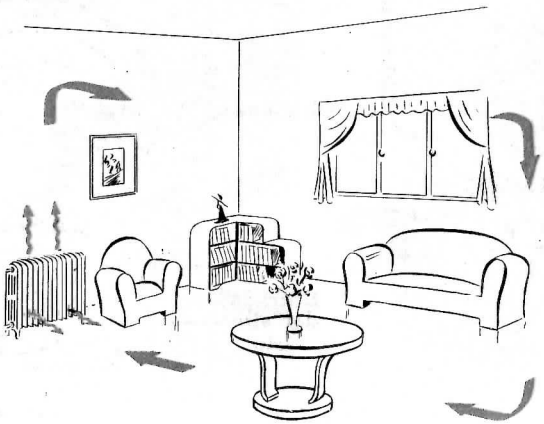
Transmisión por convección

Uno de los últimos versos del *Martín Fierro*, dice:

El fuego, pa calentar,
debe ir siempre por abajo.

Así es, en efecto. Si se pone al fuego un recipiente, el líquido de la parte inferior se calienta primero, su densidad disminuye y sube, desplazando al más frío, que baja a calentarse. Se establece así una corriente de líquido, lo que facilita el rápido calentamiento del mismo.

En la calefacción de las habitaciones sucede algo análogo. La estufa, colocada sobre el piso, ca-



lienta el aire que está en contacto con ella, que se eleva y es reemplazado por el aire frío de la parte superior.

Esta manera de transmitirse el calor se llama *por convección.*

EJEMPLOS DE CONVECCIÓN. 1. En la figura de abajo, a la izquierda, se muestra un circuito convectivo de agua: calentando, se produce una circulación constante del líquido en el sentido de las flechas.

2. Si una habitación está a mayor temperatura que la que le sigue, se podrá poner en evidencia la doble corriente de convección del aire, abriendo un poco la puerta y colocando una vela encendida: si se la pone en la parte superior, la llama se inclinará hacia la habitación fría, y cuando se la coloque próxima al piso, se inclinará hacia la habitación caliente.

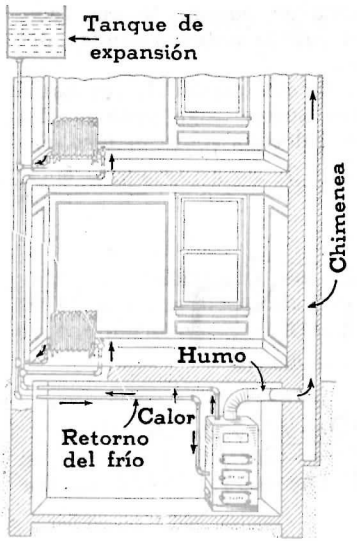
En los sistemas de calefacción de aire, el horno calienta el aire que pasa por C; ya caliente, entra en la habitación por el piso. Por el extremo opuesto sale, ya frío, y por B vuelve al horno. Por A entra aire del exterior, necesario para la renovación.

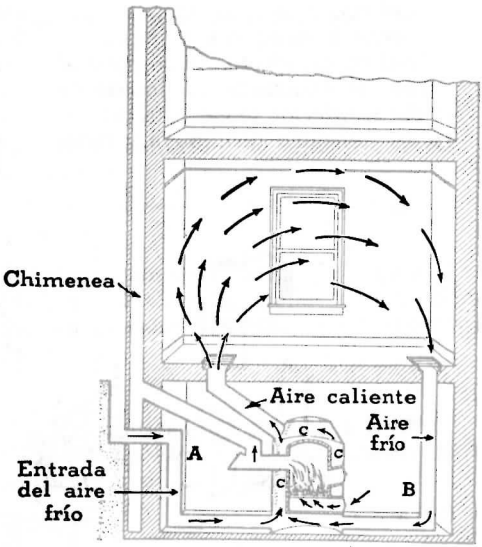
Transmisión por conducción

Si se sostiene una barra por un extremo y el otro se acerca a una llama, a los pocos segundos se advierte que el calor se transmite a través de la barra, pero sin que haya ningún desplazamiento de materia.

Esta manera de transmitirse el calor se llama por *conducción.*

EJEMPLOS DE CONDUCCIÓN DEL CALOR. No todos los sólidos condu-



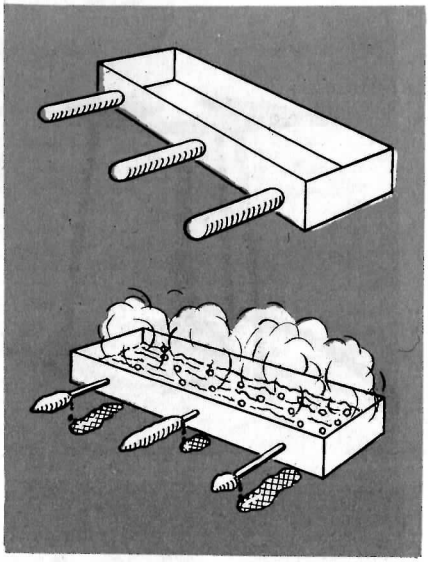


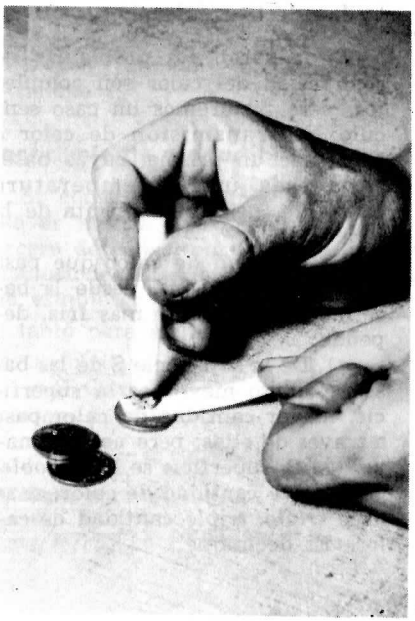
cen igualmente el calor; hay buenos y malos conductores. He aquí algunos ejemplos:

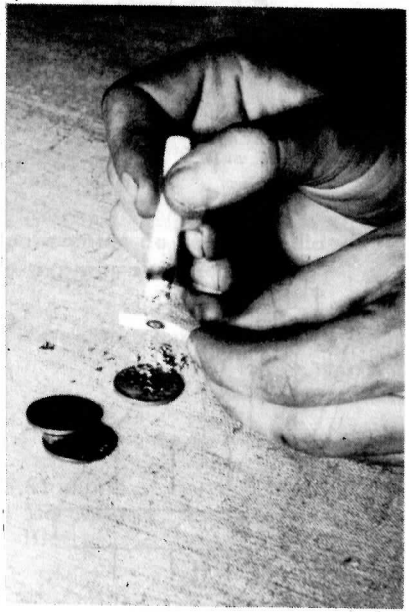
1. Las barras de la figura son de distintas sustancias, y al comienzo todas estaban totalmente recubiertas de cera. Luego se echó agua caliente en el recipiente, y se observó que las cantidades de cera fundida eran distintas, lo que indica que unas barras conducen el calor mejor que otras.

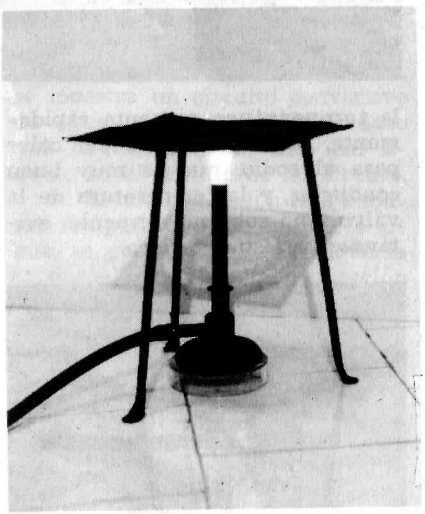
2. Colóquese un papel sobre una moneda y apóyese la punta encendida de un cigarrillo sobre el papel: se observará que no se quema. Sáquese la moneda, y el papel se quemará inmediatamente de estar en contacto con el cigarrillo. El calor se transmitía rápidamente a la moneda, y el papel no lograba retener la cantidad de calor necesaria para elevar su temperatura hasta la temperatura de combustión.

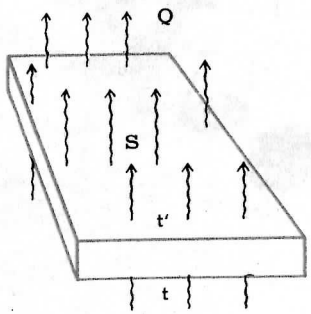
3. Ciertas válvulas de los motores de aviación se construyen huecas y se rellenan con sodio. Si la temperatura aumenta rápidamente, la mayor parte del calor pasa al sodio, que es muy buen conductor, y la temperatura de la válvula no sube mayormente, evitándose así su deterioro.











4. Si sobre la llama de un mechero se coloca una tela metálica, se observará que la llama no pasa a través de la tela. Si se coloca la tela antes de encender el mechero, y sobre ella se enciende un fósforo, se observará que el gas no se enciende debajo de la tela, pero sí por encima de la malla. El metal de la tela, mejor conductor que el gas, absorbe calor en forma tal que el gas que está del otro lado de la tela no puede alcanzar la temperatura de ignición.

5. Supongamos un trozo de madera y otro de metal a la temperatura ambiente. Si los tocamos sentiremos el metal más "frío" que la madera. ¿Cómo explicar la sensación, si las temperaturas son iguales? El metal es mejor conductor que la madera, de modo que el calor pasa de nuestra mano con más rapidez al metal que a la madera.

La ley de la conducción

En general, los problemas de conducción del calor son complejos, pero trataremos un caso sencillo: la transmisión de calor a través de un prisma, cuyas bases están cada una a temperatura constante, pero una distinta de la otra.

La cantidad de calor que pasa a través del prisma, desde la base más caliente a la más fría, depende:

a) De la superficie S de las bases. Cuanto mayor es la superficie, mayor cantidad de calor pasa a través de ellas; pero no sólo mayor: si la superficie se hace *doble*, pasa *doble* cantidad de calor; si se hace *triple*, *triple* cantidad de calor. Es decir que:

Q *es directamente proporcional a* S.

b) Del gradiente de la temperatura. La diferencia de temperaturas entre ambas caras es $t - t'$; si la dividimos por la distancia que los separa, el cociente se llama gradiente de la temperatura. Por ejemplo: $t = 80°$ C; $t' = 60°$ C; $d = 5$ cm; el gradiente de temperatura es de 4° C por cada centímetro, es decir, que por cada centímetro que se avance en el sentido en que se propaga el calor, la temperatura disminuirá en 4° C.

Gradiente de temperatura:

$$G = \frac{t - t'}{d}$$

La experiencia muestra que:

Q *es directamente proporcional a* G.

c) Del material, cosa que hemos visto en los anteriores ejemplos.

d) Del tiempo, pues cuanto mayor tiempo esté pasando calor, mayor cantidad de calor pasará, es decir:

Q *es directamente proporcional al tiempo* τ.

Coeficiente de conductibilidad

Si consideramos tres prismas, uno de hierro, otro de plata y el tercero de cobre, por ejemplo, las conclusiones anteriores nos permiten establecer que:

tanto para el hierro:

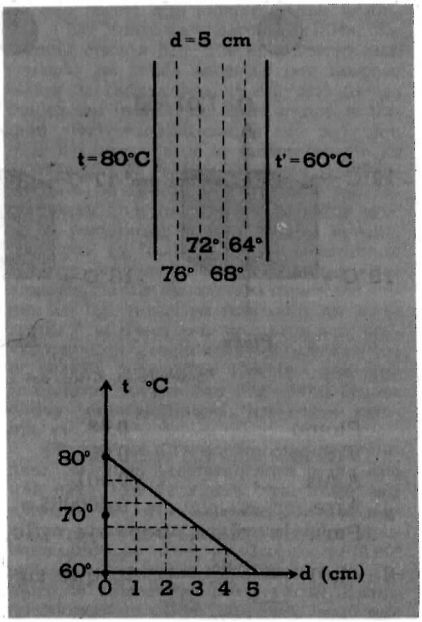
$$\frac{Q_1}{S_1 G_1 \tau_1} = \text{constante} = k_1,$$

como para la plata:

$$\frac{Q_2}{S_2 G_2 \tau_2} = \text{constante} = k_2,$$

como para el cobre:

$$\frac{Q_3}{S_3 G_3 \tau_3} = \text{constante} = k_3.$$

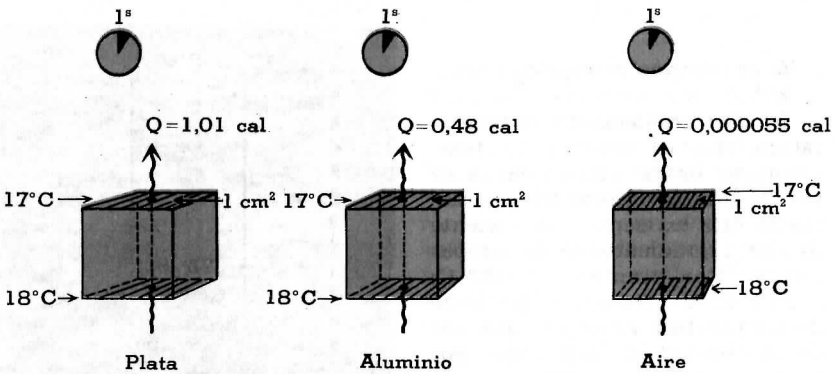


El valor de esos cocientes es distinto para distintos materiales, y se lo llama *coeficiente de conductibilidad* del material. *Representa la cantidad de calor que en cada segundo pasaría a través de cada unidad de superficie, si el gradiente de temperatura valiera la unidad (1° C/cm).*

Coeficientes de conductibilidad de algunas sustancias

$$\left(\text{expresados en } \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \cdot \text{seg}}\right)$$

Plata	1,01
Cobre	0,92
Oro	0,70
Aluminio	0,48
Mercurio	0,14
Hierro	0,16



Significado físico del coeficiente de conductibilidad.

Plomo	0,08
Vidrio	0,002
Agua	0,001
Aire	0,000055

Para la plata, por ejemplo, $k = 1{,}01 \dfrac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \dfrac{^\circ\text{C}}{\text{cm}} \text{seg}}$, lo que significa que si se tiene una lámina de plata de 1 cm de espesor, y una de sus caras está, por ejemplo, a 18° C, y la otra a 17° C, a través de cada centímetro cuadrado de su superficie pasan, en cada segundo, 1,01 calorías.

CANTIDAD DE CALOR CONDUCIDA. De la definición de coeficiente de conductibilidad:

$$k = \frac{Q}{S\,G\,\tau},$$

resulta:

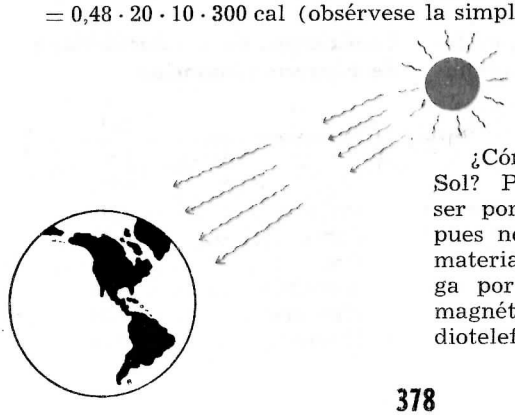
$$\boxed{Q = k\,S\,G\,\tau}$$

PROBLEMA: *¿Qué cantidad de calor atravesará en 5 minutos una lámina de aluminio de 20 cm² de superficie y 4 cm de espesor, si la diferencia de temperaturas entre sus caras es de 40° C?*

$$Q = k\,S\,G\,\tau = 0{,}48 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \dfrac{^\circ\text{C}}{\text{cm}} \cdot \text{seg}} \cdot 20\ \text{cm}^2 \cdot \frac{40^\circ\text{C}}{4\ \text{cm}} \cdot 300^{\text{s}} =$$

$= 0{,}48 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 300$ cal (obsérvese la simplificación de unidades) =

$= 28\,800$ cal.



Transmisión por radiación

¿Cómo nos llega el calor del Sol? Por supuesto que no ha de ser por convección o conducción, pues no hay entre él y la Tierra materia para que lo haga. Nos llega por medio de ondas electromagnéticas iguales a las de la radiotelefonía, aunque de longitud

de onda menor y que se propagan a través del vacío.

Esta manera de transmitirse el calor se llama *por radiación.*

Todos los cuerpos, sea cual fuere su temperatura, transmiten calor por radiación. Claro está que cuanto mayor es su temperatura, mayor cantidad de calor irradian. Las estufas eléctricas, por ejemplo, calientan fundamentalmente por radiación.

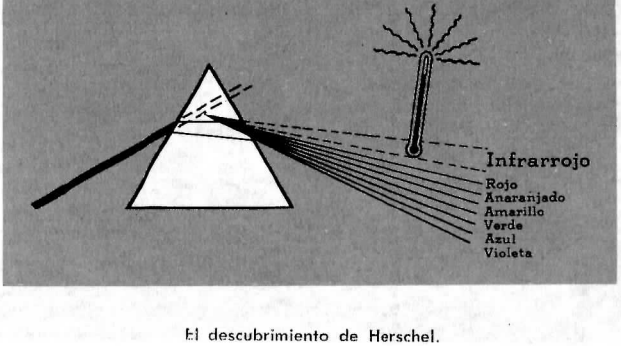
Los rayos infrarrojos

Si un rayo de luz blanca atraviesa un prisma, se descompone en colores. En 1801, *W. Herschel*, astrónomo inglés, fue exponiendo un termómetro a los rayos de distintos colores que salían de un prisma al que llegaba un rayo de sol. Encontró así que la temperatura del termómetro aumentaba cada vez más, a medida que se iba acercando al rojo; pero su sorpresa fue máxima cuando siguiendo más allá del rojo . . . ¡la temperatura del termómetro, a pesar de estar "en la oscuridad", no descendía, sino que, por lo contrario, seguía subiendo! Esto le reveló la existencia de radiaciones invisibles para el ojo humano, y que por su posición llamó *rayos infrarrojos.*

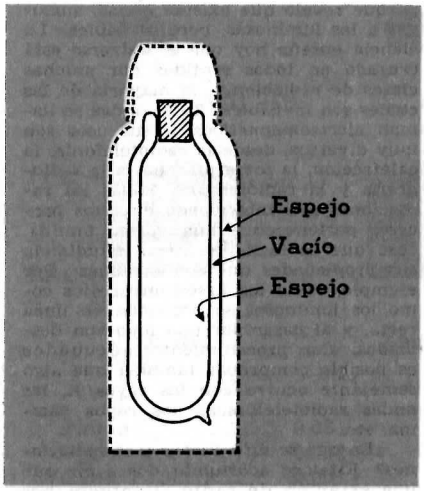
El descubrimiento de Herschel ha sido de gran trascendencia, en especial porque reveló que existen ondas, análogas a las luminosas, pero invisibles. La ciencia enseña hoy que el universo está cruzado en todos sentidos por muchas clases de radiaciones, la mayoría de las cuales son invisibles. Tales ondas se llaman *electromagnéticas*, y sus usos son muy diversos, desde la radiotelefonía, la calefacción, la fotografía, hasta la radiografía y la radioterapia. Todas las radiaciones que intervienen en estos procesos pertenecen a una misma familia, cosa que es fácil demostrar estudiando sus propiedades que son comunes. Por ejemplo, tanto los rayos infrarrojos como los luminosos se propagan en línea recta, y al pasar por una lupa son desviados. Con procedimientos adecuados es posible comprobar también que algo semejante ocurre con los rayos X, las ondas radiotelefónicas, los rayos gamma, etc.

¿En qué se diferencian esas radiaciones? Estamos acostumbrados a oír que una estación de radio "transmite, por ejemplo, en 1 070 kilociclos", lo que significa que la estación emite ondas electromagnéticas que producen 1 070 000 ciclos o vibraciones por segundo. El número de vibraciones por segundo, llamado *frecuencia* de la radiación, es lo que distingue unas de otras, y el que, dentro del campo de la luz visible, hace a una radiación roja distinta de otra amarilla o verde.

Tipo de radiación	*Frecuencia aproximada*	
Ondas radiotelefónicas	1 000	kilociclos
Rayos infrarrojos	100 000	,,
Luz visible	500 000 000 000	,,
Rayos X	10^{15}	,,
Rayos gamma (radioactividad)	10^{18}	,,



El descubrimiento de Herschel.



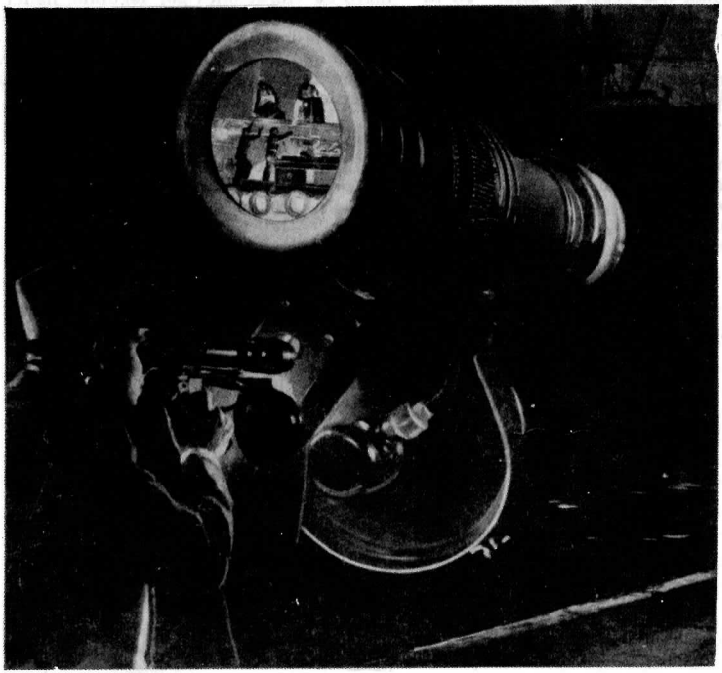
En el termo se trata de disminuir al mínimo las pérdidas producidas por las tres maneras de propagarse el calor.

La frecuencia distingue, pues, a las distintas ondas. Como se ve, el ojo humano es capaz de percibir sólo una estrecha franja de ese formidable espectro, lo cual sin duda es sumamente beneficioso; de lo contrario quizá enloqueceríamos si nuestra retina fuera impresionable por todas las radiaciones que cruzan el espacio.

APLICACIONES DE LOS RAYOS INFRARROJOS. La acción calorífera de los rayos infrarrojos tiene un amplio campo de aplicaciones. Pueden citarse entre ellas las aplicaciones terapéuticas, y en otro orden, el empleo para producir rápidamente el secado de pinturas, recurso al que se apeló en la última guerra para la pintura de los tanques de combate. También está en su etapa experimental el empleo de lámparas de rayos infrarrojos para contrarrestar los efectos de las heladas en los campos.

Cómo ver en la oscuridad. La longitud de onda de los rayos infrarrojos está

Snooperscope, que permite ver en plena oscuridad. En la figura, un policía descubre un contrabando en plena oscuridad.



Carabina provista de **sniperscope**.

muy cerca de la de los rayos luminosos, pero no impresionan nuestra retina. Sin embargo, se los puede utilizar para ver, naturalmente que con una transformación. La última guerra mundial ha contribuido al desarrollo de esta aplicación.

Uno de los inventos que permiten ver en la oscuridad es el *"snooperscope"*, y otro, que se aplica en los fusiles, *"sniperscope"*. Traducidos significan, más o menos, "mirón entremetido, o curioso", y "visualizador de bultos escurridizos", términos que están de acuerdo con las funciones a que son destinados.

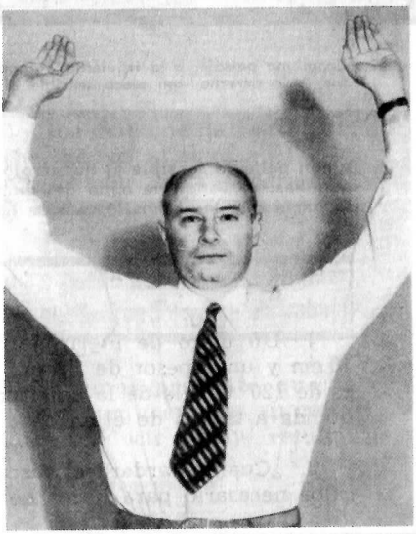
En esencia, los dos son iguales: constan de una lámpara de luz infrarroja, que se utiliza para "iluminar" los objetos que se quieren ver en la oscuridad. La luz infrarroja reflejada por ellos, es captada por el aparato que tiene una pantalla en donde se transforma en luz visible.

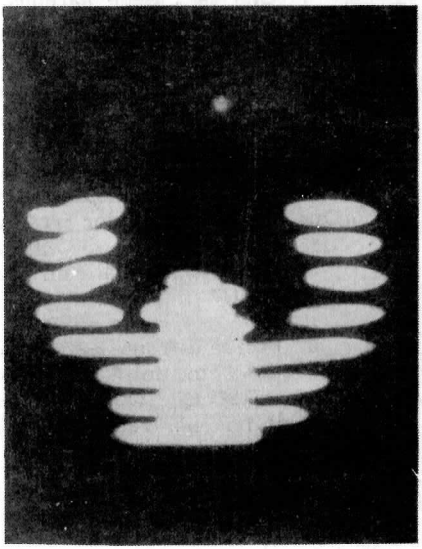
De estos aparatos se ha hecho mucho y muy diverso uso en la última guerra. El *"snooperscope"* fue empleado en los barcos para hacer señales, invisibles para quien no dispusiera de un aparato semejante; para mantener unidos los barcos de un convoy; para "ver" a través de la niebla.

También se empleó en tierra, equipando con ellos a los "jeeps". Un faro de rayos infrarrojos "iluminaba" el camino, y el conductor, provisto de la correspondiente pantalla, podía manejar su vehículo en la más densa oscuridad. Conductores prácticos podían marchar a velocidades de 60 a 70 kilómetros por hora.

El *"sniperscope"* se acopla a un fusil; la lámpara ilumina con rayos infrarrojos, de modo que la persona iluminada no advierte luz alguna.

También la radiación infrarroja se aplicó en el descubrimiento de "camouflages" y en la toma de fotografías en días de niebla. En este último aspecto, seguramente, el lector recordará haber visto en las páginas dominicales de los periódicos fotografías de paisajes tomadas con película sensible a la luz común.





Arriba: el doctor D. H. Andrews, de la Universidad de John Hopkins, posando con luz visible; **abajo:** la placa impresionada por las radiaciones caloricas emitidas por su cuerpo.

Un mismo paisaje: a la izquierda, fotografiado con placa sensible a la luz visible; a la derecha, con placa sensible al infrarrojo.

y con película sensible al infrarrojo. En aquéllas, el vapor de agua del ambiente hacía que las zonas lejanas se observaran borrosas, mientras que en éstas la nitidez, aun del paisaje más lejano, era llamativa.

Problemas

1. Un disco de hierro de una cocina eléctrica tiene un radio de 10 cm y un espesor de 5 mm. La temperatura de la superficie interior es de 120° C y la de la exterior 110° C. ¿Qué cantidad de calor es conducida a través de él en cada minuto?

R.: 41 450 cal

2. ¿Cuánto tardará el disco anterior en suministrar la cantidad de calor necesario para hacer hervir 1 litro de agua que estaba a 10° C?

R.: 115 segundos

3. Una casa tiene paredes de 25 cm de espesor, con una superficie de 300 m^2, construidas con un material cuyo coeficiente de conducción mide 0,01 $cal/cm^2 \cdot \frac{°C}{cm} \cdot seg$. ¿Qué cantidad de calor por minuto debe producir una estufa para mantener constantemente una diferencia de 10° C con la temperatura del exterior?

R.: 720 000 cal

4. Un disco metálico pintado de negro (aproximadamente, cuerpo negro) tiene un radio de 10 cm y está a una temperatura de 100° C. ¿Qué cantidad de calor irradia en cada segundo?

R.: 8,4 cal

5. ¿Cuánto irradiará en el mismo tiempo, si su temperatura se eleva a 300° C?

R.: 46,6 cal

6. Frente a frente están colocados dos discos, separados por una distancia de 1 cm; entre ellos hay aire. Uno de los discos está a 20° C y el otro a 27° C. ¿Qué cantidad de calor recibe por segundo cada cm^2 del más frío por radiación, y cuánta por conducción?

R.: 0,011 cal y 0,0004 cal, respectivamente

29 NATURALEZA DEL CALOR

Calor y trabajo mecánico

Todos sabemos que, en ciertos casos, al realizar un trabajo mecánico se produce calor:

1) Si se dobla repetidamente un alambre, éste se calienta;

2) Cuando un auto frena bruscamente, las cubiertas se calientan.

Por otra parte, en ciertos casos es el calor el que puede producir un trabajo mecánico:

1) Cuando se tiene hirviendo una pava de agua, el vapor mueve la tapa;

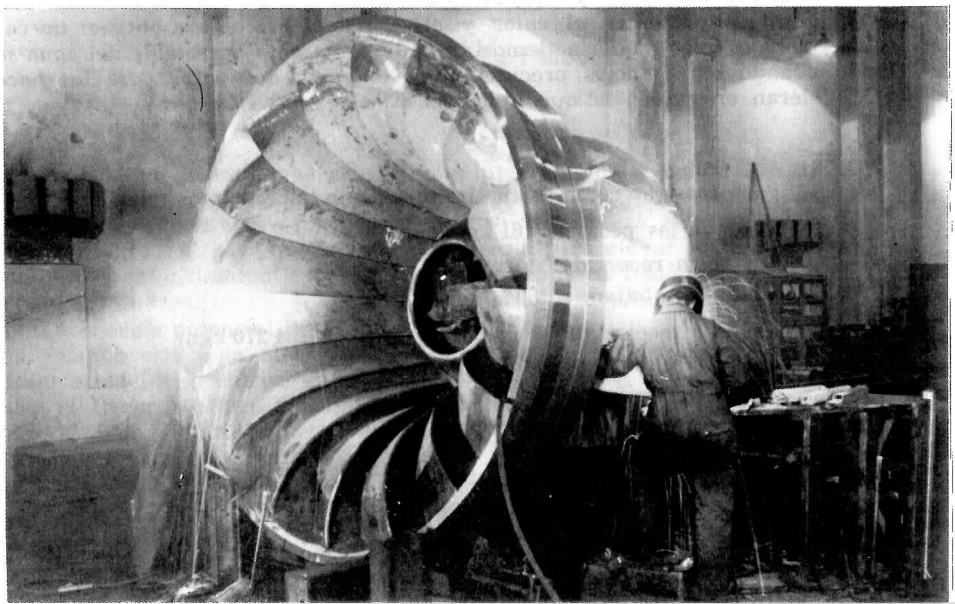
2) Una máquina de ferrocarril marcha merced al calor que se le entrega al agua de la caldera.

En resumen:

El trabajo puede transformarse en calor.
El calor puede transformarse en trabajo.

Si tenemos presente que la energía de un cuerpo es su capacidad de producir trabajo, resulta:

El trabajo puede transformarse en calor y, recíprocamente, el calor en trabajo.



El calor es una forma de energía.

y por lo tanto, *los fenómenos caloríticos son fenómenos energéticos.*

No obstante saber el hombre desde los tiempos prehistóricos que se puede producir calor efectuando un trabajo, sólo en una época reciente –en el siglo pasado– se establecieron en forma científica sus relaciones, que hasta entonces no se habían advertido conscientemente ni expresado en forma explícita.

Trabajo necesario para producir una determinada cantidad de calor

Tal fue el problema que se plantearon Joule y Mayer. La equivalencia entre el calor y el trabajo sólo quedaría demostrada cuando experiencias precisas pusieran en evidencia que toda vez que se transforme una misma cantidad de trabajo en calor, se obtendrá siempre la misma cantidad de calor.

Joule resolvió el problema mediante una ingeniosa experiencia, conocida con su nombre.

Experiencia de Joule

En el interior de un calorímetro con agua giran unas paletas movidas por dos pesas que caen. Se observa que durante la caída la temperatura del agua se va elevando: el trabajo se transforma en calor. Se tiene:

Calor producido: Q cal.

Trabajo de la pesa: T kgm;

Efectuando las mediciones se comprueba que siempre que se gastan 0,427 kgm de trabajo mecánico en producir calor, se obtiene 1 cal; luego:

$$1 \text{ cal} = 0{,}427 \text{ kgm}$$

Este valor se llama *equivalente mecánico de la caloría.*

EJEMPLO: *Para obtener un calentamiento apreciable del agua se emplean dos pesas y se las hace bajar unas 10 veces.*

Para mostrar cómo se realiza el cálculo supongamos que:

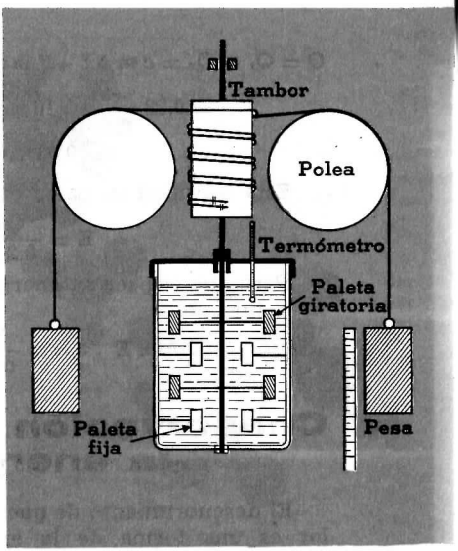
Peso de las pesas:	$61 \vec{\text{kg}}$.
Distancia recorrida:	7 m.
Veces que bajan:	10.
Trabajo mecánico:	$T = 61 \vec{\text{kg}} \cdot 7 \text{ m} \cdot 10 = 4\,270 \text{ kgm}$.
Masa de agua:	2 000 g.
Temperatura inicial:	20° C.
Temperatura final:	25° C.
Calor producido:	$Q = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 2\,000 \text{ g} \cdot 5° \text{ C} = 10\,000 \text{ cal}.$

Luego:

$$1 \text{ cal} = 0{,}427 \text{ kgm}.$$

Recíprocamente:

$$1 \text{ kgm} = 2{,}34 \text{ cal}.$$



PROBLEMA: *¿Cuántas calorías se necesitarán para producir un trabajo de 1 joule?*

$0{,}427 \text{ kgm} = 0{,}427 \cdot 9{,}8 \text{ J} \cong 4{,}18 \text{ J}$.

Luego:

$$4{,}18 \text{ J} = 1 \text{ cal}$$

$$1 \text{ J} = \frac{1}{4{,}18} \cong 0{,}24 \text{ cal}$$

$$\boxed{1 \text{ J} = 0{,}24 \text{ cal}}$$

Este valor se llama *equivalente calórico del joule.*

PROBLEMA: *Un auto de 5 000 kg marcha a 100 km/h, y frena. Calcular la cantidad de calor en que se transforma su energía cinética.* (Esa cantidad de calor se distribuye entre las gomas, el suelo, la cinta de los frenos, etc.).

La energía cinética es:

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2.$$

Trabajaremos en unidades M. K. S., de modo que

$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 27{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$E = \tfrac{1}{2} \cdot 5\,000 \text{ kg} \cdot \left(27{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cong 1\,932\,000 \text{ J}.$$

$$Q = 1\,932\,000 \text{ J} = 1\,932\,000 \cdot 0{,}24 \text{ cal} = 463\,680 \text{ cal}.$$

PROBLEMA: *¿Desde qué altura habrá que dejar caer un trozo de plomo de 10 g, que está a una temperatura de 57° C, para que se funda con el calor desarrollado en el choque?*

La energía potencial de la masa, cuando está a la altura h, se transforma íntegramente en cinética al llegar a altura 0; suponemos que no rebota, es decir, que queda en reposo, y por lo tanto, que la energía cinética se transforma íntegramente en calor. La cantidad de calor Q, necesario para que se funda, será la suma de la necesaria para elevar su temperatura hasta la de fusión, Q_1, más la necesaria para producir la fusión, Q_2 (para calcular esta última se multiplica la masa por el calor de fusión del plomo, que es la cantidad de calorías necesarias para fundir 1 g de plomo) *.

* Véase pág. 392.

$$Q = Q_1 + Q_2 = c\,m\,\Delta t + f\,m =$$

$$= 0{,}03\ \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 10\ \text{g} \cdot (327°\ \text{C} - 57°\ \text{C}) + 5{,}5\ \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 10\ \text{g} =$$

$$= 0{,}03 \cdot 10 \cdot 270\ \text{cal} + 55\ \text{cal} = 81\ \text{cal} + 55\ \text{cal} = 136\ \text{cal}.$$

Esta cantidad de calor equivale a una energía mecánica:

$$E = \frac{Q}{0{,}24}\ J = \frac{136}{0{,}24}\ J = 566{,}7\ J.$$

Para que ésa sea su energía potencial, la masa debe estar a una altura h, tal que:

$$mg\,h = E\ \therefore\ h = \frac{E}{mg} = \frac{566{,}7\ J}{0{,}010\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} \cong 5\,780\ \text{m}.$$

Conservación de la energía

El descubrimiento de que el calor es una forma de la energía, junto con el principio de la conservación de la energía mecánica (la energía potencial se transforma en cinética, y recíprocamente), condujo a Joule y a Mayer a pensar que todas las formas de la energía eran equivalentes, de modo que la energía era algo que permanecía constante, sean cuales fueren las transformaciones de un cuerpo. El mismo Joule calculó la relación entre el trabajo producido por la corriente eléctrica y el calor, y obtuvo los mismos valores que con la energía mecánica. Estos trabajos, y la imposibilidad de construir una máquina de movimiento continuo, fundamentaron la enunciación del principio de la conservación de la energía, que explicamos en el capítulo XXV.

El Joule, unidad de calor

Puesto que el calor es una forma de energía, las unidades de energía pueden medir cantidades de calor; la caloría, que fue inventada antes del descubrimiento de la equivalencia, no tiene objeto, y así, la IX Conferencia General de Pesas y Medidas, reunida en París en 1949, ha resuelto que no se expresen las cantidades de calor en calorías, sino en joules. Naturalmente que la costumbre hará que pasen años antes que la caloría sea dejada a un lado.

¿Qué es el calor?

Por la misma época en que se descubrió la equivalencia entre el calor y el trabajo se estaba desarrollando la teoría molecular de la materia, que permitió formarse una imagen coherente de lo que es el calor, y de todos los fenómenos en que interviene.

La teoría molecular de la materia se basa en ciertas hipótesis que permiten explicar todos los hechos observados. De ellas, las que nos interesa mencionar ahora son:

1) *Todos los cuerpos están formados por partículas pequeñísimas, llamadas moléculas.*

2) *Las moléculas no ocupan*

Todos los cuerpos están formados por moléculas que dejan entre sí espacios intermoleculares irregulares.

todo el volumen del cuerpo que forman: entre ellas hay espacios vacíos, llamados intermoleculares, cuyas dimensiones varían con el estado del cuerpo (sólido, líquido o gaseoso).

3) *Entre molécula y molécula se ejercen ciertas fuerzas, llamadas de cohesión.*

4) *Las moléculas están en movimiento.*

¿Cómo aprovechar la teoría molecular, comprobada por numerosos fenómenos, y que por lo tanto es una teoría bien construida, para explicar los fenómenos caloríricos? Haciendo las siguientes hipótesis:

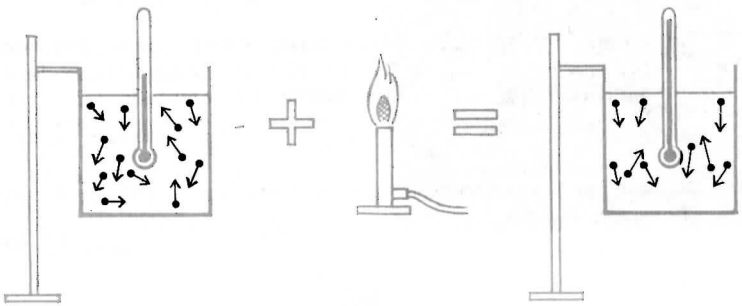
1. *El calor* (forma de energía) *que posee un cuerpo es la suma de las energías de sus moléculas.*

2. *La mayor o menor temperatura de un cuerpo se debe a la mayor o menor velocidad de sus moléculas.*

De esta manera se interpreta que: dar calor a un cuerpo, significa aumentar la energía mecánica de sus moléculas; quitarle calor, disminuir la energía mecánica de sus moléculas.

Un aumento o una disminución de la energía de las moléculas provocará, por lo general, un aumento o disminución de su velocidad, y por lo tanto, un aumento o una disminución de la temperatura del cuerpo; en otros casos, la variación de la energía de las moléculas provocará un cambio de estado del cuerpo, sin que haya variación de sus velocidades, es decir, sin que se produzca una variación de temperatura. Como veremos en el próximo capítulo, esto está de acuerdo con lo que sucede en los cambios de estado.

¿Cómo explicar, por ejemplo, la presión ejercida por un gas contra las paredes del recipiente que lo contiene? Suponiendo que esa



presión es el resultado de los innumerables choques de las moléculas en movimiento contra las paredes. Si bien la fuerza que ejerce cada una de ellas es extraordinariamente pequeña, es tan extraordinariamente grande el número de las que chocan, que la fuerza ejercida sobre la superficie es apreciable.

¿Cómo se explica que una misma sustancia, por ejemplo el agua, pueda estar líquida, sólida o en forma de vapor? Pues suponiendo que en cada uno de esos tres estados, las moléculas, si bien son las mismas, están dispuestas en diferentes formas: en el sólido ocupan, en general, vértices de cuerpos geométricos imaginarios, y se mantienen en ellos, vibrando alrededor de sus posiciones de equilibrio, merced a las fuerzas de cohesión. Las moléculas tienen energía cinética por su vibración, y energía potencial una con respecto a las otras. Al pasar al estado líquido abandonan sus posiciones fijas y disminuye la fuerza de cohesión. Y en el estado gaseoso, las moléculas han roto todo vínculo entre sí y vagan arbitrariamente por el espacio que ocupan.

La teoría construida basándose en esas hipótesis, permite explicar los fenómenos que conocemos; es, por lo tanto, una buena teoría, y lo será mientras no se descubra algún fenómeno que ella sea incapaz de explicar.

Por estar basada en el movimiento de las moléculas, se la llama *teoría mecánica o cinética del calor.*

Problemas

1. Se realiza la experiencia de Joule utilizando dos pesas de 500 $\vec{g}$ cada una, y haciéndolas bajar 10 veces. La masa de agua es de 250 g, y su temperatura inicial es de 10° C. ¿Cuál es su temperatura final?

R.: 10,2° C

2. ¿Por qué en la experiencia de Joule las pesas deben ir cayendo muy lentamente?

3. Un calentador eléctrico eleva hasta 100° C la temperatura de 500 g de agua que estaban a 20° C. *a)* ¿Cuántos kgm ha consumido la energía eléctrica? *b)* ¿Cuál es la potencia del calentador?

R.: *a)* 17 080 kgm; *b)* 279 watts

4. ¿Qué trabajo es necesario para calentar hasta 100° C, 2 litros de agua que están a 20° C?

R.: 670 000 J

30 LOS CAMBIOS DE ESTADO

Uno de los efectos del calor son los cambios de estado de los cuerpos. Así, por ejemplo, si se calienta agua se la puede transformar en vapor; si se la enfría se la puede convertir en hielo. Los cambios de estado que pueden producirse son:

SÓLIDO ⟶ (Fusión) / ⟵ (Solidificación) LÍQUIDO

LÍQUIDO ⟶ (Vaporización) / ⟵ (Condensación) VAPOR

SÓLIDO ⟶ (Volatilización) / ⟵ (Sublimación) VAPOR

Fusión y solidificación

Si se calienta un trozo de plomo se observará que en cierto momento comienza a fundirse; con un termómetro adecuado se comprobará que en ese momento su temperatura es de 327° C. Si se sigue

Fusión y modificación del agua en la naturaleza.

calentando, se logrará fundir todo el trozo, y cuando esté todo líquido se podrá elevar su temperatura hasta, por ejemplo, 400° C o más. Si se lo deja enfriar, en cierto instante comienza a solidificarse; si se mide la temperatura se encontrará que es de 327° C. Cuantas veces se haga la experiencia, y sea cual fuere la masa de plomo, se encontrará que la fusión o la solidificación del plomo comienza cuando se llega a la temperatura de 327° C.

Esa temperatura se llama *temperatura de fusión*, o *punto de fusión*, del plomo, y cada sustancia tiene el suyo.

TEMPERATURAS DE FUSIÓN

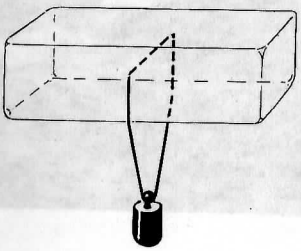
Anhídrido carbónico	− 57° C
Mercurio	− 39° C
Hielo	0° C
Parafina	54° C
Plata	960° C
Hierro	1 528° C
Plomo	327° C
Tungsteno	3 370° C
Aluminio	658° C
Platino	1 770° C

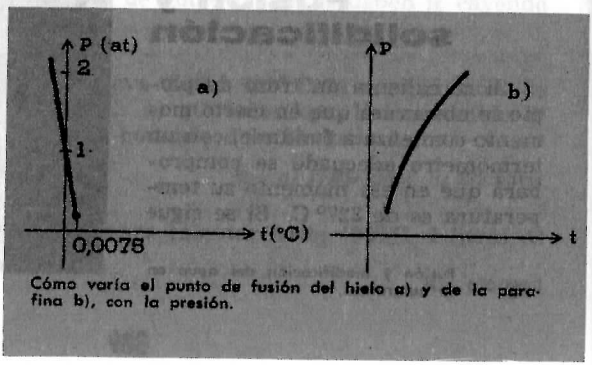
LA TEMPERATURA DE FUSIÓN DEPENDE DE LA PRESIÓN. Esto se puede comprobar diariamente en las heladeras a hielo. Cuando sobre el hielo se apoya una botella, al cabo de un tiempo se observa que el hielo se ha fundido más rápidamente en la parte que soporta la presión ejercida por la botella; esta presión hace que el punto de fusión disminuya, y como el hielo está a 0° C, en esa zona está por encima de su punto de fusión; luego, se funde.

También es muy conocida la experiencia de atravesar un trozo de hielo con un alambre del que se ha colgado una pesa: el alambre va atravesando el hielo, que se funde a su paso por el aumento de presión, pero por sobre el alambre el agua vuelve a solidificarse, pues desaparecido el aumento de presión, su punto de fusión vuelve a ser 0° C. Cuando cae granizo, si se recogen varios trozos y se los comprime entre sí se formará un bloque compacto.

El calor de fusión

Si se observa el termómetro durante las experiencias que realizamos con plomo, se comprueba que mientras dura la fusión o la solidificación, la temperatura permanece constante. Más sencillo es comprobarlo de la siguiente manera: dentro de un recipiente se colocan varios trozos de hielo, y se los expone al sol. El calor de éste irá fundiendo el hielo; si colocamos un termómetro en el recipiente, comprobaremos que mientras haya hielo, la temperatura se mantiene constantemente en 0° C. Pe-



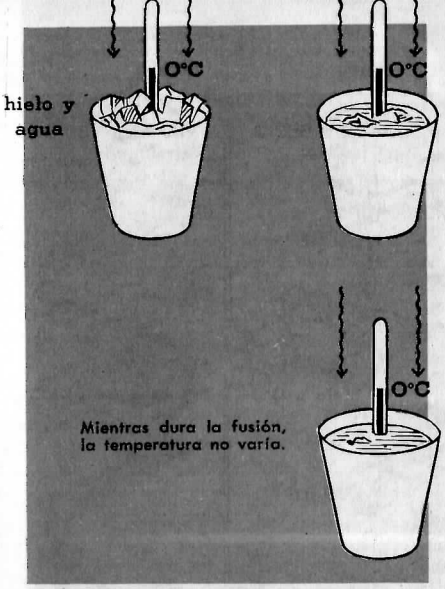


Cómo varía el punto de fusión del hielo a) y de la parafina b), con la presión.

ro en cuanto acabó de fundirse el último pedacito de hielo, comienza a ascender.

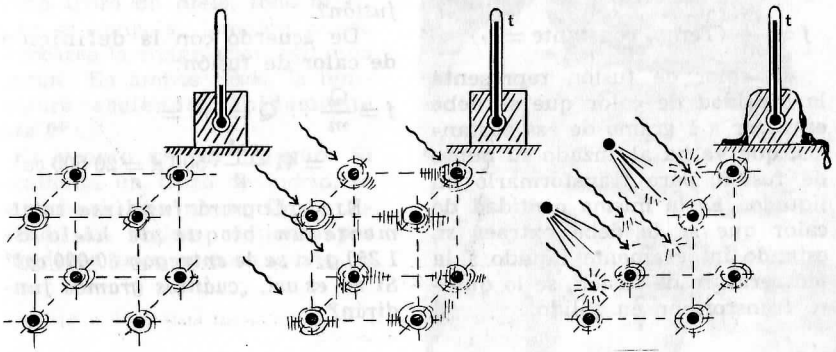
Esto es curioso: ¿cómo es posible que la temperatura se mantenga invariable, si constantemente se está suministrando calor?

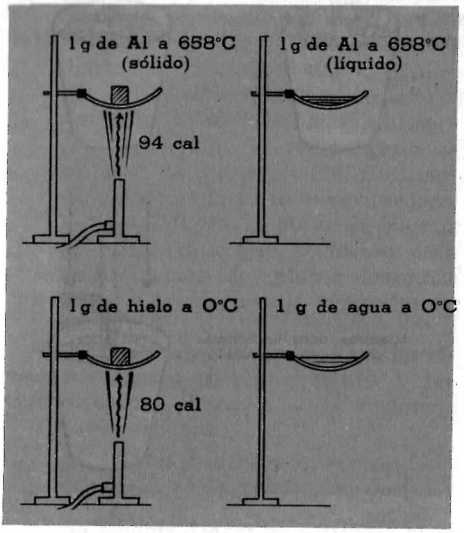
Si, a la inversa, se enfría cierta cantidad de agua, su temperatura irá disminuyendo, hasta llegar a 0° C. A partir de ese momento, si se le quita calor, el termómetro indicará que la temperatura sigue siendo 0° C; se va formando cada vez mayor cantidad de hielo, hasta que desaparece la última gota de agua. A partir de ese instante, cada vez que se le quite calor, el termómetro indicará un descenso de temperatura. Pero mientras duró la solidificación, a pesar de que se extraía calor, la temperatura permanecía constante. ¿De dónde salió esa cantidad de calor que no provoca cambios de temperatura? Lo que sucede es lo siguiente; el calor es una forma de energía, y cuando a un cuerpo se le entrega calor, emplea esa energía, por lo general, en aumentar su temperatura. Pero cuando el cuerpo está a la temperatura de fusión, empleará toda la energía (calor) que



se le entregue en transformarse en líquido, sin gastar nada en elevar su temperatura. A la inversa, cuando un líquido está a la temperatura de fusión, si se le extrae calor, el líquido lo cederá entregando la energía (calor) que le permitía mantenerse como líquido, y se transformará en sólido, pero no entregará la energía que le permite mantener su temperatura.

En los sólidos, las moléculas ocupan posiciones fijas, que generalmente son vértices de cuerpos geométricos. Allí vibran, y cuando reciben calor la vibración se hace cada vez más intensa (la temperatura aumenta) hasta que llega un momento –cuando se ha llegado a la temperatura de fusión– en que la vibración es tan fuerte que las moléculas saltan de su lugar. El calor de fusión se invierte en provocar esos saltos, y por eso la temperatura no aumenta.





La temperatura de fusión del aluminio es de 658° C y su calor de fusión 94 cal. Por eso, 1 g de Al a 658° C + 94 cal = 1 g de Al líquido a 658° C. La temperatura de fusión del hielo es 0° C y su calor de fusión 80 cal. Por eso: 1 g de hielo a 0° C + 80 cal = 1 g de agua a 0° C.

DEFINICIÓN: *Se llama calor de fusión,* f, *de una sustancia al cociente entre la cantidad de calor necesaria para hacerle pasar del estado sólido al líquido (o viceversa), y la masa,* m, *de esa sustancia, cuando está a la temperatura de fusión.*

En símbolos:

$$f = \frac{Q}{m} \text{ (Temp. constante} = t_f).$$

El calor de fusión representa la cantidad de calor que se debe entregar a 1 gramo de esa sustancia, que ya ha alcanzado su punto de fusión, para transformarlo en líquido. Es la misma cantidad de calor que se le debe extraer si, estando íntegramente líquido a la temperatura de fusión, se lo quiere transformar en sólido.

Se puede comprobar la existencia del calor de fusión de la siguiente manera: colóquense dos recipientes iguales, que contengan la misma masa de agua a la misma temperatura, por ejemplo, de 20° C. De una mezcla de agua y hielo que está a la temperatura de 0° C, échese en un recipiente 100 gramos de agua a 0° C, y en el otro 100 gramos de hielo a 0° C. Con dos termómetros se comprobará que la temperatura desciende más en el recipiente donde se echó el hielo.

En resumen:

1, cada sustancia tiene su temperatura de fusión;
2, la temperatura de fusión depende de la presión exterior;
3, cada sustancia tiene su calor de fusión.

CALOR DE FUSIÓN DE ALGUNAS SUSTANCIAS (en cal/g)

Aluminio	94
Cobre	41
Hierro	49
Mercurio	2,8
Plomo	5,5
Cinc	23
Hielo	80

EJ.: *¿Cuántas calorías se necesitan para fundir 500 g de cobre que ya están a su temperatura de fusión?*

De acuerdo con la definición de calor de fusión:

$$f = \frac{Q}{m} \therefore Q = f\,m =$$

$$= 41 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 500 \text{ g} = 20\,500 \text{ cal}.$$

EJ.: *¿Logrará fundirse totalmente un bloque de hielo de 1 250 g, si se le entregan 80 000 cal? Si no es así, ¿cuántos gramos fundirán?*

El calor necesario para fundir 1 250 g de hielo es:

$$Q = f \cdot m = \\ = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 1\,250\ \text{g} = 100\,000\ \text{cal}$$

Luego, no alcanza a fundirse totalmente, y sólo funde una masa:

$$m' = \frac{Q'}{f} = \\ \cong \frac{80\,000\ \text{cal}}{80 \frac{\text{cal}}{\text{g}}} = 1\,000\ \text{g}.$$

AGUA LÍQUIDA A TEMPERATURA BAJO 0° C: SOBREFUSIÓN. Si se enfría agua pura, se puede pasar por debajo de la temperatura 0° C sin que se produzca la solidificación. Este fenómeno se llama *sobrefusión.*

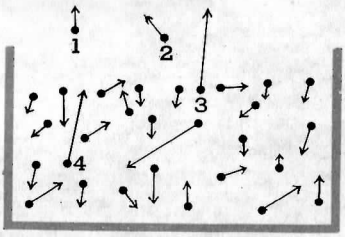
Para que se produzca es necesario que el agua esté libre de toda impureza y en completo reposo. Se pueden alcanzar así temperaturas de varias decenas de grados bajo cero. En trabajos especiales, B. M. Cwilong observó la presencia, dentro de un recipiente, de gotas de agua líquida que formaban una nube, que también contenía cristales de hielo, a una temperatura de — 70° C.

Puede comprobarse que si se tiene agua sobreenfriada y se arroja dentro del recipiente un pequeñísimo trozo de hielo, todo el líquido se congela; también puede provocarse la congelación agitando el agua. En ambos casos, la temperatura asciende rápidamente hasta 0° C.

EL VIDRIO ES UN LÍQUIDO. Si se calienta un trozo de vidrio, se comprobará que no se funde siguiendo las reglas: comienza por ablandarse poco a poco, y no se

Una masa de vidrio fundido es moldeada por un operario especializado usando una paleta.

Fusión y solidificación. Cera fundida vertiéndose en moldes para su solidificación.



En la evaporación, escapan las moléculas de alta velocidad.

observa una *fusión franca*; por lo contrario, la que presenta se llama *fusión pastosa*. Es el mismo caso de la cera, el lacre, etc.

La explicación aceptada es sorprendente: no son sólidos, sino líquidos extraordinariamente viscosos, tanto que, a la temperatura ordinaria, tienen el aspecto de sólidos. Al calentarlos, la viscosidad va disminuyendo gradualmente, y en eso consiste la fusión pastosa. Cuando se formuló esta hipótesis, a un hombre de ciencia se le ocurrió el siguiente razonamiento: Si el vidrio es un líquido, por grande que sea su coeficiente de viscosidad algo debe de fluir, aunque se necesitaran años para producirse. Midió el espesor de los vidrios de la Catedral de Colonia, construida hace siglos, y comprobó que desde la parte superior hacia la base, el espesor de los vidrios aumentaba; el vidrio había fluido.

Vaporización (evaporación y ebullición) y condensación

La evaporación

Para que un sólido se transforme en líquido una vez alcanzado el punto de fusión, necesita una cierta cantidad de calor para que sus moléculas pasen de la estructura sólida a la líquida. En la vaporización ocurre algo semejante: la estructura molecular del líquido y del vapor difieren en que en aquél todavía es importante la fuerza de cohesión, y las moléculas, aunque no tanto como en el sólido, siguen vinculadas a sus vecinas. De acuerdo con la teoría cinética, a cada temperatura las moléculas tienen una velocidad *promedio* característica de esa temperatura, pero si bien a determinada temperatura el promedio de las velocidades es característico, individualmente hay moléculas cuyas velocidades difieren mucho entre sí; algunas son muy lentas, comparadas con el promedio, y otras, muy rápidas. De éstas, hay algunas que tienen una velocidad tal, que les permitiría escapar a la fuerza de atracción de sus vecinas, si no fuera que hay tantas, que inmediatamente caen en el radio de acción de otras, y moderan su velocidad. Sin embargo, las moléculas de alta velocidad que se encuentran en la superficie aprovechan cualquier aporte de energía (calor), y logran vencer la fuerza de cohesión y escapar del líquido: se han evaporado.

DEFINICIÓN: *Se llama evaporación al pasaje de un líquido de ese estado al de vapor, efectuado exclusivamente en la superficie libre del líquido.*

La rapidez con que se produce la evaporación depende, entre otros factores, de la naturaleza del líquido. Los llamados *volátiles* (alcohol, bencina, éter, etc.) se evaporan rápidamente, mientras

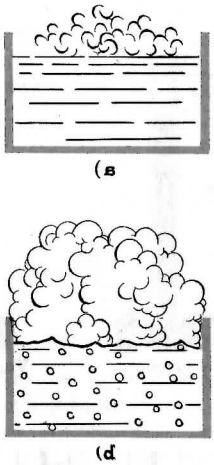
que otros, como los aceites, el mercurio, etc., lo hacen muy lentamente, por lo cual se les llama *no volátiles*.

La imagen que nos hemos formado de la evaporación explica por qué sentimos frío cuando nos mojamos las manos: primero escapan las moléculas más veloces (más calientes); el promedio de las velocidades disminuye, y en consecuencia, baja la temperatura del líquido; pasa, por lo tanto, mayor cantidad de calor de la mano al líquido, y escapan más moléculas. El proceso continúa hasta que todo el líquido se ha evaporado, quitándonos para ello cierta cantidad de calor. Por esa razón, cuando en verano se riegan los patios y las calles se siente más fresco, pues, para evaporarse, las moléculas de agua quitan calor al ambiente; los nativos de las zonas tórridas riegan los techos de sus chozas abundantemente, para combatir el calor.

La ebullición

Si se eleva la temperatura de un líquido cada vez más, se llega a una temperatura en que las moléculas alcanzan una velocidad promedio que las capacita para escapar en forma de vapor, sea cual fuere su posición dentro del líquido. En esas condiciones, cualquier cantidad de calor que les llegue del exterior es aprovechada por las moléculas del líquido para romper sus vínculos con las vecinas y escapar en forma de vapor: el líquido está en *ebullición*.

DEFINICIÓN: *Se llama ebullición al pasaje de un líquido de ese estado al de vapor, efectuado en cualquier parte del líquido, y no solamente en la superficie.*



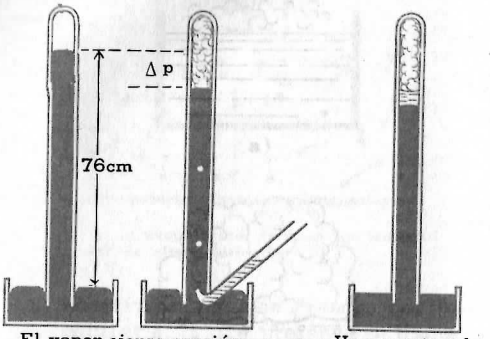
En la evaporación, **a**, la vaporización se produce en la superficie; en la ebullición, **b**, la vaporización se produce en toda la masa.

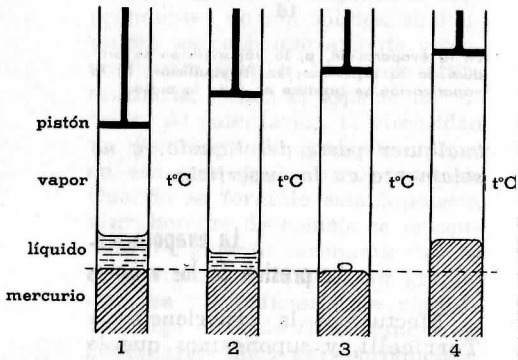
La evaporación. La presión de los vapores

Efectuemos la experiencia de Torricelli, y supongamos que la presión atmosférica sea de 76 cm de Hg. Si introducimos en el tubo, por su parte inferior, unas gotitas de líquido, suben por el mercurio, y al llegar al vacío de Torricelli se las ve transformarse en vapor. Simultáneamente se observará que la columna baja un poco, lo que indica que el vapor ejerce cierta presión, que puede calcularse midiendo el descenso que se produjo.

El vapor, ¿se comportará como un gas? ¿Cumplirá, por ejemplo, con la ley de Boyle-Mariotte? Para responder, realicemos experiencias.

Si agregamos una nueva cantidad de líquido, observaremos que también se evapora al llegar a la





parte superior, y que la presión del vapor aumenta. Si se agrega más líquido, la presión aumenta, pero llega un momento en que la vaporización no se produce, y queda líquido sobre la superficie del mercurio. Desde ese momento la presión no aumenta más, aunque se siga agregando líquido: *el vapor se ha saturado.*

DEFINICIÓN: *Se dice que un ambiente está saturado de vapor, o que contiene vapor saturado, cuando no puede contener más vapor del que ya contiene a esa temperatura.*

Supongamos que el extremo del tubo de Torricelli está cerrado con un pistón, como indica la figura.

Si se comienza a levantar el pistón se observará que la presión no varía, a pesar de que el volumen aumenta. Es que al aumentar el volumen aumenta el espacio disponible para vapor, de modo que ahora puede evaporarse otra porción de líquido, y esa nueva masa de vapor compensa la pérdida de presión que, en principio, se produciría por el aumento de volumen.

Si se bajara el pistón se observaría que a pesar de disminuir el volumen, la presión seguiría constante; y aparecería más líquido en la superficie del mercurio, indicando la condensación de una parte del vapor.

Si se sigue haciendo subir el pistón, el líquido continúa evaporándose, hasta que llega un momento en que desaparece la última gota de líquido. Hasta ese instante, la presión del vapor permaneció constante, a pesar de las variaciones de volumen: a partir de él, un aumento de volumen provoca una disminución de presión. El vapor comienza a cumplir, en forma aproximada, la ley de Boyle-Mariotte, con tanta mayor precisión cuanto más alejado esté de su presión de saturación.

De la experiencia anterior resulta que:

1) *A temperatura constante, y mientras el vapor esté saturado, su presión es constante, cualquiera sea el volumen.*

2) *La presión de saturación es la máxima que puede tener el vapor a esa temperatura.*

3) *Cuando desaparece el líqui-*

do, el vapor deja de ser saturado, y se comporta aproximadamente como un gas. En este estado, el vapor se llama *no saturado*, o *sobrecalentado*. Este último nombre se debe a que se lo puede volver a saturar enfriándolo.

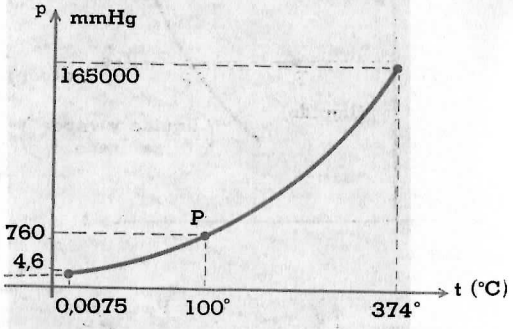
De acuerdo con la conclusión 2) podemos *definir* la presión de saturación de un vapor diciendo que es la máxima presión de un vapor a una determinada temperatura.

Variación de la presión de saturación con la temperatura

Si se calienta un líquido, se observa que la presión de saturación aumenta, y, por lo contrario, disminuye si la temperatura baja.

Se comprobará que a cada temperatura corresponde una presión de saturación determinada que es distinta para los diferentes líquidos.

Si los valores que así se obtienen se llevan a un sistema de ejes coordenados, se obtiene una curva como la de la figura.

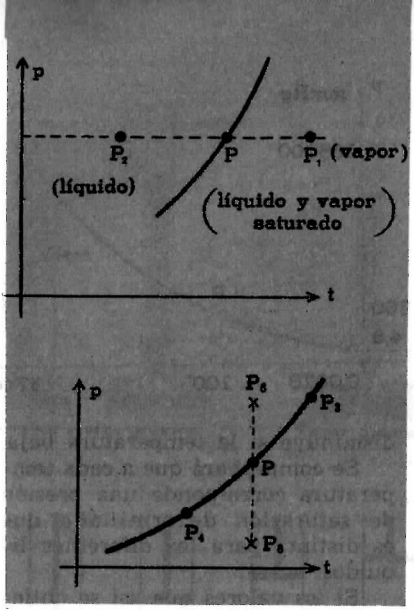


Presiones de saturación del vapor de agua

t (°C)	p (mm Hg)	t (°C)	p (mm Hg)
— 10	1,96	60	149,6
— 5	3,02	70	233,9
— 2	3,89	80	355,4
— 1	4,22	90	526
0	4,58	100	760
1	4,92	110	1 074
2	5,29	125	1 740
5	6,54	150	3 568
10	9,21	200	11 650
20	17,55	250	29 770
30	31,86	300	64 300
40	55,40	350	132 710
50	92,6	374	165 450

¿Qué representan los puntos de la curva de presión de saturación?

Sea el punto P. A la temperatura y presión que le correspon-



den, el agua está en equilibrio con su vapor saturado. Aquí la palabra equilibrio significa que si se vaporiza agua, inmediatamente se condensa vapor, de modo que la masa de cada uno no varía salvo que desde el exterior se entregue calor. Si la entrega se hace manteniendo *constante la presión*, el volumen aumentará, y también la masa de vapor saturado, mientras que la *temperatura permanece constante*: el punto representativo no se ha movido, y sigue siendo P.

Si se sigue entregando calor, aumentará, a expensas del líquido, la masa de vapor saturado, hasta que llegue un momento en que se acabe todo el líquido. Hasta ese momento la temperatura permaneció constante; a partir de él, una entrega de calor, manteniendo constante la presión, hará que aumente la temperatura del vapor, que dejará de ser saturado, por lo que el punto representativo saldrá de la curva, ubicándose a la derecha de la misma, en una posición como la del punto P_1.

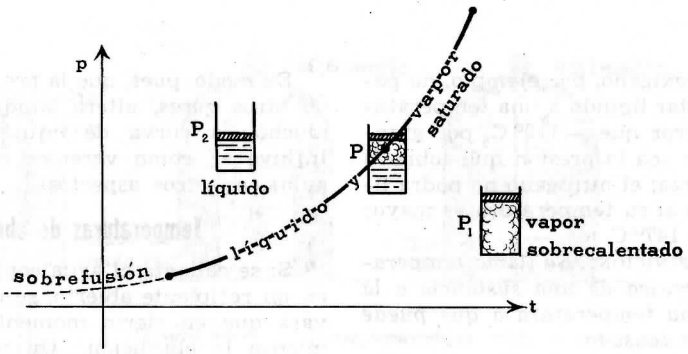
Si, por lo contrario, al líquido en equilibrio con su vapor se le extrae calor, manteniendo *constante la presión*, será el líquido el que aumente su masa, a expensas de la del vapor, hasta que desaparezca la última partícula de vapor (la tapa del recipiente estará en contacto con el líquido). Si se sigue extrayendo calor, la temperatura del líquido disminuirá, y el punto representativo de su estado saldrá de la curva para ubicarse en una posición tal como la de P_2.

Partiendo siempre de P, se entrega calor, manteniendo *constante* ahora *el volumen* del recipiente. Aumenta la cantidad de vapor saturado, pero como el volumen se ha mantenido constante, ese aumento provoca un aumento de la presión: el punto representativo se desplaza hacia arriba y a la derecha (P_3), *sobre la curva representativa*. Si se extrae calor, el punto se desplaza sobre la curva hacia abajo y a la izquierda (P_4).

Explíquese cómo se podría pasar a los puntos P_5 y P_6.

¿Qué representan los puntos exteriores a la curva?

De acuerdo con lo dicho anteriormente, los puntos tales como el P_1 representan la zona donde el agua sólo puede tener existencia estable como vapor. Los puntos tales como el P_2 representan las condiciones en que el agua sólo puede tener existencia estable como líquido. Si en las condiciones de P_1 colocamos agua y vapor en un recipiente, el agua se vaporizará totalmente; si colocamos agua y vapor en las condiciones de P_2, el vapor se condensará totalmente.



La curva representa, pues, las condiciones para que el líquido esté en equilibrio con su vapor, es decir, para que éste esté saturado. Por eso se llama *curva de equilibrio del líquido con su vapor.*

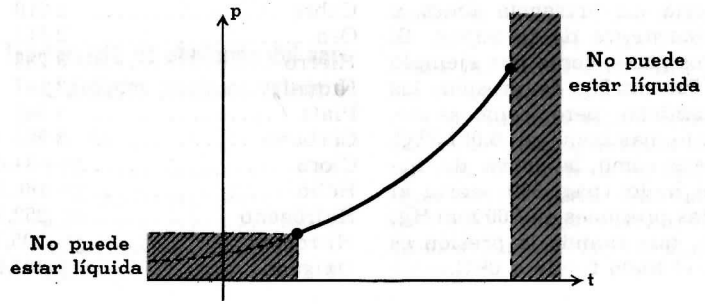
¿Qué significan los extremos de la curva?

La curva tiene un principio y un fin. El principio es el punto de coordenadas $p = 4{,}6$ mm Hg, $t = 0{,}007\,5°$ C; a una temperatura o a una presión menor que las de ese punto, el agua no puede estar, normalmente, como líquida. Si lo está, es en un estado de equilibrio inestable (sobrefusión), que una pequeña perturbación destruirá rápidamente, pasando a vapor o a sólido.

El otro extremo representa un punto cuya temperatura es tal, que a una temperatura mayor el agua no puede estar líquida. El punto se llama *punto crítico*, y sus coordenadas, *presión* y *temperatura críticas*. Para el agua tienen los siguientes valores: $p = 165\,450$ mm Hg; $t = 374°$ C.

Temperatura y presión críticas de algunas sustancias

	t_c (°C)	P_c (at.)
Agua	374	217,7
Hidrógeno	−240	12,8
Anhídrido carbónico	31	73
Nitrógeno	−147	34
Amoníaco	130	114
Helio	−268	2,3
Oxígeno	−119	51
Cloro	146	93,5



El oxígeno, por ejemplo, no podrá estar líquido a una temperatura mayor que — 119° C, por grande que sea la presión que sobre él se ejerza; el nitrógeno no podrá licuarse si su temperatura es mayor que — 147° C.

DEFINICIÓN: *Se llama temperatura crítica de una sustancia a la máxima temperatura a que puede ser condensada.*

DEFINICIÓN: *Se llama presión crítica a la presión necesaria para condensar un vapor que está a su temperatura crítica.*

Vapor saturado en presencia de otro gas

Hemos encontrado que por debajo de la temperatura 0,007 5° C, no puede, normalmente, haber agua líquida. Esto significa que el hielo se forma a partir de esa temperatura, y no a los 0° C. ¡Pero cómo, si al termómetro lo hemos construido de modo tal que el 0° C corresponda a la temperatura de fusión del hielo, es decir que *por definición de 0° C*, hay agua líquida a 0° C!

Lo que sucede es sólo una contradicción aparente. Hemos estudiado la curva de equilibrio, únicamente para el caso en que el líquido está en presencia *única y exclusivamente de su vapor*. Si hay otros gases, como por ejemplo aire a 760 mm Hg de presión, las cosas cambian, pero, como se ve, solamente cambian en 0,007 5° C. Obsérvese cómo la curva de fusión del hielo (pág. 390) corta al eje de las presiones en 760 mm Hg; es decir, que cuando la presión es de 1 at, el hielo funde a 0° C.

De modo, pues, que la presencia de otros gases, altera aunque no mucho, la curva de equilibrio. Influye sí, como veremos en seguida, en otros aspectos.

Temperaturas de ebullición

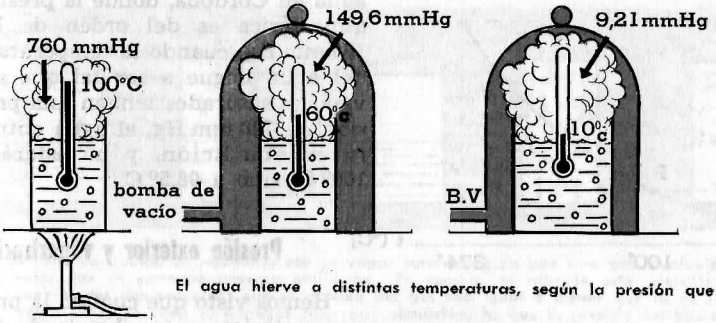
Si se calienta el agua contenida en un recipiente abierto, se observará que en cierto momento comienza la ebullición. Un termómetro indicará que la temperatura es de 100° C. Ésta es la temperatura de ebullición del agua cuando la presión atmosférica es de 760 mm Hg, sea cual fuere la masa de agua calentada.

Cada sustancia tiene su temperatura de ebullición, a la presión atmosférica.

Esto señala una diferencia fundamental entre la ebullición y la evaporación. Mientras que la ebullición se produce a una determinada temperatura, la evaporación ocurre a cualquier temperatura.

Temperaturas de ebullición de algunas sustancias a 760 mm Hg

Agua	100 °C
Alcohol etílico	78,3 °C
Alcohol metílico	64,7 °C
Nafta	de 70 a 90 °C
Éter	34,5 °C
Glicerina	291 °C
Cromo	2 200 °C
Cobre	2 310 °C
Oro	2 611 °C
Hierro	3 235 °C
Níquel	3 147 °C
Plata	1 948 °C
Carbono	3 927 °C
Cloro	— 34,6 °C
Helio	— 268,9 °C
Hidrógeno	— 252,7 °C
Nitrógeno	— 195,7 °C
Oxígeno	— 182,9 °C



El agua hierve a distintas temperaturas, según la presión que soporte.

La temperatura de ebullición depende de la presión

Si se tiene agua en un recipiente abierto, ya hemos visto que entra en ebullición a los 100° C. Si, como indica la figura, se coloca el recipiente debajo de una campana de vacío, se observa que a medida que disminuye la presión del aire, disminuye la temperatura de ebullición. Se puede, así, tener agua hirviendo a 60° C, 40° C, 10° C, 5° C, pero esto cuando la presión del aire vale, respectivamente, 149,6; 55,40; 9,21 y 6,54 mm Hg. Aun a 0° C se puede tener agua hirviendo, pero ello cuando la presión sea de 4,58 mm Hg.

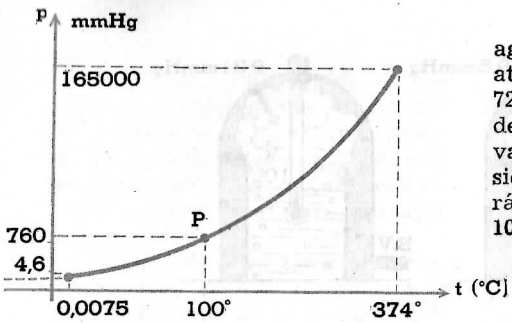
Si la presión exterior, en cambio, es mayor que una atmósfera, la temperatura de ebullición del agua es superior a los 100° C.

Temperatura de ebullición del agua a distintas presiones exteriores

p en mm de Hg	*t en °C*
1,96	−10
3,02	− 5
3,89	− 2
4,22	− 1
4,58	0
4,92	1
5,29	2
6,54	5
9,21	10
17,55	20
31,86	30
55,40	40
92,6	50
149,6	60
233,9	70
355,4	80
526	90
760	100
1 074	110
1 740	125
3 568	150
11 650	200
29 770	250
64 300	300
132 710	350
165 450	374

Se puede construir una curva que represente estos valores, llevando en abscisas las temperaturas de ebullición del agua y en ordenadas las correspondientes presiones exteriores.

Comparemos esta curva, o, lo que es lo mismo, la tabla de valores con la curva de equilibrio del agua con su vapor saturado (página 505): encontraremos que son iguales, aunque representan cosas diferentes.



El punto P tiene coordenadas *100° C* y *760 mm Hg*; en la curva de saturación significa que la presión de saturación del vapor de agua vale *760 mm Hg* a *100° C*; en la curva de ebullición, en cambio, significa que el agua hierve a *100° C* si la presión exterior es de *760 mm Hg*. Conclusión:

El agua hierve cuando la presión exterior es igual a la presión de su vapor saturado.

Por ejemplo, ¿cuál debe ser la presión exterior, para que el agua hierva a 70° C? Como a 70° C la presión de su vapor saturado es de 233,9 mm Hg, el agua hervirá cuando la presión exterior sea de 233,9 mm Hg.

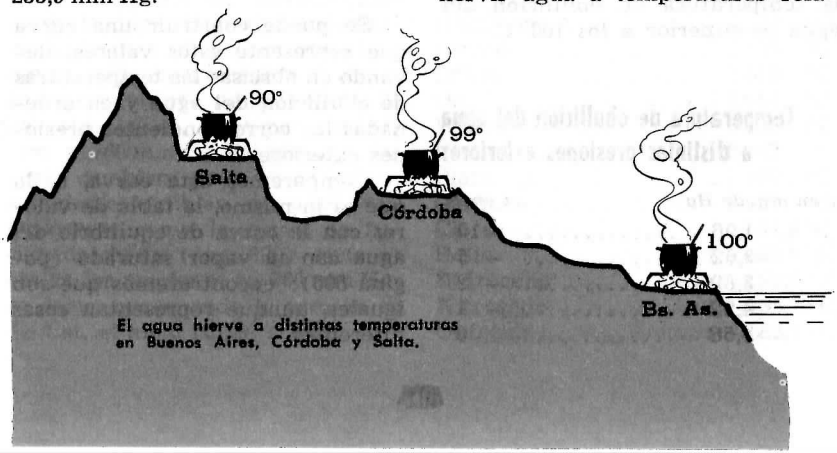
Si, por ejemplo, se calienta agua en Córdoba, donde la presión atmosférica es del orden de los 720 mm Hg, cuando la temperatura del agua llegue a ser tal que sus vapores saturados tengan una presión de 720 mm Hg, el agua entrará en ebullición, y no estará a 100° C, sino a 98,5° C.

Presión exterior y vaporización

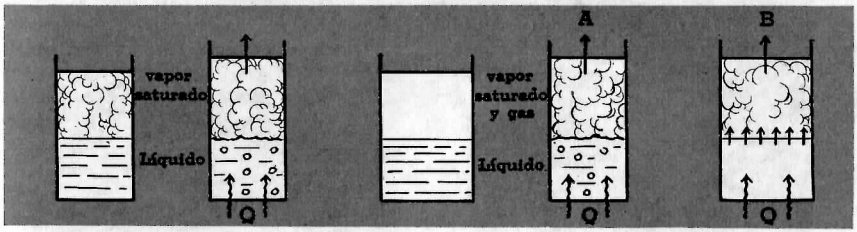
Hemos visto que cuando la presión exterior es *igual* a la de los vapores saturados, el líquido entra en ebullición (se puede comprobar que también cuando la presión exterior es *menor* que la de saturación, entra en ebullición). En cambio, la evaporación se produce cuando la presión exterior es *mayor* que la de saturación. Esto último es lo que ocurre cuando se tiene un recipiente con agua al aire libre: supongamos que la temperatura sea de 20° C; la presión del vapor saturado, a esa temperatura es de 17,55 mm Hg, de modo que, como la presión atmosférica es del orden de 760 mm Hg, la vaporización se produce por evaporación.

Cómo hervir agua con agua fría

Una manera sencilla de hacer hervir agua a temperaturas rela-



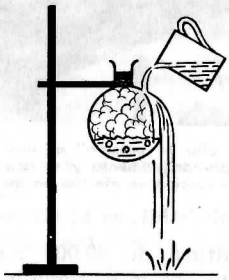
El agua hierve a distintas temperaturas en Buenos Aires, Córdoba y Salta.



Si se tiene un líquido en equilibrio con su vapor saturado y no hay otro gas, cualquier cantidad de calor que se entregue provoca ebullición. En cambio, si además está presente otro gas, pueden suceder dos cosas: a) que la presión del gas **sea igual o menor** que la de los vapores saturados, en cuyo caso, al entregar calor hay **ebullición**; b) que la presión del gas sea **mayor**, en cuyo caso hay **evaporación.**

tivamente bajas es la siguiente: se hace hervir agua dentro de un balón abierto. Si la presión exterior es de 760 mm Hg, la ebullición se producirá a 100° C. Se saca el balón del fuego, se lo tapa cuidadosamente y se lo coloca en un soporte. Si se echa agua fría sobre el balón, el agua, que había dejado de hervir, entra nuevamente en ebullición, pues al descender la temperatura del aire en su interior, descendió también la presión que soporta el agua, hasta llegar a la presión de saturación de sus vapores, a la nueva temperatura, que es inferior a 100° C.

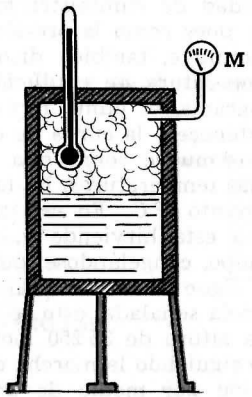
Como se comprenderá, también es posible hacer hervir agua que esté a una temperatura de 0° C: basta hacer el vacío en el recipiente que la contiene, hasta que la presión del aire sea de 4,6 mm Hg.



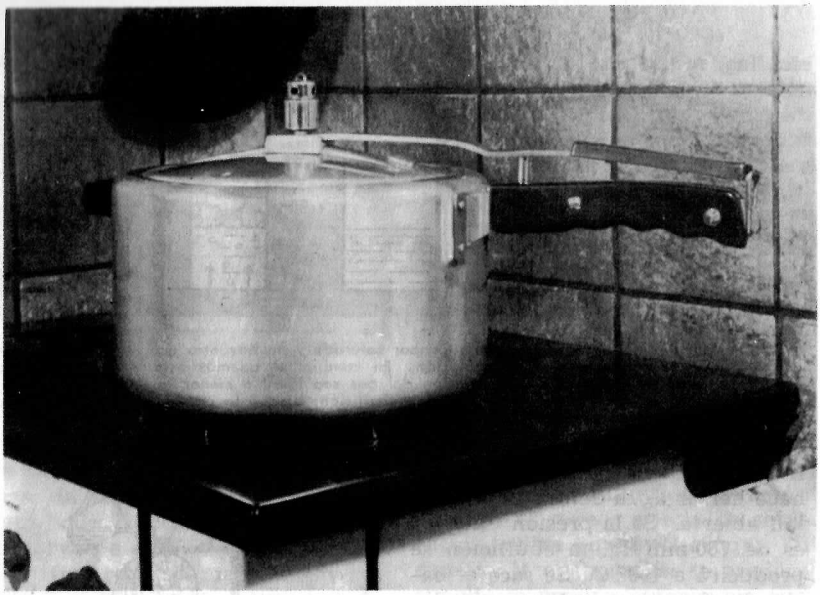
Hirviendo agua con agua fría.

Agua hirviendo . . . hasta congelar

En el año 1949 se realizó una experiencia con un instrumento, el *hipsómetro*, cuyo funcionamiento está basado en la curva de equilibrio del agua con su vapor, y que se utiliza para medir alturas en la atmósfera. Se logró medir hasta



A mayor presión, mayor temperatura de ebullición.



La "olla de presión" es una moderna marmita de Papin. Como el vapor no escapa, la presión aumenta y el agua puede calentar a temperaturas superiores a los 100° C, y la cocción se efectúa en mucho menos tiempo.

una altura de 40 000 metros. El principio es muy sencillo, pues se basa en que si al nivel del mar se hace hervir agua, y luego mediante un globo sonda se lo hace elevar por el aire, a medida que asciende sigue hirviendo, sin necesidad de suministrarle más calor, pues como la presión exterior disminuye, también disminuye su temperatura de ebullición. En el diagrama, el punto representativo pertenece a la curva de equilibrio, y se mueve sobre ella hacia las bajas temperaturas, hasta alcanzar el punto 0° C. En ese instante, el agua está hirviendo y, al mismo tiempo, congelándose, pues el globo sigue subiendo. En la experiencia señalada, esto se produjo a una altura de 35 250 metros, y se fue siguiendo la marcha de la ebullición por medio de un aparato que desde el globo emitía señales radioeléctricas.

La "olla de presión"

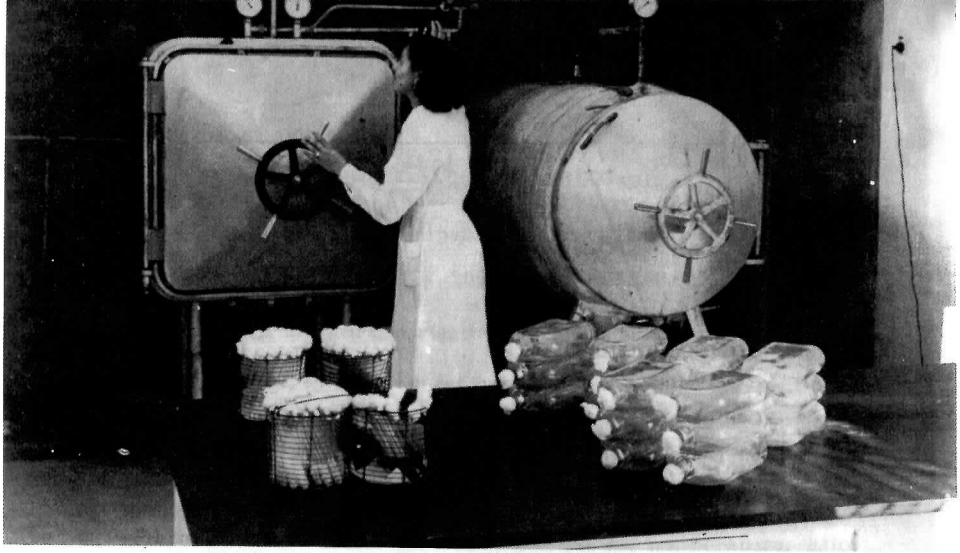
Para dar al agua temperaturas superiores a 100° C, basta calentar y mantener constante el volumen. Esto se puede hacer en ollas para cocina que cierran herméticamente y permiten cocinar los alimentos a temperaturas mayores que 100° C y a presión mayor de 760 mm Hg, lo que acelera el proceso.

El principio tiene también aplicación en los autoclaves, que se utilizan para la esterilización de instrumental.

Las leyes de la ebullición

Del estudio de la curva de equilibrio entre líquido y vapor resulta que:

1) *Cada líquido tiene su temperatura de ebullición, que es aquélla a la cual la presión de sus*



La esterilización de instrumentos diversos se realiza en autoclaves, otra versión de la marmita de Papin.

vapores saturados es igual a la presión exterior.

2) *Durante la ebullición, la temperatura y la presión permanecen constantes.*

Calor de vaporización

Aquí cabría repetir la pregunta que se hizo al tratar de la fusión: ¿Qué se hace del calor entregado al producirse la vaporización, puesto que *la temperatura no se eleva*? Ahora, la respuesta es evidente: se emplea en producir el cambio de estado.

DEFINICIÓN: *Se llama calor de vaporización de una sustancia, al cociente entre la cantidad de calor que hay que entregarle para vaporizarla cuando su temperatura es la de ebullición, y la masa de la misma.*

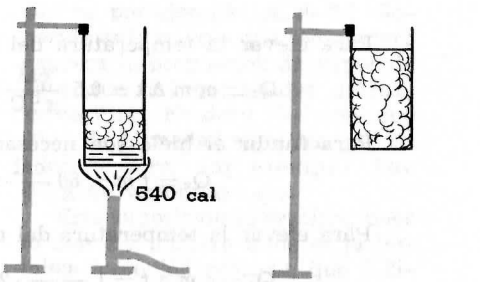
En símbolos:

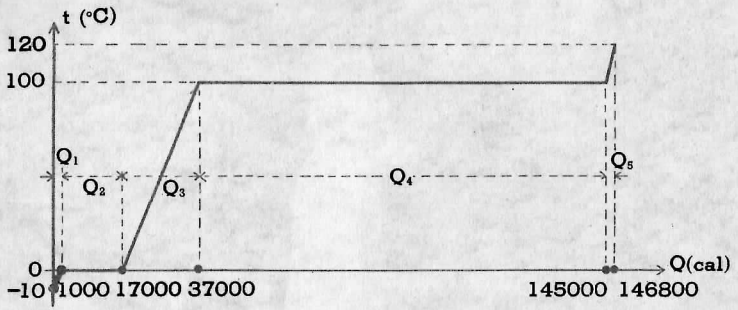
$$v = \frac{Q}{m}$$

(cuando está a la temperatura de ebullición).

Representa la cantidad de calor que hay que entregar a 1 g de la sustancia para vaporizarla cuando está en ebullición, y también la cantidad de calor que se desprende de la sustancia cuando se condensa a la temperatura de ebullición.

1 g de agua a 100° C + 540 cal = 1 g de vapor de agua a 100° C.





Variación de la temperatura con la cantidad de calor entregada.

Calor de vaporización de algunas sustancias (en cal/g)

Agua	540
Amoníaco	300
Mercurio	356
Helio	5,6
Hidrógeno	5,6
Nitrógeno	476
Plomo	175
Cinc	475

EJ.: *Se tienen 500 g de agua líquida a 100° C y 760 mm Hg. ¿Qué cantidad de calor es necesaria para vaporizarlos?*

$$Q = v\,m = 540\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 500\ \text{g} = 270\,000\ \text{cal}.$$

EJ.: *Se condensan 300 g de vapor de agua a 100° C y 760 mm Hg. ¿Cuánto calor se ha desprendido si al final se tienen 300 g de agua líquida a 100° C?*

$$Q = v\,m = 540\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 300\ \text{g} = 162\,000\ \text{cal}.$$

Se comprende, pues, que si se quiere calentar un líquido cualquiera echándole agua a 100° C, es mucho más eficaz entregarle 100 g de vapor y no 100 g de líquido en ebullición, aunque estén a la misma temperatura.

EJ.: *Se tienen 200 g de hielo a − 10° C. Calcular la cantidad de calor necesaria para transformarlos en 200 g de vapor no saturado, a 120° C (la presión exterior es de 760 mm Hg, el calor específico del hielo: 0,5* $\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$ *y el del vapor de agua: 0,45* $\frac{\text{cal}}{\text{g °C}}$.

Para elevar la temperatura del hielo hasta 0° C hay que entregar:

$$Q_1 = c_1\,m\,\Delta t = 0{,}5\,\frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 200\ \text{g} \cdot 10°\ \text{C} = 1\,000\ \text{cal}.$$

Para fundir el hielo son necesarias:

$$Q_2 = f\,m = 80\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 200\ \text{g} = 16\,000\ \text{cal}.$$

Para elevar la temperatura del agua hasta 100° C se necesitan:

$$Q_3 = c\,m\,\Delta t = 1\,\frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 200\ \text{g} \cdot 100°\ \text{C} = 20\,000\ \text{cal}.$$

Para vaporizar el agua:

$$Q_4 = v\, m = 540\ \frac{\text{cal}}{\text{g}} \cdot 200\ \text{g} = 108\,000\ \text{cal}.$$

Y finalmente, para elevar la temperatura del vapor hasta 120° C:

$$Q_5 = c_2\, m\, \Delta t = 0{,}45\ \frac{\text{cal}}{\text{g}\,^\circ\text{C}} \cdot 200\ \text{g} \cdot 20^\circ\ \text{C} = 1\,800\ \text{cal}.$$

Luego: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 146\,800\ \text{cal}.$

Velocidad de evaporación

Dalton estudió este problema de una manera ingeniosa: en una balanza colocó un recipiente con líquido y equilibró su peso. La disminución de peso indicaba la cantidad de vapor producida; dividiendo por el tiempo en que se había producido, obtenía la *velocidad de evaporación.*

Comprobó que la velocidad de evaporación V es:

1, directamente proporcional a la superficie libre, S, del líquido;
2, inversamente proporcional a la presión atmosférica existente, H;
3, directamente proporcional a la diferencia entre la presión de saturación del vapor a esa temperatura y la del vapor de agua contenido en la atmósfera;
4, depende de otros factores, tales como circulación del aire, naturaleza del líquido, todo lo cual puede expresarse mediante un coeficiente, C, cuyo valor hay que determinar en cada caso.

La fórmula correspondiente es:

$$V = C \cdot S \cdot \frac{P - p}{H}$$

Obsérvese que la evaporación es nula cuando la diferencia $P - p$ se hace igual a cero, es decir, cuando la presión p del vapor de agua que contiene el aire es igual a la de saturación a esa temperatura. Ello explica por qué tarda tanto en secarse la ropa en los días húmedos.

Llamará la atención el hecho de que en la fórmula no figure la temperatura, que tanta influencia tiene en la evaporación, como es notorio. Pero la verdad es que figura, aunque indirectamente, ya que cuanto mayor es la temperatura mayor es P, por lo que la diferencia $P - p$ se agranda y la velocidad de evaporación aumenta.

Humedad relativa o estado higrométrico

¿Qué se quiere decir cuando se informa que la humedad atmosférica es, por ejemplo, de 80 %? Generalmente se cree que ese número expresa la proporción de vapor de agua que hay por unidad de masa de aire. Es decir: se cree que 80 % de humedad significa que en 1 kg de aire, por ejemplo, hay 800 g de vapor de agua.

Esta suposición es errónea, pues lo que ese número mide es la llamada *humedad relativa*, que definimos de la siguiente manera:

Es el cociente entre la presión del vapor de agua que hay en un ambiente y la presión de saturación a esa misma temperatura:

$$h = \frac{p}{p_s}.$$

Consideremos un volumen cualquiera de aire; por ejemplo, 1 litro. Ese litro de aire contiene cierta masa m de vapor de agua a presión p. Pero, a la misma temperatura, es capaz de contener hasta una masa m_s, cuando esté saturado de vapor, a presión p_s. Puede demostrarse que:

$$\frac{p}{p_s} = \frac{m}{m_s},$$

de modo que la humedad relativa representa qué fracción de la masa que puede contener 1 litro de aire contiene en un momento dado.

Si se dice que la humedad relativa es del 80 %, significa que la presión del vapor de agua en la atmósfera es, en ese momento, el 80 % de la presión de saturación a esa temperatura; o bien, que cada unidad de volumen de aire sólo contiene el 80 % de la masa de agua que puede contener, a esa misma temperatura.

EJEMPLO: *Supongamos que la temperatura de un cierto día es de 35° C y que la presión del vapor de agua que contiene el aire es de 33,6 mm Hg. Como la presión de saturación del vapor de agua a 35° C es, según la tabla, 42,0 mm Hg, la humedad relativa vale:*

$$h = \frac{p}{p_s} = \frac{33{,}6 \text{ mm Hg}}{42 \text{ mm Hg}} = 0{,}8, \quad \text{o:} \quad h = 80\ \%.$$

Cómo se mide la humedad relativa

Para medir h, basta medir p y la temperatura ambiente, porque p_s se extrae de tablas.

Para medir p, lo más sencillo es enfriar una porción de aire, hasta que se vea condensar vapor de agua (que estará *saturado*, pues condensa). Se mide la temperatura de condensación, y luego se busca en la tabla cuál es la presión de saturación correspondiente. Por ejemplo: supongamos que el vapor de agua de un ambiente que está a 30° C, condensa a 20° C. En la tabla se encuentra que a 20° C, la presión de saturación es 17,6 mm Hg. Ésa es, pues, la presión del vapor de agua en ese momento. La presión de saturación a la temperatura ambiente de 30° C vale 31,8 mm Hg. Luego:

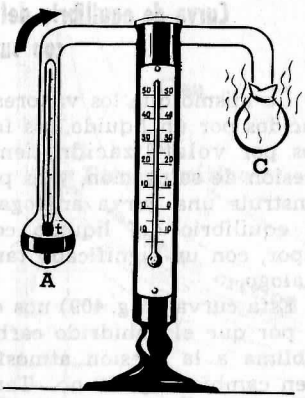
$$h = \frac{17{,}6 \text{ mm Hg}}{31{,}8 \text{ mm Hg}} = 0{,}55 = 55\ \%.$$

Una manera muy sencilla de construir un *higrómetro* casero –aparato utilizado para medir la humedad relativa–, es colocar unos trocitos de hielo en un vaso con agua; se agita constantemente con un termómetro, hasta que se observe que el vaso se empaña, es decir, que el vapor de agua de la atmósfera se ha condensado. Leyendo la temperatura que indica el termómetro, conociendo la temperatura ambiente y utilizando la tabla, se puede calcular h.

El higrómetro de Daniell

El aparato recién descripto no es más que un higrómetro de Daniell rudimentario. Este aparato, que es muy empleado, consiste en dos recipientes, A y C, comunicados por un tubo. En A hay un termómetro, y C está cubierto con una funda de algodón. En A hay

cierta cantidad de éter, que destila hacia C cuando éste se enfría mediante unas gotas de éter vertidas sobre la funda. Al evaporarse el éter en A, su temperatura disminuye, hasta que el vidrio se empaña, indicando que el aire exterior se ha condensado. El termómetro interior permite saber a qué temperatura se ha producido la condensación, y el termómetro que está en el soporte indica la temperatura ambiente.



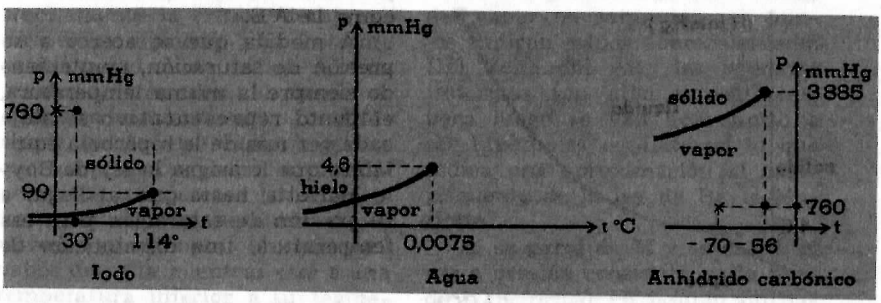
Higrómetro de Daniell.

Sublimación y volatilización

Como hemos dicho, la sublimación es el pasaje del estado de vapor al sólido, y la volatilización, lo inverso; pero en ninguno de los dos casos se pasa por el estado líquido: son transformaciones directas de uno a otro estado.

La volatilización se puede observar en los recipientes de los vendedores ambulantes de helados que emplean "hielo seco". A la presión atmosférica, éste, que es anhídrido carbónico en estado sólido, pasa directamente al estado de vapor, y de ahí el adjetivo de "seco". Otro ejemplo de volatilización nos lo da el empleo doméstico de la naftalina: al cabo de cierto tiempo se observa que las bolitas, cuando no han desaparecido, por lo menos han reducido considerablemente su volumen, pues se han volatilizado.

La sublimación se puede observar en un tubito en el que se ha colocado yodo metálico y en el que se ha hecho el vacío; calentándolo un poco se observa que del sólido se desprenden vapores (volatilización, como en el caso del hielo seco), y si luego se enfría el tubo, se puede ver cómo sobre las paredes se van formando cristalitos de yodo metálico: el yodo está sublimando.



Curvas de equilibrio sólido-vapor.

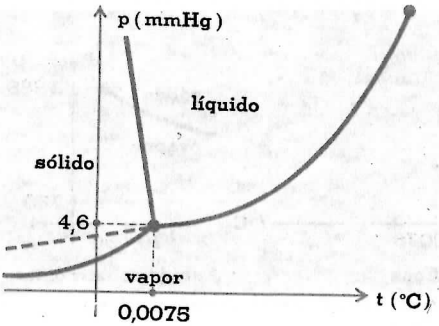
Curva de equilibrio del sólido con su vapor

Lo mismo que los vapores producidos por un líquido, los formados por volatilización tienen su presión de saturación, y es posible construir una curva análoga a la de equilibrio del líquido con su vapor, con un significado también análogo.

Esta curva (pág. 409) nos explica por qué el anhídrido carbónico sublima a la presión atmosférica, y en cambio el yodo no. También nos indica las condiciones para que sublime o volatilice el hielo.

El punto triple

Si sobre una misma gráfica se representan las tres curvas de equilibrio (sólido-líquido; líquido-vapor; sólido-vapor), se observa que las tres concurren en un mismo punto: el *punto triple*. En el caso del agua, ese punto tiene por coordenadas $p = 4{,}6$ mm Hg, y $t = 0{,}0075°$ C. ¿Qué significado tiene este punto tan particular? Puesto que en él concurren las tres curvas, del significado de cada una de ellas resulta que si se coloca una cierta masa de hielo, otra de agua y otra de vapor, a una temperatura de 0,0075° C y una presión de 4,6 mm Hg, las tres masas están en equilibrio, y si no se entrega ni quita calor, las tres permanecerán invariables por toda la eternidad.



Punto triple del agua.

Diferencia entre vapor y gas

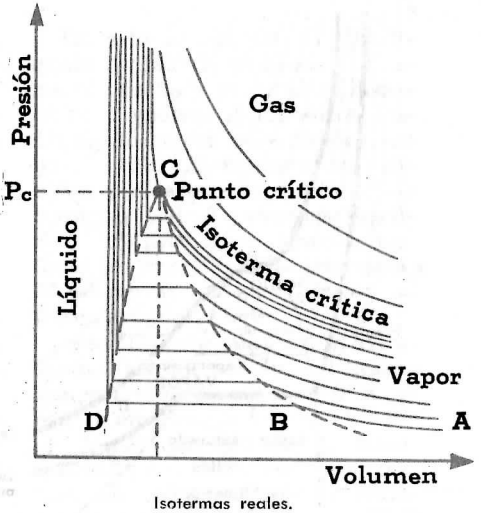
Hemos dicho que los vapores se comportan aproximadamente como los gases, cuando no están saturados, y tanto más aproximado es su comportamiento cuanto más alejados estén de su presión de saturación.

Supongamos que tenemos un vapor, a una temperatura relativamente baja y a una presión lo suficientemente baja como para que esté muy alejado de la presión necesaria para saturarlo a esa temperatura.

Si se comienza a aumentar la presión, manteniendo constante su temperatura, su volumen disminuye, cumpliendo aproximadamente con la ley de Boyle-Mariotte. Si trazamos una gráfica, llevando en abscisas los volúmenes y en ordenadas las presiones, el punto representativo describirá una curva como la A B.

A medida que se acerca a su presión de saturación, manteniendo siempre la misma temperatura, el punto representativo se aleja cada vez más de la hipérbola equilátera que le asigna la ley de Boyle-Mariotte, hasta que, al llegar a su presión de saturación para esa temperatura, una disminución de

volumen no provoca un aumento de presión: ésta se mantiene constante, el vapor saturado comienza a condensar, y sucesivas disminuciones del volumen le hacen describir al punto representativo el segmento de recta B D. Al llegar al punto D no hay más vapor, y la superficie del pistón está en contacto con el líquido. Como los líquidos son muy poco compresibles, para producir una pequeña disminución de volumen es ahora necesario un gran aumento de la presión, y la curva representativa se "empina", como lo señala el dibujo. La curva recorrida, puesto que lo ha sido a temperatura constante, se llama *isoterma*.

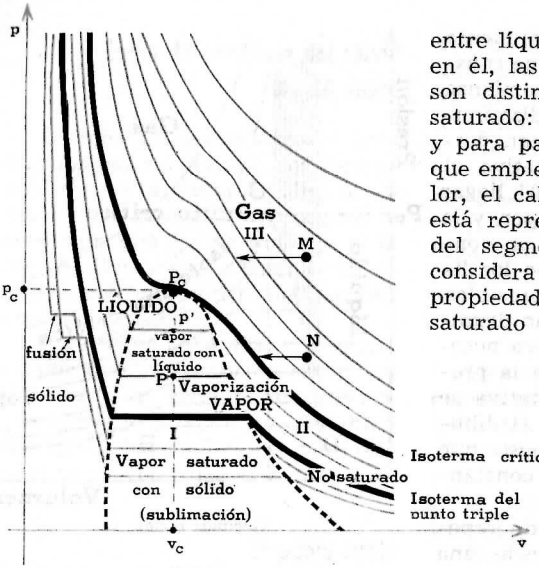


Isotermas reales.

El mismo proceso puede repetirse, partiendo ahora desde una temperatura mayor: la isoterma estará entonces un poco más arriba y a la derecha, y se observará que el segmento de recta horizontal que se describe cuando se está realizando la transformación de vapor saturado en líquido es cada vez menor cuanto mayor es la temperatura de la isoterma. Cuando la temperatura sea cercana a la temperatura crítica de lá sustancia de que se trata, la longitud de dicho segmento será reducidísima, y si se realiza la experiencia con la isoterma cuya temperatura sea precisamente la crítica, desaparecerá dicho segmento y la isoterma pasará por el punto crítico. A temperaturas mayores, el vapor se comporta como un gas. La diferencia, pues, entre vapor y gas, es que los primeros se hallan a temperaturas inferiores a la crítica, y los segundos, a temperaturas superiores. Por ejemplo: el agua será vapor de agua mientras esté a una temperatura inferior a su temperatura crítica (374° C); será gas cuando esté a mayor temperatura. El hidrógeno será gas mientras esté a temperatura mayor que — 240° C; será vapor cuando esté a temperatura inferior a — 240° C, su temperatura crítica.

En el diagrama de arriba, las zonas representan: I) Zona del vapor saturado: todos sus puntos corresponden a vapor saturado en contacto con líquido o con sólido, según se trate de una isoterma superior o inferior a la correspondiente al punto triple; II) Zona del vapor no saturado: sus puntos indican vapor sobrecalentado; III) Zona del gas: las primeras isotermas son algo irregulares, pero luego se van acercando a ser hipérbolas equiláteras, lo que indica una aproximación al cumplimiento de la ley de Boyle-Mariotte.

Si se parte de M y se enfría el gas a presión constante, se lo puede transformar en líquido sin ha-



entre líquido y su vapor saturado; en él, las propiedades del líquido son distintas de las de su vapor saturado: tienen distinta densidad, y para pasar del uno al otro hay que emplear cierta cantidad de calor, el calor de vaporización, que está representado por la longitud del segmento horizontal. Si se considera un punto como el P', las propiedades del líquido y su vapor saturado siguen siendo distintas, pero se observa que es menor el calor de vaporización. Pero al llegar al punto crítico se tienen dos resultados llamativos:

1) *En el punto crítico, todas las propiedades del líquido y su vapor son las mismas.*

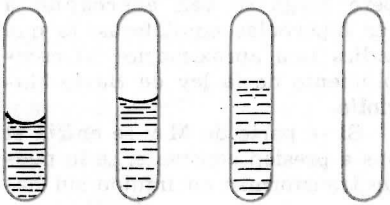
2) *En el punto crítico, el calor de vaporización es nulo.*

Es muy interesante observar el pasaje de líquido a vapor al llegar al punto crítico. Si dentro de un recipiente se tiene una cierta cantidad de líquido, el resto del volumen estará ocupado por su vapor saturado: su punto representativo será tal como el P. Si se calienta el tubo, se pasará a una isoterma de temperatura mayor, es decir, a un punto tal como el P'. Si se sigue calentando, al llegar a la temperatura crítica se observará que el menisco de separación entre lí-

ber pasado por el estado de vapor: este proceso se llama *licuación del gas*. En cambio, si se parte desde N y se enfría a presión constante, se obtendrá también líquido pero habiendo pasado por el estado de vapor.

Líquido y vapor en el punto crítico

El punto crítico tiene propiedades muy curiosas, además de las ya vistas. Si en la gráfica anterior se elige un punto tal como el P, representa un estado de equilibrio



Pasaje de líquido a vapor en el punto crítico.

quido y vapor se va desdibujando y pierde su curvatura, y en determinado momento, el líquido se estratifica. Si se invierte el tubo, se observará que el líquido no cae al fondo, o lo hace con extraordinaria lentitud, pues su densidad es igual a la del vapor.

La lucha por el 0° K

Hasta hace unos sesenta años se creía que ciertos gases, como el helio, el nitrógeno, el óxido de carbono, etc., no eran licuables, por lo que se los llamaba *gases permanentes*. El creciente progreso de la técnica fue reduciendo cada vez más el número de gases permanentes, hasta que en 1911, Kammerling-Onnes consiguió licuar el helio, con lo cual terminó la familia de gases permanentes.

La licuación de todos ellos llevó a temperaturas más bajas y cada vez más cercanas al 0° K. Con el hidrógeno líquido se consiguieron temperaturas de — 258° C (15° K), y con el helio se llegó hasta 1° K. Luego, el avance se detuvo durante unos años, hasta que se descubrieron nuevas formas de enfriamiento, con las cuales se ha obtenido la menor temperatura que jamás se haya alcanzado hasta el presente: 0,00001° K.

Los físicos se acercan, pues, cada vez más al 0° K, aunque hay principios físicos que afirman que es imposible alcanzar experimentalmente dicha temperatura. Se trata, aparentemente, de un vano esfuerzo; pero no es así, porque las curiosísimas propiedades que presentan los cuerpos a temperaturas tan bajas premian con exceso la difícil tarea realizada.

De esta forma, con el aire líquido (— 198° C) se puede ver cómo el caucho y la carne se endurecen y vuelven quebradizos, pudiendo luego ser pulverizados con un martillo. El mercurio se solidifica perfectamente, pudiéndose construir con él pequeños martillos, muy peculiares, llamados justamente "martillos de mercurio". El plomo se vuelve elástico; las flores, frágiles, etc.

Pero las propiedades más asombrosas son las que presenta el helio a temperaturas cercanas al 0° K. A esas temperaturas existe el helio en dos formas diferentes, llamadas helio I y helio II. El comportamiento del primero es absolutamente normal, pero con el II se han realizado pruebas sensacionales. Por ejemplo: en una cubeta que contiene helio II se sumerge un tubito vacío; al cabo de un tiempo se observa que el helio II de la cubeta *trepa* por la pared externa del tubito, penetra en él, y afluye a su interior, hasta que los niveles se equilibran. Si luego se retira el tubito con su carga de helio II, se puede observar que éste trepa ahora por la pared interior y se vierte al exterior, hacia la cubeta. Su conductividad térmica es muy elevada (100 veces mayor que la de la plata), su viscosidad es pequeñísima, etc.

Éstas y otras experiencias prueban que, a temperaturas muy bajas, los cuerpos no cumplen con las leyes corrientes de la física. De ahí que se los estudie con tanto apasionamiento.

Sugieren además que hay una especie de nuevo orden a muy baja temperatura: cada molécula aparenta poseer una cierta cantidad mínima de energía, distinta de

cero, no importa cuán baja sea su temperatura. El movimiento molecular se hace cada vez más lento, pero *no se detiene* del todo, a diferencia de lo que predice la teoría cinética del calor, para la cual, como hemos visto, a 0° K las moléculas deberían estar absolutamente quietas. Esto solo bastaría para que el 0° K apasione a los físicos.

La lucha por el 0° K

Fecha	*Investigador*	*País*	*Desarrollo*	*Temperatura*
1860	Kirk	Inglaterra	Alcanza la temperatura de solidificación del mercurio	234° K
1877	Gailletet	Francia	Primero que consigue licuar oxígeno empleando expansión libre	90,2° K
1898	Dewar	Inglaterra	Primero que consigue licuar hidrógeno	20,2° K
1908	Onnes	Holanda	Primero que consigue licuar helio	4,2° K
1927	Simmon	Alemania	Desarrolla el liquefactor de helio	4,2° K
1933	Giauque	EE. UU.	El primero en emplear la demagnetización adiabática	0,25° K
1934	Kapitza	URSS	Primero en licuar helio sin necesidad de preenfriamiento	4,2° K
1946	Collins	EE. UU.	Primer liquefactor de helio comercial	2° K
1956	Simon	Inglaterra	Primer experimento de enfriamiento usando propiedades del núcleo atómico	0,00001° K

Problemas

1. ¿Qué cantidad de calor se necesita para fundir 2 000 g de cobre que están a la temperatura de fusión?

R.: 82 000 cal

2. ¿Dónde hay mayor cantidad de calor, en 1 g de hielo o en 1 g de agua, ambos a 0° C?

3. Se quiere fundir 25 g de cinc que están a 20° C. ¿Qué cantidad de calor es necesaria?

R.: 1 503 cal

4. ¿Qué cantidad de calor es necesaria para transformar en vapor a 100° C, 2 litros de agua que están a 20° C?

R.: 1 240 000 cal

5. En 500 g de agua a 10° C se hace condensar la cantidad suficiente de vapor de agua a 100° C, como para que la temperatura del agua se eleve hasta 40° C. ¿Cuánto vapor condensó?

R.: 27,8 g

6. En una heladera se colocan 100 g de agua a 20° C y se obtienen cubitos de hielo a — 5° C. ¿Qué cantidad de calor se le extrajo al agua?

R.: 10 265 cal

7. ¿Qué cantidad de calor será necesaria para transformar 100 g de hielo a — 5° C, en 100 g de vapor de agua a 100° C?

R.: 72 265 cal

8. En una habitación que está a 20° C, la presión de vapor de agua es de 12 mm Hg. ¿Cuál es la humedad relativa?

R.: 68 %

9. En un higrómetro de Daniell se observa que la temperatura de rocío es de 6° C, y la del ambiente, 10° C. ¿Cuál es la humedad relativa?

R.: 77 %

10. En 1 litro de agua que está a 25° C se echan 4 cubitos de hielo de 50 g cada uno, que están a — 5° C. ¿Qué temperatura de equilibrio se obtiene?

R.: 7° C

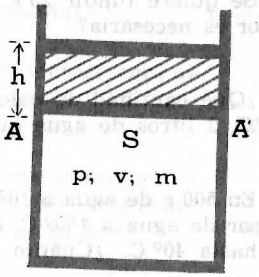
11. ¿Qué masa de hielo a 0° C hay que echar en 1 500 g de agua a 18° C para que la mezcla quede a 6° C?

R.: 216 g

31 EL PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Trabajo realizado por un gas

En el cilindro de la figura, una masa m de gas ocupa un volumen V_1, a la presión p. El pistón está en la posición A A', sin subir ni bajar: su peso está equilibrado por la fuerza originada por la presión que el gas ejerce sobre su superficie.



Calentemos el gas: observaremos que el pistón sube mientras entregamos calor, y se detiene cuando dejamos de hacerlo. Cuando el pistón se ha detenido, la presión del gas es igual a la inicial, y si el proceso se realizó con suficiente lentitud, se puede aceptar que la presión se mantuvo constante durante el mismo. Los procesos en que la presión permanece constante se llaman *isobáricos* (igual presión).

¿Cuánto vale el trabajo[1] L realizado por el gas para hacer subir el pistón?

Sabemos que:

[1] Para evitar confusiones con la temperatura, a partir de ahora llamaremos L al trabajo.

$$L = F \cdot d; \quad \text{pero } F = p \cdot s \quad \text{y} \quad d = h$$

$$\therefore L = p \cdot s \cdot h; \quad \text{pero } s \cdot h = V_2 - V_1$$

$$\therefore L = p \cdot (V_2 - V_1); \quad \text{llamando } \Delta V = V_2 - V_1$$

$$\boxed{L = p \cdot \Delta V}$$

El trabajo realizado es igual a la presión por la variación de volumen.

Una nueva unidad para medir el trabajo. De la fórmula anterior resulta que:

1 unidad de L = 1 unidad de p · 1 unidad de V.

Si se mide la presión en *atmósferas* y el volumen en litros, resulta la unidad de trabajo llamada *litro-atmósfera.*

$$1 \text{ litro-atmósfera} = 1 \text{ litro} \cdot 1 \text{ atmósfera}$$

Esta unidad es muy importante, y se la utiliza con preferencia a otras siempre que se trate de calcular el trabajo realizado en la expansión o compresión de un gas. Sus equivalencias con las unidades ya conocidas son:

Equivalencia con el kgm:

$$1 \text{ lit} \cdot \text{atm} = 1 \text{ l} \cdot 1 \text{ at} = 0{,}001 \text{ m}^3 \cdot 1{,}033 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 0{,}001 \text{ m}^3 \cdot 10\,330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \therefore$$

$$\therefore \boxed{1 \text{ lit} \cdot \text{atm} = 10{,}33 \text{ kgm}}$$

Equivalencia con el joule: Como 1 kgm = 9,8 J

$$\therefore \boxed{1 \text{ lit} \cdot \text{atm} = 101{,}2 \text{ J}}$$

Representación gráfica de un proceso isobárico

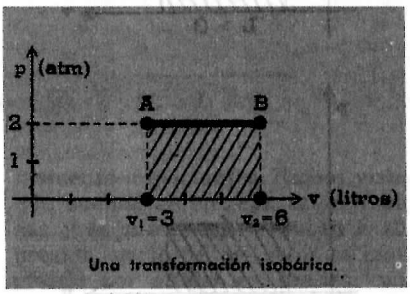
Supongamos que la presión del gas encerrado en el cilindro sea de 2 atmósferas, y su volumen de 3 litros. Expandimos isobáricamente el gas hasta un volumen de 6 litros. Esta transformación puede representarse gráficamente, tomando un par de ejes cartesianos ortogonales y llevando las presiones en ordenadas y los volúmenes en abscisas. Como la presión permanece constante durante todo el proceso, la representación correspondiente es una recta *paralela* al eje de los volúmenes, llamada *isobara.*

CÁLCULO GRÁFICO DEL TRABAJO. Calculemos el trabajo realizado en el proceso del ejemplo anterior. Resulta:

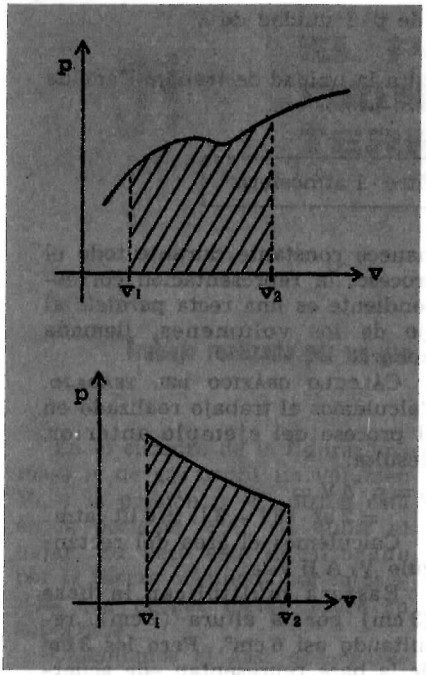
$$L = p \cdot \Delta V = 2 \text{ at} \cdot (6 \text{ l} - 3 \text{ l}) = 6 \text{ lit} \cdot \text{atm}.$$

Calculemos el área del rectángulo V_1 A B V_2:

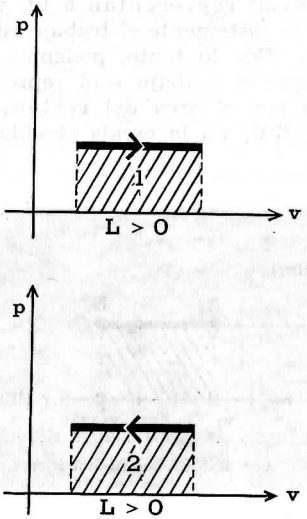
Bastará multiplicar la base (3 cm) por la altura (2 cm), resultando así 6 cm². Pero los 3 cm de la base representan –de acuerdo con la escala elegida– 3 l, y los 2 cm de la altura, 2 at, por lo cual los 6 cm² representan 6 lit. atm, que es justamente el trabajo realizado. Por lo tanto, podemos decir que el trabajo está representado por el área del rectángulo V_1 A B V_2, en la escala elegida.



Una transformación isobárica.



El trabajo realizado en una transformación gaseosa está representado por el área de la figura.



Esa propiedad del área vale en cualquier transformación gaseosa. Así, las figuras representan transformaciones cualesquiera, y en todas ellas el área rayada representa el trabajo realizado.

Trabajo positivo y negativo

Supongamos que, en el caso anterior, en lugar de calentar el gas desde 3 l a 6 l hubiésemos enfriado –siempre a presión constante– de 6 l a 3 l. Si bien la presión es la misma, no lo es la variación de volumen, porque ahora vale — 3 l. El signo negativo indica que el volumen ha disminuido, en lugar de aumentar. El trabajo también resultará negativo:

$$-6 \text{ lit} \cdot \text{atm}.$$

Para que esta diferencia de signos se ponga de manifiesto, en la representación gráfica se indica con una flecha el sentido en que se ha realizado la transformación: el área (1) es positiva, y la (2) es negativa. Si bien en Geometría no se habla nunca de rectángulos de área negativa, en Física es muy conveniente, para poder distinguir gráficamente entre transformaciones con trabajo positivo y transformaciones con trabajo negativo.

Los calores específicos de los gases

Oportunamente nos hemos referido a la diferencia entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante de un gas; y sabemos que el primero es mayor que el segundo. Si se calienta un gas a presión constante, el calor entregado no sólo se emplea en calentar el gas, sino que levantando el pistón, parte de aquél se transfor-

ma en trabajo. En cambio, a volumen constante todo el calor se emplea en calentar, pues el pistón permanece fijo.

EJ.: para el aire, $c_p = 0{,}237$ *cal/g °C* y $c_v = 0{,}169$ *cal/g °C*. La diferencia, 0,068 cal/g °C, fue gastada por el gas para subir el pistón.

Podemos comprobarlo con el siguiente:

PROBLEMA: *En un cilindro de 1 000 litros de capacidad hay 1 293 g de aire a la presión de 1 at y a la temperatura de 0° C. Calcular:*

a) *Calor que habrá que entregarle para calentarlo a 10° C, manteniendo constante el volumen.*

b) *Ídem a presión constante.*

c) *Calcular el trabajo realizado por el pistón y comparar el resultado con la diferencia de los dos primeros.*

Solución:

a)
$$Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta t$$
$$Q_v = 0{,}169 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 1\,293 \text{ g} \cdot 10° \text{ C}$$
$$\boxed{Q_v \cong 2\,185 \text{ cal}}$$

b)
$$Q_p = c_p\, m\, \Delta t = 0{,}237 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 1\,293 \text{ g} \cdot 10° \text{ C} \cong 3\,064 \text{ cal}.$$
$$\boxed{Q_p = 3\,064 \text{ cal}}$$

c) $L = p \cdot \Delta V$. Para calcular ΔV hay que conocer el volumen final. De acuerdo con la ley de Gay Lussac:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \therefore \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 1\,000 \text{ l} \cdot \frac{283° \text{ K}}{273° \text{ K}} = 1\,036 \text{ l}.$$
$$\Delta V = V_2 - V_1 = 36 \text{ l}.$$

Luego:

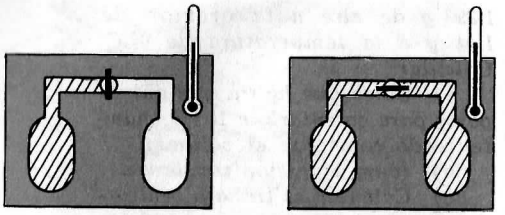
$$L = p \cdot \Delta V = 1 \text{ atm} \cdot 36 \text{ l} = 36 \text{ lit} \cdot \text{atm} \cong 3\,640 \text{ J} \cong 878 \text{ cal}.$$
$$\boxed{L = 878 \text{ cal}}$$

Comparando los resultados:

$$\left.\begin{aligned} Q_p - Q_v &= 878 \text{ cal} \\ L &= 878 \text{ cal} \end{aligned}\right\} \; L = Q_p - Q_v \quad \therefore \quad \boxed{Q_p = L + Q_v}$$

El primer principio de la termodinámica

Las conclusiones que se obtienen del problema anterior son sumamente importantes. Hemos visto que cuando se entrega calor a un gas y se mantiene constante su presión, parte de ese calor es empleado por el gas en realizar un



La experiencia de Joule: la energía interna sólo depende de la temperatura.

trabajo contra la presión exterior, y parte en aumentar su temperatura. Pero de acuerdo con la teoría cinética, esto último significa que ha aumentado la energía de las moléculas del gas, energía que llamaremos *energía interna* del gas. Se puede, pues, describir el proceso de esta manera:

Calor entregado =
= *Trabajo realizado* + *aumento de la energía interna del gas.*

Es fácil observar que el resultado anterior no es otra cosa que la aplicación del Principio de la Conservación de la Energía a procesos en que se produce transformación de calor en trabajo, y recíprocamente. Es más amplio que el Principio de Equivalencia entre el Calor y el Trabajo, porque éste sólo contempla el caso en que *todo* el trabajo se transforma en calor. Pero la relación entre *calor, trabajo* y *variación* (aumento o disminución) *de energía interna* se cumple no sólo en los procesos de calentamiento o enfriamiento a presión constante, sino en todos los procesos naturales. Constituye una ley fundamental, que la Física ha denominado Primer Principio de la Termodinámica, y que se puede enunciar así:

En toda transformación entre calor y trabajo, la cantidad de calor entregada a un sistema es igual al trabajo realizado por el sistema más la variación de su energía interna.

Llamando ΔE a la variación de energía interna podemos escribir:

$$Q = L + \Delta E$$

ALGO MÁS SOBRE LA ENERGÍA INTERNA DE UN GAS. La siguiente experiencia, debida a Joule, enseña una importante propiedad de la energía interna. Los recipientes de la figura, comunicados por un tubo provisto de una llave, están colocados en un calorímetro. En I se introduce gas a presión, y en II se practica un cuidadoso vacío. Se abre luego la llave, y el gas pasa de I a II. El termómetro no varía, lo que indica que del sistema no ha salido calor, ni ha entrado calor en él: por lo tanto, $Q = 0$. Además, no se ha producido trabajo, porque el gas *se ha expandido sin que nadie se opusiera a ello*, dado que en II hay vacío, como hemos dicho. En consecuencia, $L = 0$. De acuerdo con el primer principio, resulta $\Delta E = 0$, es decir, *la energía interna no ha variado*. Y he aquí lo interesante: de las tres características fundamentales de un gas (p, v, T), la única que no ha variado es la temperatura. De ahí dedujo Joule que *la energía interna de un gas depende únicamente de la temperatura.*

Se tiene, pues, una forma inmediata de calcular cualquier variación de energía interna. Supongamos que por un proceso cualquiera

un gas pasa de 20° C a 40° C. Para el cálculo de ΔE, nada interesa de cuanto haya ocurrido durante la transformación: sólo interesan 20° C y 40° C. Si en lugar de haber seguido ese proceso arbitrario el gas hubiera sido calentado a volumen constante de 20° C a 40° C, ΔE hubiera valido exactamente lo mismo. Pero en este último caso, es muy sencillo calcularla. Como el proceso es a volumen constante, $L = 0$, por lo cual $Q = \Delta E$; y como $Q = c_v \cdot m \cdot \Delta t$, resulta que:

$$\Delta E = c_v \cdot m \cdot \Delta t,$$

fórmula que permite el cálculo de ΔE *en cualquier transformación.*

Ej.: *Calcular la variación de energía interna de 100 g de oxígeno cuando se los calienta, de cualquier manera, de 80° C a 100° C.*

$$\Delta E = c_v \cdot m \, \Delta t = 0{,}157 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \times$$

$$\times 100 \text{ g } (100° \text{ C} - 80° \text{ C})$$

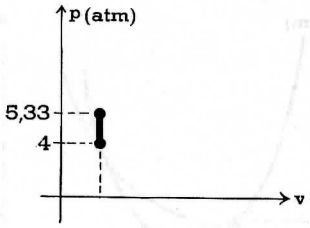
$$\Delta E = 314 \text{ cal}.$$

¿Qué ocurriría con ΔE, si la temperatura hubiera disminuido de 100° C a 80° C, en lugar de aumentar? Valdría -314 cal; cuando un gas se enfría su energía interna disminuye.

Problemas de aplicación

1. *Transformaciones isométricas:* Son aquellas en las cuales el volumen permanece constante. Su representación en los ejes $p\,v$ es una recta paralela al eje de las presiones.

Problema: *Un recipiente contiene 200 g de H a 4 at de presión y 27° C. Se calienta a volumen constante, hasta 127° C. Representar gráficamente y calcular:*



Una transformación isométrica.

a) *Cantidad de calor entregado;*
b) *Trabajo realizado;*
c) *Variación de la energía interna;*
d) *Presión final del gas.*

Solución:

a) $Q_v = c_v \cdot m \cdot \Delta t.$

$$Q_v = 2{,}4 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \times$$

$$\times 200 \text{ g } (127° \text{ C} - 27° \text{ C}).$$

$$Q_v = 48\,000 \text{ cal}.$$

b) Como lo indica la figura, el *área es nula,* por lo cual:

$$L = 0.$$

c) Como

$$Q = \Delta E + L, \text{ y } L = 0,$$

$$Q_v = \Delta E.$$

$$\therefore \boxed{\Delta E = 48\,000 \text{ cal}}$$

Nada del calor se ha transformado en trabajo; todo ha sido destinado a aumentar la energía interna del H.

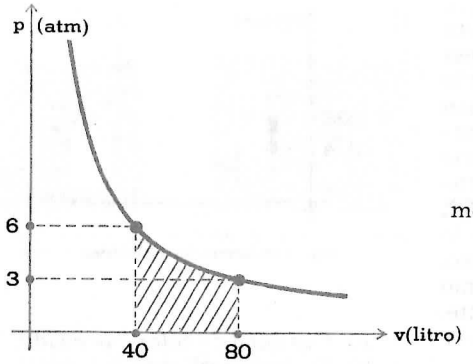
d) De acuerdo con la ley de Gay-Lussac:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \therefore p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} =$$

$$= 4 \text{ at} \cdot \frac{400° \text{ K}}{300° \text{ K}}$$

$$p_2 = 5{,}33 \text{ at}.$$

2. *Transformaciones isobáricas:* Como ejemplo, ya ha sido resuelto el problema de la pág. 419.



3. *Transformaciones isotérmicas:* Son aquellas en las cuales la temperatura permanece constante. Su representación en los ejes $p\,v$ es una hipérbola equilátera (ley de Boyle-Mariotte).

PROBLEMA: *Un recipiente contiene 280 g de* N, *ocupando un volumen de 40 l a una presión de 6 atmósferas. Se lo expande isotérmicamente, hasta que ocupa un volumen doble. Calcular:*

a) *Temperatura del gas;*

b) *Presión final;*

c) *Trabajo realizado;*

d) *Variación de la energía interna;*

e) *Calor puesto en juego.*

a) Para calcular T, recurrimos a la ecuación de estado:

$$p\,v = n\,R\,T$$

$$\therefore\ T = \frac{p\,v}{n\,R}.$$

Como el nitrógeno tiene peso molecular 28, resulta:

$$n = \frac{280\ g}{28\ g} = 10\ \text{moles}.$$

$$T = \frac{6\ \text{at} \cdot 40\ \text{l}}{10\ \text{mol} \cdot 0{,}081\ \frac{\text{lit} \cdot \text{at}}{^\circ\text{K mol}}}$$

$$T = 296^\circ\ \text{K}.$$

b) $$p_1\,v_1 = p_2\,v_2$$

$$\therefore\ p_2 = \frac{p_1\,v_1}{v_2} = \frac{6\ \text{at} \cdot 40\ \text{l}}{80\ \text{l}}$$

$$p_2 = 3\ \text{at}.$$

c) El trabajo realizado está dado por el área *rayada.* Pero en las transformaciones isotérmicas no es fácil (para el estudiante secundario) calcular esa área, por lo cual nos limitamos a mencionar, sin deducirla, la fórmula que permite el cálculo:

$$L = 2{,}3\ n\,R\,T \cdot \lg \frac{v_2}{v_1}$$

siendo n el número de moles y R la constante universal de los gases

$$L = 2{,}3 \cdot 10 \cdot 0{,}081 \cdot 296 \cdot \lg \frac{80}{40} = 166\ \text{lit} \cdot \text{at}$$

$$L = 4\,032\ \text{cal}.$$

d) Como la temperatura no ha variado, resulta que: $\Delta E = O$ (Ley de Joule).

En las transformaciones isotérmicas, la energía interna permanece constante.

e) Siendo:

$$Q = L + \Delta E,$$

y

$$\Delta E = 0,$$

resulta:

$$Q = L$$

$$\therefore \quad \boxed{Q \cong 4\,032 \text{ cal}}$$

Conviene reflexionar sobre este último resultado, porque nos informa que el gas ha recibido una cierta cantidad de calorías; sin embargo, su temperatura no ha variado, pese a que eso es lo que se afirmaría a primera vista. He ahí una transformación en que todo el calor se convierte en trabajo.

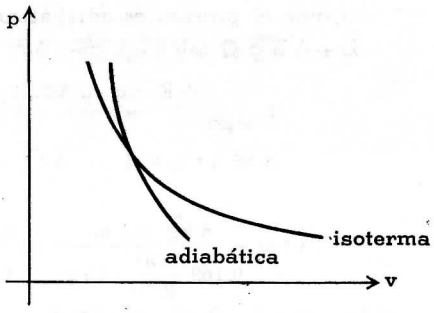
4. *Transformaciones adiabáticas:* Son aquellas en las que no entra ni sale calor del sistema. Son muy importantes, especialmente en el estudio de las máquinas térmicas. Su representación gráfica es una curva llamada *adiabática,* parecida a la hipérbola, pero más empinada.

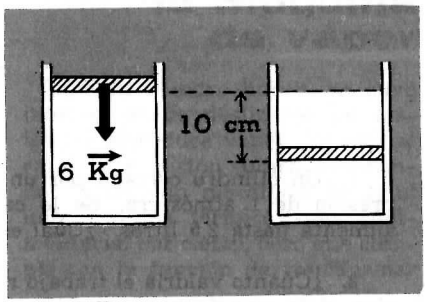
En las transformaciones adiabáticas, como $Q = 0$, resulta:

$$L + \Delta E = 0,$$

o sea: $\quad L = -\Delta E.$

También éste es un resultado ciertamente sorprendente: como $\Delta E \neq 0$, la temperatura varía. Sin





embargo, ni se le ha dado ni se le ha quitado calor al gas. Se trata, pues, de transformaciones en las que, si bien el gas realiza trabajo, lo hace a expensas de su *propia energía.*

Esto puede observarse cuando se infla o desinfla un neumático, que es un ejemplo concreto de una transformación adiabática. Claro que no son procesos totalmente adiabáticos, porque es imposible evitar por completo la entrada o salida de calor.

Ej.: *Un cilindro contiene 10 g de aire. Se lo tapa con un pistón de 6* $\vec{kg}$*, que resbala sobre sus paredes, descendiendo 10 cm y comprimiendo el gas adiabáticamente. ¿Cuánto aumenta la temperatura del aire?*

Como el proceso es adiabático: $L = -F\,d$ (el signo negativo, porque el volumen disminuyó), y $L + \Delta E = Q = 0 \;\therefore\; L = -\Delta E$

$$\Delta E = c_v\, m\, \Delta t.$$

Luego:

$$c_v\, m\, \Delta t = F\, d \;\therefore\; \Delta t = \frac{F\, d}{c_v\, m}$$

$$\Delta t = \frac{6\ \vec{kg} \cdot 0{,}1\ m}{0{,}169\ \frac{cal}{g\ ^oC} \cdot 10\ g} = \frac{0{,}6\ kgm}{1{,}69\ \frac{cal}{^oC}} = \frac{0{,}6 \cdot 2{,}35\ cal}{1{,}69\ \frac{cal}{^oC}} = 0{,}83^o\ C.$$

Problemas

1. Un cilindro cerrado por un émbolo contiene 2 litros de gas a la presión de 1 atmósfera. Se lo calienta isobáricamente, y su volumen aumenta hasta 2,5 litros. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?

R.: 0,5 lit · atm

2. ¿Cuánto valdría el trabajo realizado por el gas del problema anterior, si la presión se mantuviera constantemente igual a 4 atmósferas?

R.: 2 lit · atm

3. Expresar los resultados de los problemas anteriores en kilográmetros y en joules.

R.: 5,166 kgm = 50,6 J; 20,66 kgm = 202,4 J

4. Representar gráficamente los dos procesos anteriores.

5. Un recipiente contiene 100 g de hidrógeno a 2 atmósferas de presión y 7° C. Se lo calienta isométricamente, hasta que la temperatura es de 27° C. Calcular: *a)* cantidad de calor que se entregó; *b)* trabajo realizado por el gas; *c)* variación de la energía interna del gas; *d)* presión final del gas.

R.: *a)* 4 800 cal; *b)* 0; *c)* 4 800 cal; *d)* 2,143 at

6. Se entregan 10 000 cal a una recipiente que contiene 250 g de oxígeno a presión de 1 atmósfera; el recipiente está provisto de un émbolo, de modo que la evolución se haga a presión constante. Un termómetro indica que la temperatura se elevó en 10° C. ¿Qué trabajo realizó el gas?

R.: 39 400 J

7. ¿Qué variación de volumen experimentó el oxígeno del problema anterior?

R.: 198,2 l

8. ¿Cuánto varía la energía interna de un gas que recibe 200 cal y realiza un trabajo de 6 J?

R.: 198,5 cal

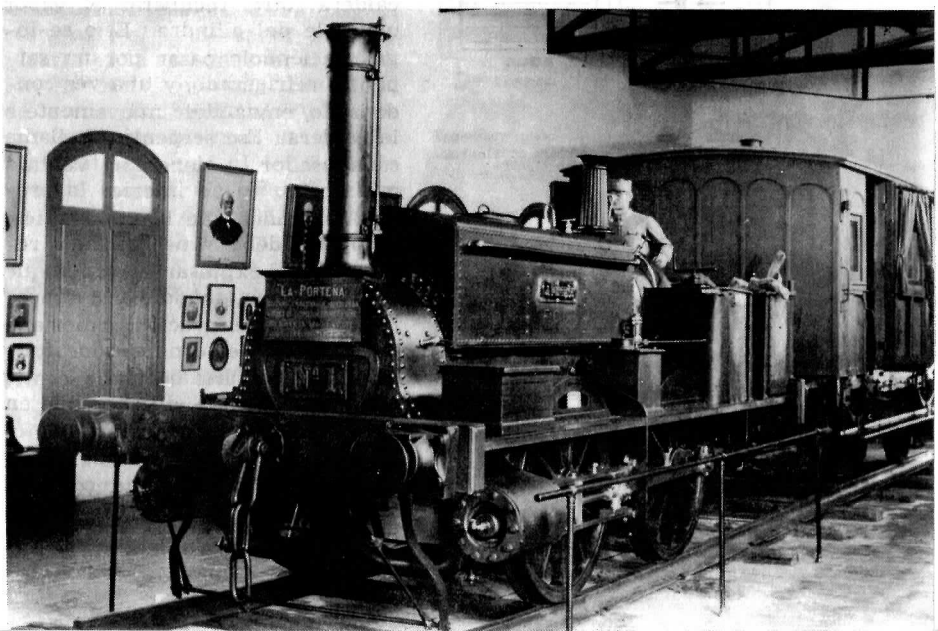
32 LAS MÁQUINAS TÉRMICAS

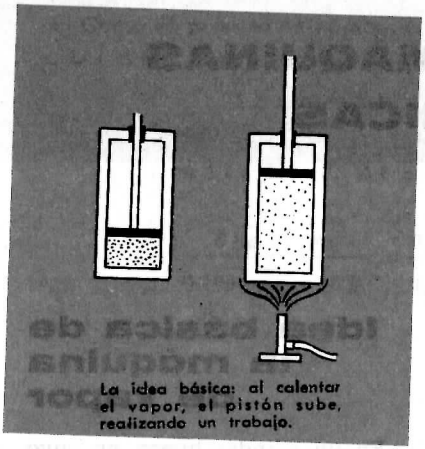
Se llama máquina térmica a todo aparato que transforme el calor en trabajo, o viceversa. Pueden clasificarse en dos categorías: a) *máquinas de combustión externa*, que son aquellas que obtienen el calor de una fuente exterior a la máquina; b) *máquinas de combustión interna*, en las que la fuente térmica pertenece a la máquina. Un ejemplo del primer tipo es la locomotora; del segundo, los motores de explosión y los Diésel.

Idea básica de la máquina de vapor

En un cilindro hueco, en cuyo interior puede deslizarse un pistón, se introduce vapor. Si éste se calienta, el pistón subirá, realizando un trabajo mecánico; he aquí una máquina térmica, muy rudimentaria, por cierto, pero que cumple con la función de transformar

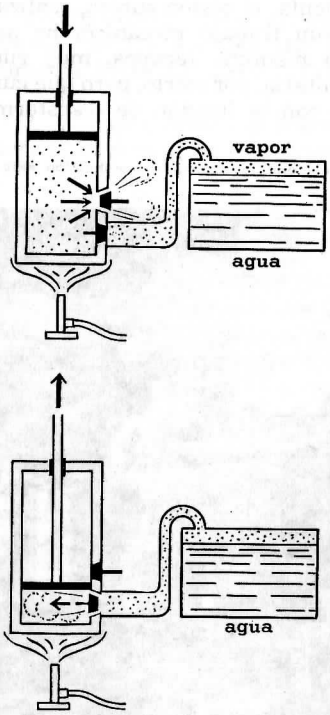
Locomotora La Porteña: máquina térmica de combustión externa.





La idea básica: al calentar el vapor, el pistón sube, realizando un trabajo.

calor en trabajo. Claro está que una vez que el pistón ha llegado al extremo del cilindro, hay que hacerlo volver a su posición inicial. Para ello es necesario desalojar el vapor del cilindro, lo que se logra con una válvula apropiada; pero también es necesario inyectar una nueva cantidad de vapor. Esto se consigue por medio de un caño que comunique un recipiente con vapor con el cilindro, y provisto de una válvula que se abra cuando el pistón esté otra vez en la posición inicial. Pero en lugar de enviar al cilindro vapor frío y calentarlo allí, es más conveniente calentar el vapor en su recipiente e inyectarlo ya caliente. Y así tenemos una *caldera.*

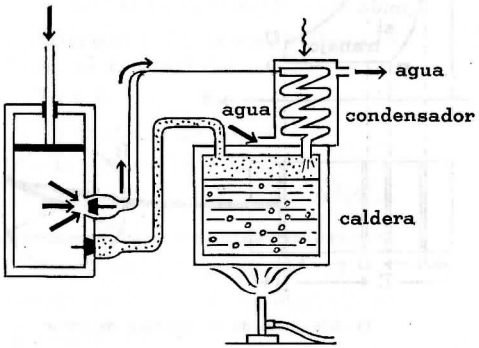


Recobrando el vapor.

Pero se presenta ahora el problema de la provisión de vapor, pues si del cilindro se lo deja escapar a la atmósfera, se agotará más o menos rápidamente, de acuerdo con el tamaño de la caldera. Una solución es disponer de una gran caldera; otra, recuperar el vapor que sale del cilindro. Esto se logra haciéndolo pasar por un serpentín refrigerado, y una vez condensado, enviándolo nuevamente a la caldera. Ese serpentín se llama *condensador*, y tiene una ventaja más: como en su interior la presión es menor que la atmosférica, el pistón debe vencer menor resistencia al expulsar el vapor que si lo hiciera enviándolo a la atmósfera. Otra observación importante: para que el condensador funcione es necesario enfriarlo continuamente, porque el vapor que en él se condensa le va entregando el calor de vaporización; de modo que, *así como hay que calentar continuamente la caldera, hay*

que enfriar continuamente el condensador.

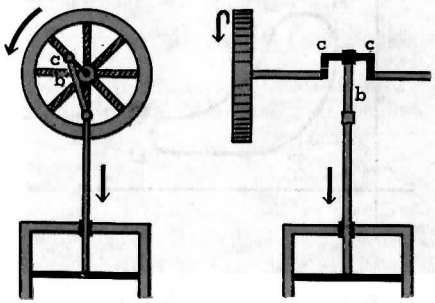
Ya está en funcionamiento "nuestra máquina", pero tiene un movimiento de vaivén; si se pudiera obtener una rotación se la podría aplicar a un vehículo, como una locomotora, por ejemplo. La solución es articular el eje del pistón como una *biela b*, unida a una manivela *c* llamada *cigüeñal*, que a su vez está colocada sobre el eje de una rueda. De esta manera el movimiento alternativo del pistón se transforma en el movimiento de rotación de la rueda.



La caldera y el condensador permiten el funcionamiento continuado de la "máquina".

Lo que pasa con la energía calórica

A la caldera se le entrega energía, que llega al cilindro transportada por el vapor (dejando a un lado las pérdidas por transmisión). De toda la energía que llega al cilindro, una parte es empleada en levantar el pistón, transformándose en trabajo, y el resto pasa el condensador, sin emplearse en la realización del trabajo. Es decir, que sólo una parte de la energía llegada al cilindro es empleada en realizar un trabajo. Lo ideal sería que el 100 % de la energía llegada al cilindro saliera de él en forma de trabajo mecánico. ¿Será posible transformar en trabajo el 100 % de la energía calórica entregada?

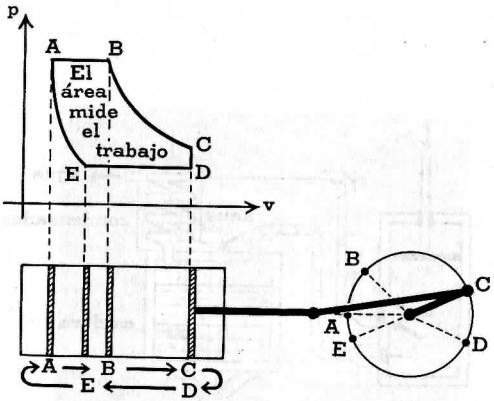


Transformando el movimiento de vaivén en movimiento circular.

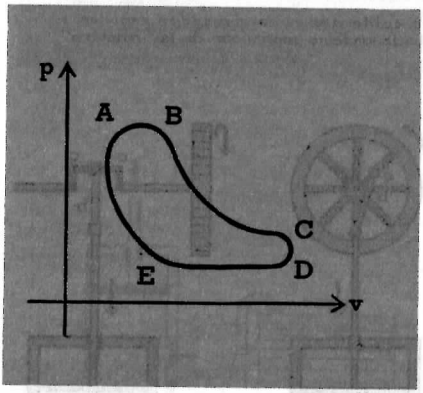
Representación gráfica de los cuatro tiempos

Para estudiar lo que ocurre en una máquina de vapor conviene dividir todo el proceso en cuatro *etapas* o *tiempos*, y representarlo en un sistema de ejes $p\,v$. Se obtendrá una figura cerrada, que representa el *ciclo* cumplido por la máquina.

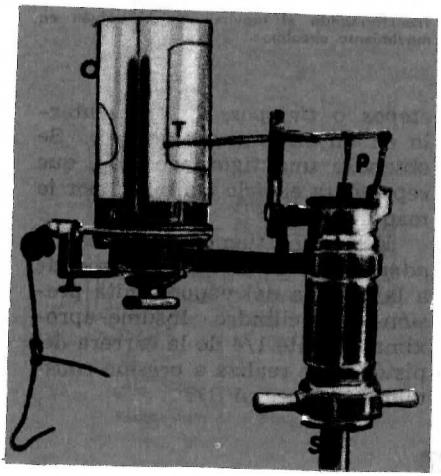
El primer tiempo se llama *de admisión*, y es el que corresponde a la entrada del vapor a alta presión en el cilindro. Insume aproximadamente 1/4 de la carrera del pistón, y se realiza a presión constante (*isobara A B*).



El ciclo ideal de la máquina de vapor.



El ciclo real de la máquina de vapor.



Indicador que dibuja automáticamente el ciclo de una máquina de vapor. El eje S está conectado al cilindro de la máquina. La presión del vapor mueve al pistón P, al que está unido el lápiz T. El cilindro C, en el que está arrollado el papel, gira sincrónicamente con el movimiento de la máquina.

Una vez cerrada la válvula de entrada, comienza la expansión del vapor, que constituye el segundo tiempo. Teóricamente se admite que es un proceso *adiabático* (B C). El tercer tiempo es la *expulsión*, que comienza cuando se abre la válvula de escape, lo que produce un descenso brusco de la presión (C D), y continúa con el barrido de los vapores restantes (*isobara* D E). Pero no se barre todo el vapor, pues la válvula de escape se cierra antes de que el pistón termine su carrera de vuelta. El cuarto tiempo comienza con el cierre de dicha válvula, y consiste en la *compresión* de los vapores restantes (*adiabática* E A), y la máquina queda lista para recibir una nueva masa de vapor y repetir el proceso. El ciclo está representado, pues, por la figura A B C D E A, cuya área mide el trabajo realizado.

El ciclo representado no es el que siguen las máquinas en la realidad, sino el que debieran seguir en condiciones ideales, pero los ciclos reales tienen aproximadamente esa forma. Como veremos en el parágrafo siguiente, es importante conocer su ciclo real, lo que se logra con aparatos que lo dibujan automáticamente, llamados *indicadores*.

Rendimiento

Se llama rendimiento de una máquina (que representaremos

con la letra griega η: etha), al cociente entre el trabajo realizado por la máquina y la cantidad de calor que le fue entregada:

$$\eta = \frac{L}{Q}.$$

Ej.: *Si a una máquina se le entregan 20 kcal y realiza un trabajo de 854 kgm, su rendimiento es:*

$$\eta = \frac{854 \text{ kgm}}{20 \text{ kcal}} = \frac{854 \text{ kgm}}{8\,540 \text{ kgm}} =$$

$$= \frac{854}{8\,540} = 0{,}1, \text{ o sea el } 10\ \%.$$

Para calcular el rendimiento de una máquina de vapor hay que conocer L y Q; para calcular Q es necesario saber cuántas calorías suministra el combustible empleado. Se llama *poder calorífero* de una sustancia, a la cantidad de calorías que produce la combustión total de 1 kg. Ejemplo: el hidrógeno tiene un poder calorífero de 34 600 kcal, porque la combustión de 1 kg de hidrógeno produce esa cantidad de calor; el del cabón es de 8 000 kcal; el de la nafta, 10 400 kcal.

El cálculo del trabajo L se basa en que el área encerrada por la curva que representa una transformación cualquiera en un sistema de ejes $p\,v$, mide el trabajo realizado durante la transformación. En efecto: analicemos el ciclo de la figura, formado sólo por isométricas e isobaras.

Durante la transformación A B, el trabajo es

$$L_1 = A\,B\,V_2\,V_1 = p_1\,(v_2 - v_1).$$

Durante la transformación B V_2, el trabajo es

$$L_2 = 0.$$

Durante la transformación $V_2\,V_1$, el trabajo es

$$L_3 = C\,D\,V_1\,V_2 = p_2\,(v_1 - v_2).$$

Durante la transformación V_1 A, el trabajo es

$$L_4 = 0.$$

El trabajo total es:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 =$$

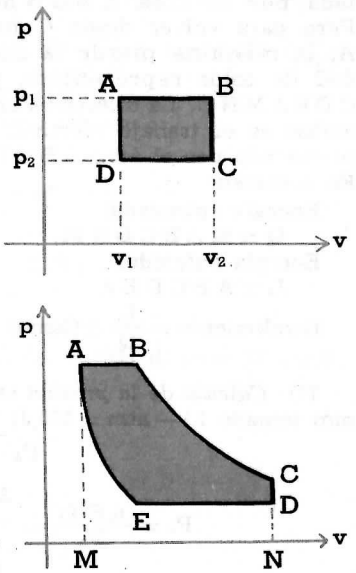
$$= A\,B\,V_2V_1 - C\,D\,V_1V_2 = A\,B\,C\,D.$$

El trabajo realizado por una máquina al cumplir un ciclo, está representado por el área del mismo.

Bastará, pues, dibujar el ciclo con un registrador automático, y medir su área.

Limitación del rendimiento

En un ejemplo anterior hemos calculado que el rendimiento de una máquina era del 10 %, lo que



Área de un ciclo ideal y rendimiento.

significa que por cada caloría suministrada a la máquina, sólo 0,1 caloría se ha transformado en trabajo. ¿Y el resto? La energía no se destruye, de modo que en alguna parte deben estar las 0,9 calorías restantes. Y así es: se han perdido calorías en la caldera, en el cilindro, en el condensador. La conducción y la radiación son inevitables. Pero hay algo más inevitable aún: el vapor que escapa, que va a la atmósfera o al condensador. En una máquina ideal no habrá pérdidas de calor por transmisión ni por roce, pero el vapor que va a la atmósfera o al condensador lleva consigo calor, que se pierde irremediablemente, pues a ese vapor hay que expulsarlo para poder llevar el pistón a su posición inicial.

Esto está reflejado en el ciclo ideal: la cantidad de calor entregada a la máquina está representada por el área A B C N M A. Pero para volver desde C hasta A, la máquina pierde la cantidad de calor representada por C D E A M N C. La diferencia entre ambas es el trabajo *efectivo*, representado por el área A B C D A. En resumen:

Energía entregada:

$$Q = M A B C D N M.$$

Energía obtenida:

$$L = A B C D E A.$$

Rendimiento $= \frac{L}{Q}$. Como

$$M A B C D N M > A B C D E A,$$

resulta

$$\frac{L}{Q} < 1.$$

Si esto sucede en la máquina ideal, con mayor razón en la real.

Una máquina de vapor no puede tener un rendimiento del 100 %.

En las mejores locomotoras, el rendimiento apenas llega al 22 %.

EJ.: *Calcular el ciclo de la figura de la pág. 429, suponiendo los siguientes datos:*

Gas: aire.

Moles: 3/40.

Punto A: Volumen $V_A = 1\,500\ cm^3$; *Temp.* T_A: $500°\,K$.

Punto B: Volumen $V_D = V_A$; *Presión* $P_D = 4\ at.$

Punto C: Volumen $V_C = 2\,250\ cm^3$.

ADVERTENCIA: Calcular un ciclo significa calcular los elementos de cada estado que faltan (en nuestro caso: P_A; T_D; T_C; T_B); el calor, trabajo y variación de energía interna en cada transformación del ciclo; el calor, trabajo y variación de energía interna total, y el rendimiento del ciclo.

1º) *Cálculo de la presión en A* (Los cálculos son aproximados y hemos tomado 1 l — atm = 100 J; 1 J = 0,25 cal):

$$P_A \cdot V_A = n\,R\,T_A\ ;$$

$$P_A = \frac{n\,R\,T_A}{V_A} = \frac{3/40 \cdot 0{,}081\ \frac{lit \cdot at}{°K} \cdot 500°\,K\ ;}{1{,}5\ l}$$

$$P_A \cong 2\ at.$$

2º) *Cálculo de la temperatura en D:*

Por la 2ª ley de Gay-Lussac:

$$\frac{P_A}{P_D} = \frac{T_A}{T_D} \therefore T_B = \frac{P_B \cdot T_A}{P_A} = \frac{4 \text{ at} \cdot 500^\circ \text{ K}}{2 \text{ at}};$$

$$T_D = 1\,000^\circ \text{ K}.$$

3º) *Cálculo de la temperatura en C:*

Por la 1ª ley de Gay-Lussac:

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{T_D}{T_C} \therefore T_C = \frac{T_D \cdot V_C}{V_D} \frac{1\,000^\circ \text{ K} \cdot 2\,250 \text{ cm}^3}{1\,500 \text{ cm}^3};$$

$$T_C = 1\,500^\circ \text{ K}.$$

4º) *Cálculo de la temperatura en B:*

Por la 2ª ley de Gay-Lussac:

$$\frac{P_C}{P_B} = \frac{T_C}{T_B} \; T_D = \frac{P_B \cdot T_C}{P_C} = \frac{2 \text{ at} \cdot 1\,500^\circ \text{ K}}{4 \text{ at}};$$

$$T_B = 750^\circ \text{ K}.$$

Hemos completado así los datos correspondientes a cada estado. Seguiremos ahora con el cálculo de la cantidad de calor, trabajo y variación de energía interna correspondiente a cada etapa del ciclo. Para ello necesitamos la masa de aire que ha cumplido el ciclo, que calculamos multiplicando el número de moles por el peso molecular del aire, que aproximadamente vale 30. O sea:

$$m = \frac{3}{40} \cdot 30 = 2{,}25 \text{ g}.$$

Recordemos, además, que los calores específicos del aire valen:

$$c_v = 0{,}169 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}; \quad c_p = 0{,}237 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}}.$$

5º) *Etapa A D (isométrica):*

Trabajo realizado:

$$W_{AD} = 0.$$

Calor recibido:

$$Q_{AD} = c_v \cdot m \cdot (T_D - T_A) = 0{,}169 \frac{\text{cal}}{\text{g °C}} \cdot 2{,}25 \text{ g} \cdot 500^\circ \text{ K}.$$

$$Q_{AD} = 190 \text{ cal}.$$

Variación de energía interna: como $Q = W + \Delta E$

$$\therefore \Delta E_{AD} = Q_{AD} - W \therefore \Delta E_{AD} = 190 \text{ cal, pues } W_{AD} = 0.$$

6º) *Etapa D C (isobárica):*

Trabajo realizado:

$$W_{DC} = p\,(V_C - V_D) = 4 \text{ at } (2{,}25 \text{ l} - 1{,}5 \text{ l});$$

$$W_{DC} = 3 \text{ lit} \cdot \text{at} \cong 300 \text{ J} \therefore$$

$$W_{DC} = 75 \text{ cal}.$$

Calor recibido:

$$Q_{DC} = c_p \cdot m \cdot (T_C - T_D) = 0{,}237 \cdot 2{,}25 \cdot 500;$$

$$Q_{DC} = 265 \text{ cal}.$$

Variación de energía interna:

$$\Delta E_{DC} = Q_{DC} - W_{DC} = 265 \text{ cal} - 75 \text{ cal};$$

$$\Delta E_{DC} = 190 \text{ cal}.$$

7º) *Etapa C D (isométrica):*

Trabajo realizado:

$$W_{CB} = 0.$$

Calor cedido:

$$Q_{CB} = c_v\, m\, (T_B - C_C) = 0{,}169 \cdot 2{,}25 \cdot (-750);$$

$$Q_{CB} = -285 \text{ cal}.$$

Variación energía interna:

$$\Delta E_{CB} = Q_{CB} - W_{CB} \therefore$$

$$\Delta E_{CB} = -285 \text{ cal}.$$

El signo menos en Q_{CB} indica que la máquina *cedió* calorías al exterior. El signo menos en ΔE_{CB} indica que la energía interna disminuyó, enfriándose el gas.

8º) *Etapa B A (isobárica):*

Trabajo realizado:

$$W_{BA} = p\,(V_A - V_B) = 2 \text{ at } (1{,}5 \text{ l} - 2{,}25 \text{ l});$$

$$W_{BA} = -1{,}5 \text{ lit} \cdot \text{at} = -150 \text{ J};$$

$$W_{BA} = -37 \text{ cal}.$$

Calor cedido:

$$Q_{BA} = c_p \cdot m \cdot \Delta t = 0{,}237 \cdot 2{,}25 \cdot 250;$$

$$Q_{BA} = -133 \text{ cal}.$$

Variación energía interna:

$$\Delta E_{BA} = Q_{BA} - W_{BA} = -133 \text{ cal} - (-37 \text{ cal});$$

$$\Delta E_{BA} = -96 \text{ cal}.$$

Los signos *menos* vuelven a indicar lo mismo que en la etapa anterior.

9º) *Balance:*

a) *Calor:*

Cantidad total de calor recibido:

$$Q_1 = Q_{AD} + Q_{DC};$$

$$Q_1 = 190 \text{ cal} + 266 \text{ cal};$$

$$Q_1 = 456 \text{ cal}.$$

Cantidad total de calor cedido:

$$Q_2 = Q_{CB} + Q_{BA};$$

$$Q_2 = (-285 \text{ cal}) + (-133 \text{ cal});$$

$$Q_2 = -418 \text{ cal}.$$

Diferencia:

$$456 \text{ cal} - 418 \text{ cal} = \boxed{38 \text{ cal}}$$

b) *Trabajo:*

Trabajo positivo de la máquina:

$$W_{DC} = 75 \text{ cal}.$$

Trabajo negativo de la máquina:

$$W_{BA} = -37 \text{ cal}.$$

Trabajo útil del ciclo:

$$75 \text{ cal} - 37 \text{ cal} = \boxed{38 \text{ cal}}$$

La igualdad entre este resultado y el anterior está de acuerdo con el Principio de Conservación de la Energía, pues el trabajo es igual a la diferencia entre las calorías recibidas por la máquina (456 cal) y las calorías que ésta ha tenido que ceder al exterior (418 cal) para completar su ciclo —.

c) *Energía interna:*

La variación total de energía interna vale:

$$\Delta E = \Delta E_{AD} + \Delta E_{DC} +$$

$$+ \Delta E_{CB} + \Delta E_{BA};$$

$$\Delta E = 190 \text{ cal} + 191 \text{ cal} -$$
$$- 285 \text{ cal} - 96 \text{ cal};$$

$$\Delta E = 0.$$

Resultado completamente de acuerdo con la ley de Joule (la variación de energía interna sólo depende de las temperaturas inicial y final; aquí, el estado inicial y el final coinciden), y que enseña otra propiedad característica de los ciclos: la variación total de energía interna de un ciclo vale *cero*.

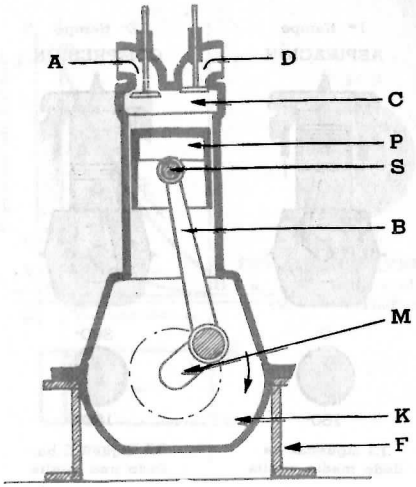
10º) *Rendimiento:*

De acuerdo con la definición:

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{38 \text{ cal}}{456 \text{ cal}}$$

$$\boxed{\eta = 0{,}08 = 8\ \%}$$

Obsérvese cómo la "culpa" de que el rendimiento no valga 100 % está en las 418 cal que la máquina debe ceder al exterior para poder completar su ciclo.



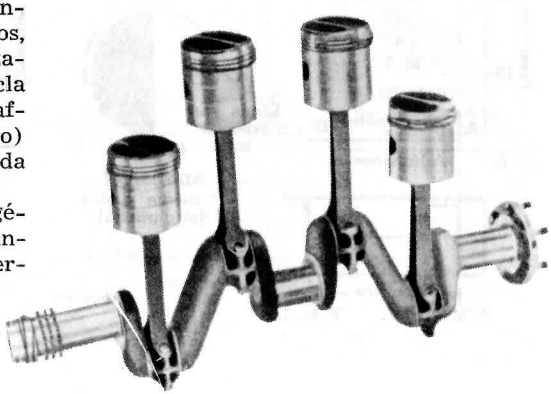
Corte del cilindro de un motor de explosión: A, válvula de admisión; D, válvula de escape; C, cilindro; P, pistón; S, perno; B, biela; M, cigüeñal; K, cárter; F, soporte.

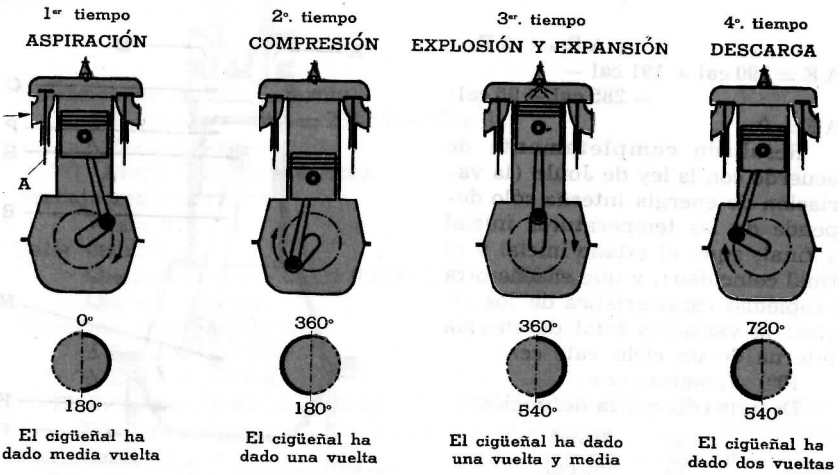
El motor de explosión

Consta de los mismos elementos motrices de la máquina de vapor, pero difieren en el medio de producir el movimiento del pistón. En el motor de explosión, la idea es sencilla y audaz: provocar una explosión en el interior del cilindro. Si todo no salta en pedazos, el pistón se moverá y realizará trabajo mecánico. La mezcla explosiva estará formada por nafta (u otro combustible adecuado) y aire; la chispa será producida por una bujía eléctrica.

Una explosión presenta energéticamente, dos aspectos interesantes: *a)* la gran cantidad de energía que se libera; *b)* la elevada temperatura que se produce. Un motor de este tipo tendrá sobre la máquina de vapor la ventaja de un menor volumen y menor peso, pues la caldera y el condensador son innecesarios, porque la fuente térmica que entrega calor a la máquina es la explosión misma.

Cigüeñal o eje de un motor de explosión, con cuatro cilindros en línea.



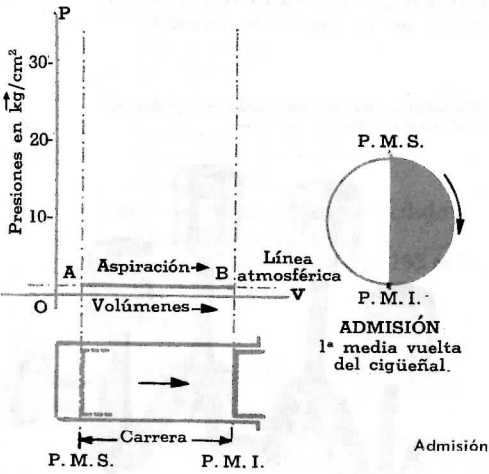


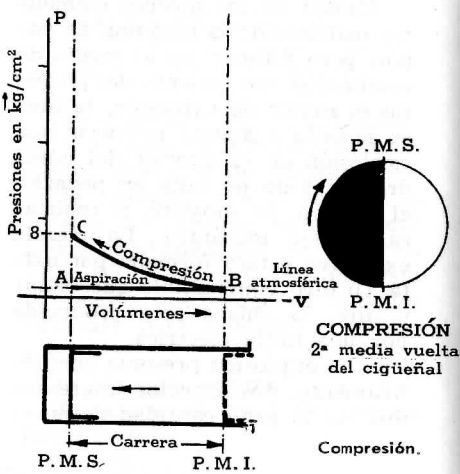
Los cuatro tiempos de un motor de explosión.

El ciclo del motor de explosión

Como en la máquina de vapor, se pueden considerar cuatro tiempos (hay también motores de dos tiempos):

1er. TIEMPO: ADMISIÓN. El émbolo se encuentra en el punto muerto superior (P M S), y se pone en movimiento por acción del cigüeñal. Inicia así una carrera descendente, en el mismo instante en que se abre la válvula de admisión, que pone al cilindro en comunicación con el carburador. Al descender el pistón, disminuye la presión en el interior del cilindro, y aspira así la mezcla provenien-





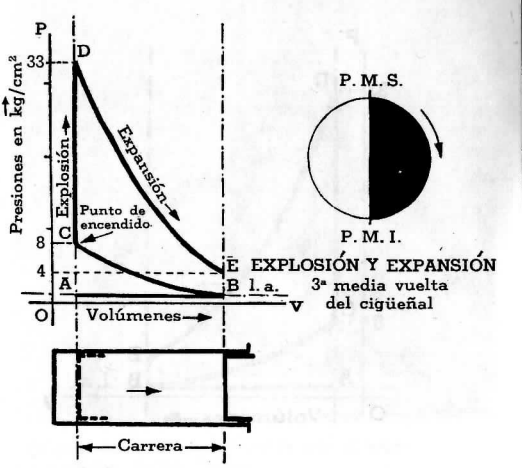
te del carburador. Cuando el pistón llega al punto muerto inferior (P M I), todo el cilindro está lleno de la mezcla combustible, a la presión atmosférica. Se cierra la válvula de admisión, con lo cual concluye el primer tiempo, que queda descripto por la isobara A B, pues prácticamente la presión se mantuvo constantemente igual a la atmosférica.

2º TIEMPO: COMPRESIÓN. Las válvulas de admisión y escape están cerradas. El pistón sube y la presión aumenta a medida que disminuye el volumen ocupado por la mezcla. Consecuencia: aumenta su temperatura. Cuando el pistón llega al P M S, la mezcla ocupa sólo el volumen de la cámara de compresión.

La presión es grande (≃ 8 atm), y la temperatura está muy próxima a la que se necesita para inflamar la mezcla. Este segundo tiempo es descripto por la adiabática B C, pues teóricamente se supone que el proceso ha sido adiabático, es decir, sin entrada ni salida de calor.

3er. TIEMPO: EXPLOSIÓN Y EXPANSIÓN. En este tercer tiempo ocurren simultáneamente dos procesos diferentes: La bujía recibe corriente eléctrica, y entre sus puntas salta la chispa que inflama a los gases comprimidos; esta inflamación se propaga rapidísimamente a toda la masa gaseosa, la que se quema totalmente antes de que el pistón tenga tiempo de empezar a bajar. Por eso el proceso de explosión se considera isométrico, y en la gráfica se representa mediante la isométrica C D.

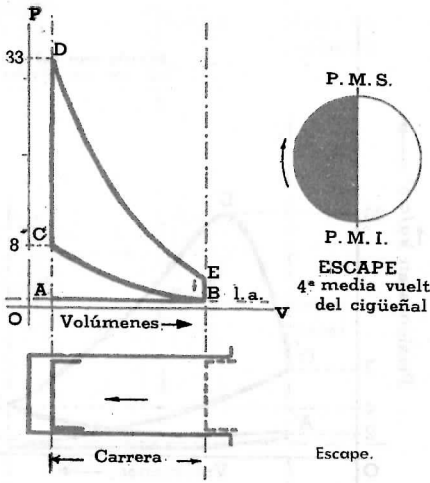
El calor desarrollado por la combustión aumenta considerablemente la presión y temperatura de



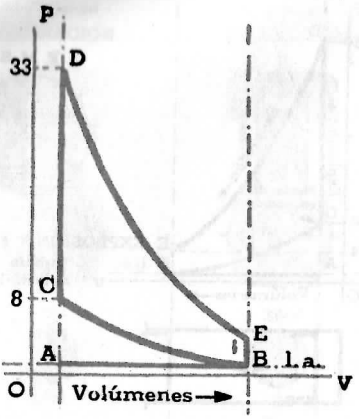
Explosión y expansión.

los gases resultantes de la misma que, en consecuencia, se expanden y bajan violentamente el pistón. Esta segunda parte del tercer tiempo se llama *expansión*, y, como la compresión, se la supone adiabática. Su línea representativa es la adiabática D E.

4º TIEMPO: ESCAPE. Al iniciarse,



Escape.



El ciclo ideal completo del motor de explosión.

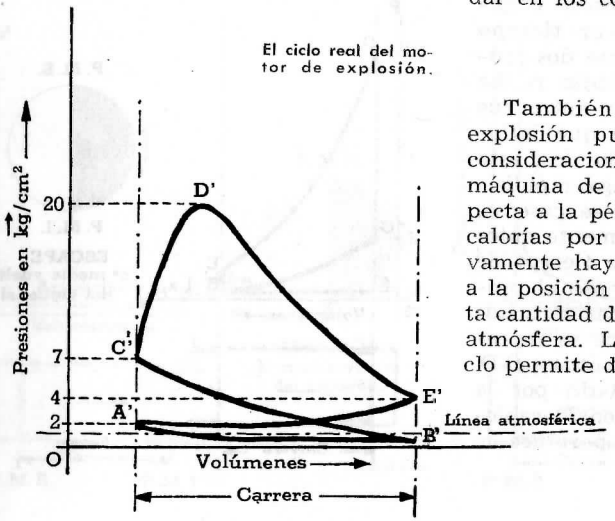
el pistón está en P M I y el cilindro está lleno de gases a una presión todavía algo superior a la atmosférica. La válvula de descarga se abre y parte de los gases salen al exterior; la presión baja, hasta igualar a la atmosférica. Este proceso es muy rápido y se produce antes de que el pistón haya tenido tiempo de salir del P M I.

Es, pues, un proceso isométrico, y en el ciclo está representado por E B.

La descarga de gases es completada por el pistón, en su carrera desde el P M I hasta el P M S y durante este barrido la presión no varía, por lo cual el proceso está representado por la isobárica B A. Al llegar el pistón al P M S, la válvula de descarga se cierra y el ciclo finaliza, quedando el cilindro en condiciones de aspirar una nueva cantidad de mezcla y reiniciar el proceso.

De esta descripción se deduce que hay una sola carrera motriz –la de expansión–, y que para obtenerla el motor necesita cuatro carreras del pistón. Por lo tanto: el trabajo obtenido en esa sola carrera debe ser mayor que el gastado en las otras. La energía necesaria para producir la primera carrera del pistón –al poner el motor en marcha– debe ser suministrada por algo *exterior* al propio motor (el motor de arranque en los automóviles modernos, o la "vuelta de manija" que había que dar en los coches antiguos).

El ciclo real del motor de explosión.



Rendimiento

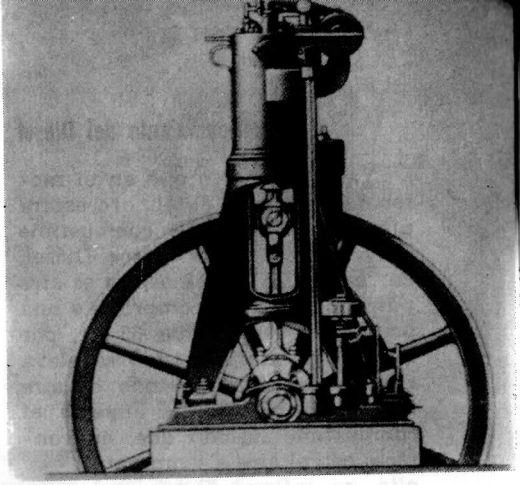
También para el motor de explosión pueden repetirse las consideraciones formuladas para la máquina de vapor en lo que respecta a la pérdida irremediable de calorías por el escape, pues nuevamente hay que volver el pistón a la posición inicial: hay una cierta cantidad de calorías que va a la atmósfera. La observación del ciclo permite decidir inmediatamen-

te que, aun sin tener para nada en cuenta las pérdidas por roce, conducción del calor, etc.

Un motor de explosión no puede tener un rendimiento del 100%.

El motor Diésel

En el motor de explosión suele producirse un inconveniente: el "autoencendido". Si la compresión de la mezcla supera cierto límite, la temperatura se eleva tanto que la mezcla se inflama por sí sola, antes de saltar la chispa. En 1893, el doctor Rodolfo Diésel, alemán, reflexionaba sobre la forma de combatir el autoencendido cuando una idea cruzó por su cerebro: no evitar el autoencendido, sino por el contrario, *provocarlo*.



Primitivo motor diésel, ensayado por el ingeniero alemán Rudolf Diésel.

Así nació el motor Diésel, de "autoencendido", que une el bajo costo del combustible que emplea a un elevado rendimiento energético, mayor que el del motor de explosión.

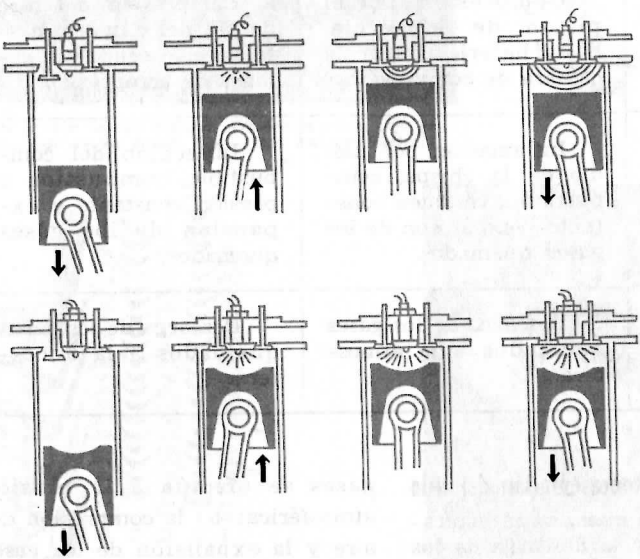


Diagrama comparativo de los ciclos del motor de explosión y del Diésel.

Funcionamiento del Diésel

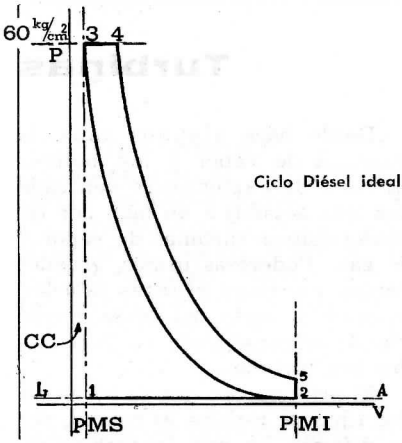
Ya hemos visto que en el motor de explosión, el cilindro aspira una *mezcla* de aire y combustible pulverizado. En el motor Diésel, en cambio, lo que se aspira es *aire puro*. El pistón lo comprime a una presión elevada (unas 35 at), por lo cual la temperatura se eleva muchísimo. Cuando todo el aire está comprimido, se inyecta el combustible líquido que, en contacto con el aire a temperatura tan alta, se inflama, quemándose a medida que entra en el cilindro. La inyección de combustible dura bastante tiempo, por lo cual no hay aquí explosión, sino combustión. El proceso, pues, no es ahora a volumen constante, pero sí es isobárico, porque la entrada de combustible se gradúa de tal manera, que la presión de los gases se mantiene constante durante el tiempo que dura la combustión.

El siguiente cuadro muestra las diferencias y semejanzas entre los procesos que ocurren en ambos motores:

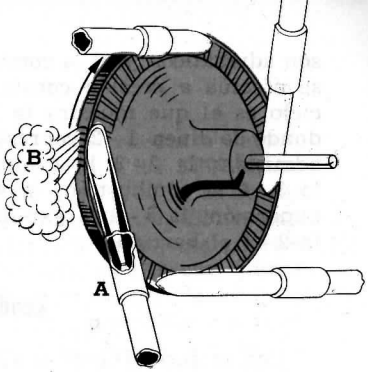
Ciclo del motor de explosión		*Ciclo del motor Diésel*
1er. tiempo: ADMISIÓN	Aspiración por el cilindro de la mezcla de combustible y aire.	Aspiración de aire a la presión atmosférica.
2º tiempo: COMPRESIÓN	Compresión, por el pistón, de la mezcla, hasta hacerle ocupar la cámara de compresión.	Compresión del aire dentro del cilindro, hasta hacerle ocupar la cámara de compresión.
3er. tiempo: EXPLOSIÓN O COMBUSTIÓN Y EXPANSIÓN	Inflamación por medio de la chispa, combustión a volumen constante y expansión de los gases quemados.	Inyección del combustible, combustión a presión constante y expansión de los gases quemados.
4º tiempo: ESCAPE	Descarga de los gases quemados a la atmósfera.	Descarga de los gases quemados a la atmósfera.

Representación del ciclo

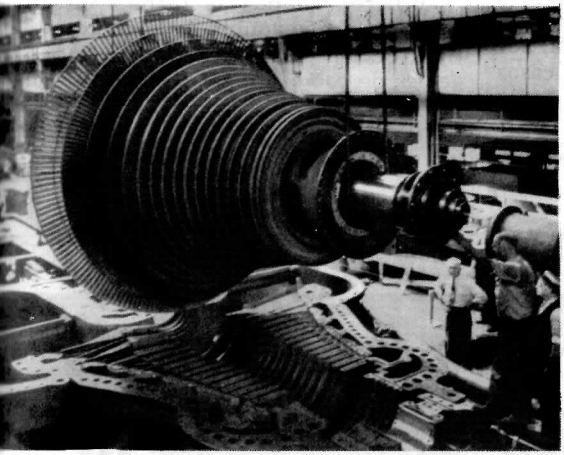
Suponiendo que: *a)* la aspiración del aire y la descarga de los gases se efectúa a la presión atmosférica; *b)* la compresión del aire y la expansión de los gases



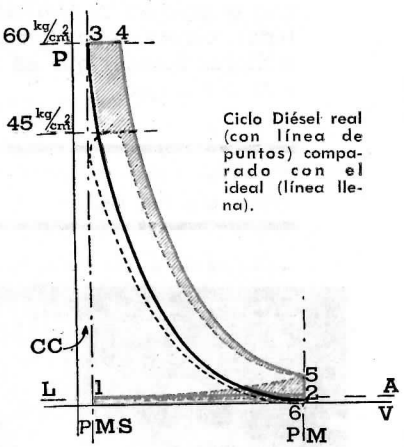
Ciclo Diésel ideal.



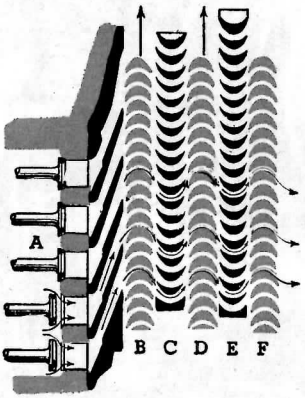
Los chorros de vapor provocan el movimiento de la turbina.



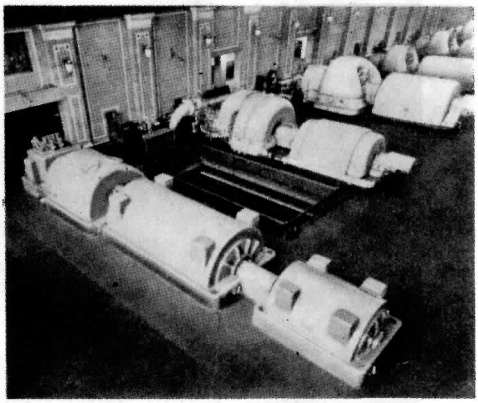
Rotor y caja de una turbina. Obsérvese en la caja la disposición de los álabes fijos. (**Foto General Electric.**)



Ciclo Diésel real (con línea de puntos) comparado con el ideal (línea llena).



Corte mostrando los álabes fijos y los móviles.



Grupo de turbinas instalado en una usina eléctrica. (**Foto General Electric.**)

son adiabáticos, y *c)* la combustión se efectúa a presión constante, el ciclo es el que muestra la figura, donde la línea 1 - 2 representa la admisión; la 2 - 3 la compresión; la 3 - 4 la combustión; la 4 - 5 la expansión; la 5 - 2 la expulsión, y la 2 - 1 el barrido.

Rendimiento

Con motores Diésel se alcanzan rendimientos superiores a los de los motores de explosión; la razón fundamental es la alta temperatura a que se produce la combustión. De todas maneras, el ciclo enseña, por análogas razones que en los casos anteriores, que:

Un motor diesel no puede tener un rendimiento del 100%.

Turbinas

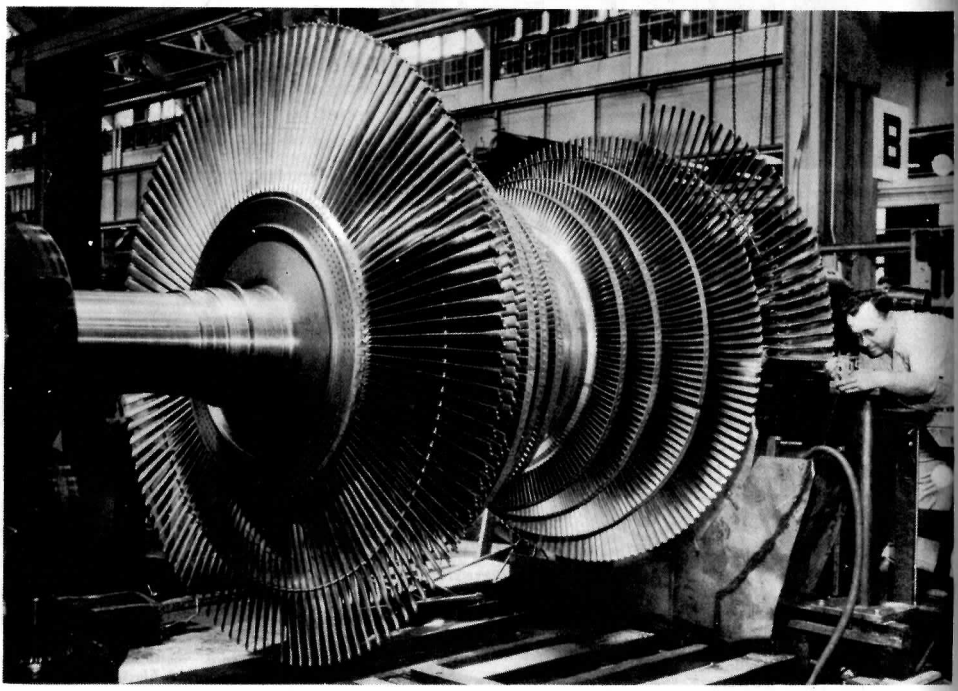
Desde hace algunos años, la máquina de vapor y los motores Diésel y de explosión se ven cada vez más dejados a un lado por las modernísimas turbinas de vapor y de gas. Poderosas usinas, grandes barcos, enormes plantas fabriles, aviones, y hasta máquinas ferroviarias se construyen ya impulsadas por turbinas.

El principio en que se basan los dos tipos de turbina es común, pero difieren en que la turbina de vapor es una máquina de *combustible externa*, mientras que la de gas es de *combustión interna*.

La turbina de vapor

El principio de su funcionamiento es como el del molino de

Álabes móviles de una turbina de vapor. (Foto General Electric.)



viento. En la periferia de una rueda acoplada a un eje hay un conjunto de pequeñas paletas, más o menos similares a las del molino, que se llaman *álabes*. Sobre éstos se dirige, mediante conductos adecuados, llamados *toberas*, un fuerte chorro de vapor que provoca la rotación de la rueda, y por lo tanto del eje.

Las turbinas modernas no están constituidas por una sola rueda, sino por un conjunto –alrededor de 20–, con unos 5 000 álabes. El *rotor* de la turbina, es decir, el conjunto de ruedas giratorias, adopta una forma peculiar, pues se ensancha paulatinamente de la entrada hacia la salida. Esa disposición se debe a que el vapor, a medida que recorre la turbina, se va enfriando; la presión disminuye, y por lo tanto, aumenta su volumen, de manera que en la zona de alta presión (a la entrada), el espacio necesario debe ser menor que en la zona de baja presión (a la salida).

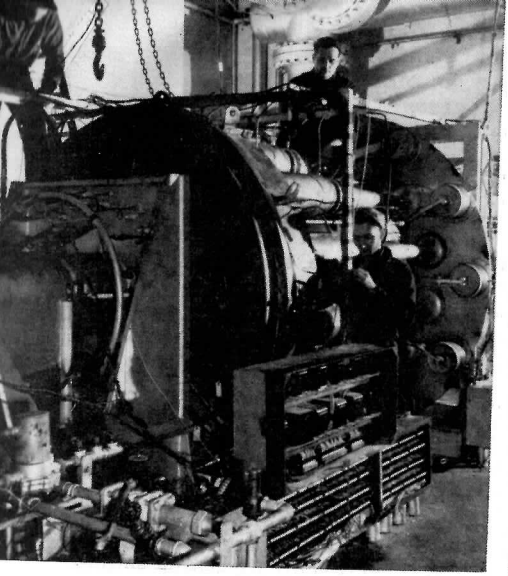
Para lograr mayor eficiencia, en la caja que contiene al rotor se colocan álabes fijos, dispuestos como indica la fotografía de la página 439. Estos álabes tienen por misión dirigir el chorro de vapor que sale de un álabe móvil, de modo que choque contra el álabe perteneciente a la rueda siguiente en la forma más adecuada. Así, en la figura, después que el vapor ha pasado a través de la primera serie de álabes móviles B, pasa por la serie C de álabes fijos (se observará que están curvados en sentido contrario a los móviles) que dirigen el chorro hacia la serie siguiente D, de álabes móviles.

El chorro de vapor que choca contra los álabes entra a una velocidad aproximada de 2 000 km/h, impulsando a las ruedas a velocidades superiores a los 1 000 km/h. Por otra parte, la presión de entrada es de unas 80 atm. Si se empleara una sola rueda, esa enorme presión bajaría, en 1/30 seg, a unas pocas atmósferas, por lo cual se hace necesario distribuir ese gran salto en varias etapas, siendo ésa una de las causas de que se construyan rotores con muchas ruedas.

En la construcción de una turbina se presentan problemas técnicos sumamente difíciles, tales como el brusco aumento de temperatura (de 20° C a más de 500° C), las altas velocidades, las formidables fuerzas centrífugas que actúan sobre las ruedas, y las vibraciones internas. La turbina es más eficiente cuanto mayor es la velocidad de trabajo, de modo que no conviene utilizarla en instalaciones en las que no se requieren velocidades elevadas. Cuando se la emplea en locomotoras y barcos, se la dota de enormes engranajes reductores, pues normalmente gira a razón de unas 70 000 vueltas por minuto.

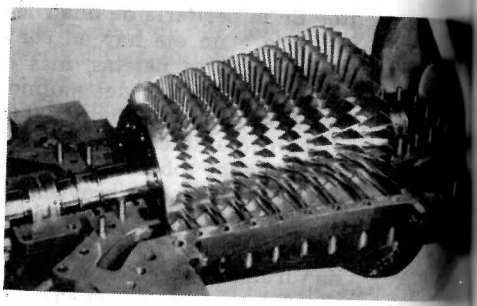
Turbina de gas

La turbina de gas consta, además del rotor y sus elementos análogos a los de la turbina de vapor, de una cámara de combustión, donde se inyecta una corriente de combustible líquido. Allí quema continuamente, dando una corriente constante de gases de alta presión y alta temperatura. Al pasar por los álabes de la turbina, los gases se expanden y enfrían. Para aumentar la eficiencia, el aire que va a la cámara de combustión es comprimido antes; el compresor

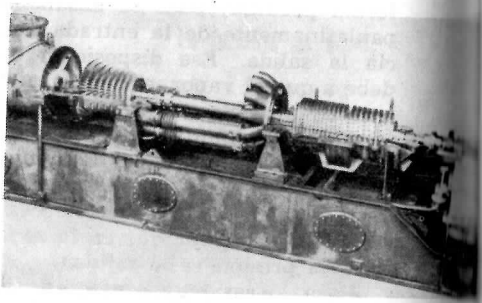


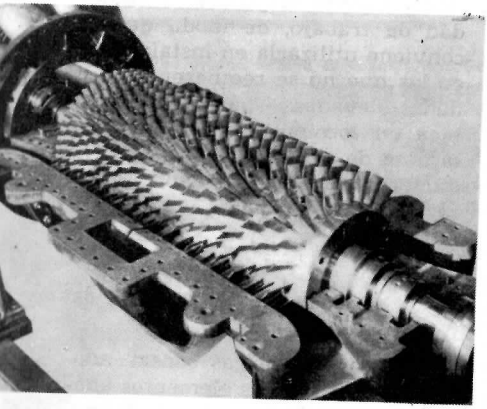
Turbina de gas de 30 000 HP.

Turbina de gas de 6 000 HP.

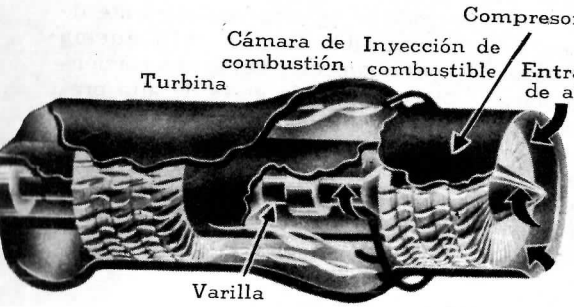


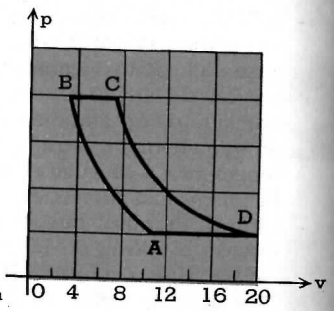
Disposición de la turbina con su compresor acoplado.





Compresor para la turbina de gas.





Ciclo ideal de una turbina.

Corte de una turbina de gas. (De Science Illustrated.)

está acoplado al propio eje de la turbina, de modo que es ésta la que lo impulsa. Claro que así se desperdicia parte de la energía; en una turbina de 6 000 HP, 4 000 HP los usa el compresor; pero la experiencia ha demostrado que aun así el rendimiento es mucho mayor que si se empleara aire no comprimido.

Después de haber movido a la turbina, los gases restantes escapan a la atmósfera, o son recobrados, según el tipo de turbina de que se trate.

La puesta en marcha de la turbina se realiza, en algunos tipos, de la siguiente manera: mediante un botón se hace saltar una chispa en la bujía de la cámara de combustión; el combustible se enciende, los gases que así se producen pasan a la turbina y la ponen en marcha; ésta mueve al compresor, que envía aire a la cámara, y el proceso continúa. Cuando la temperatura aumenta suficientemente, la bujía ya no es necesaria, de modo que se la desconecta.

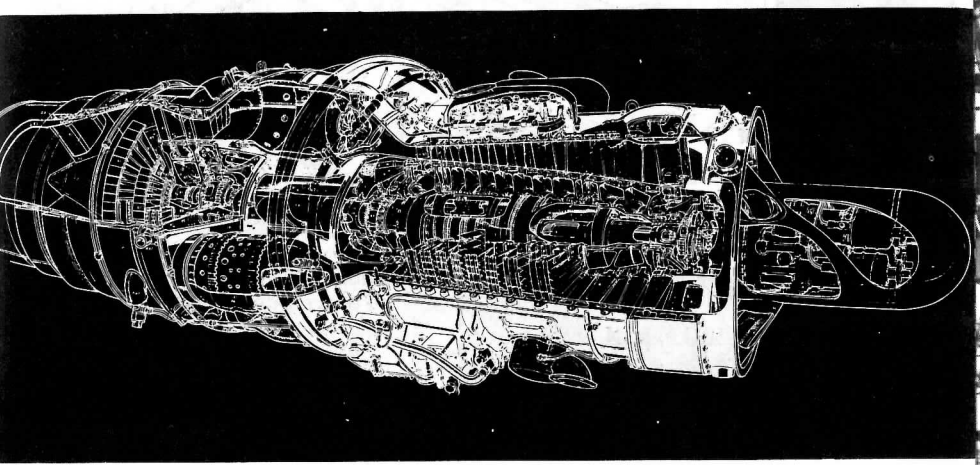
Los álabes se construyen de aleaciones especiales, como Hastelloy B (níquel y molibdeno), aptas para resistir altas temperaturas.

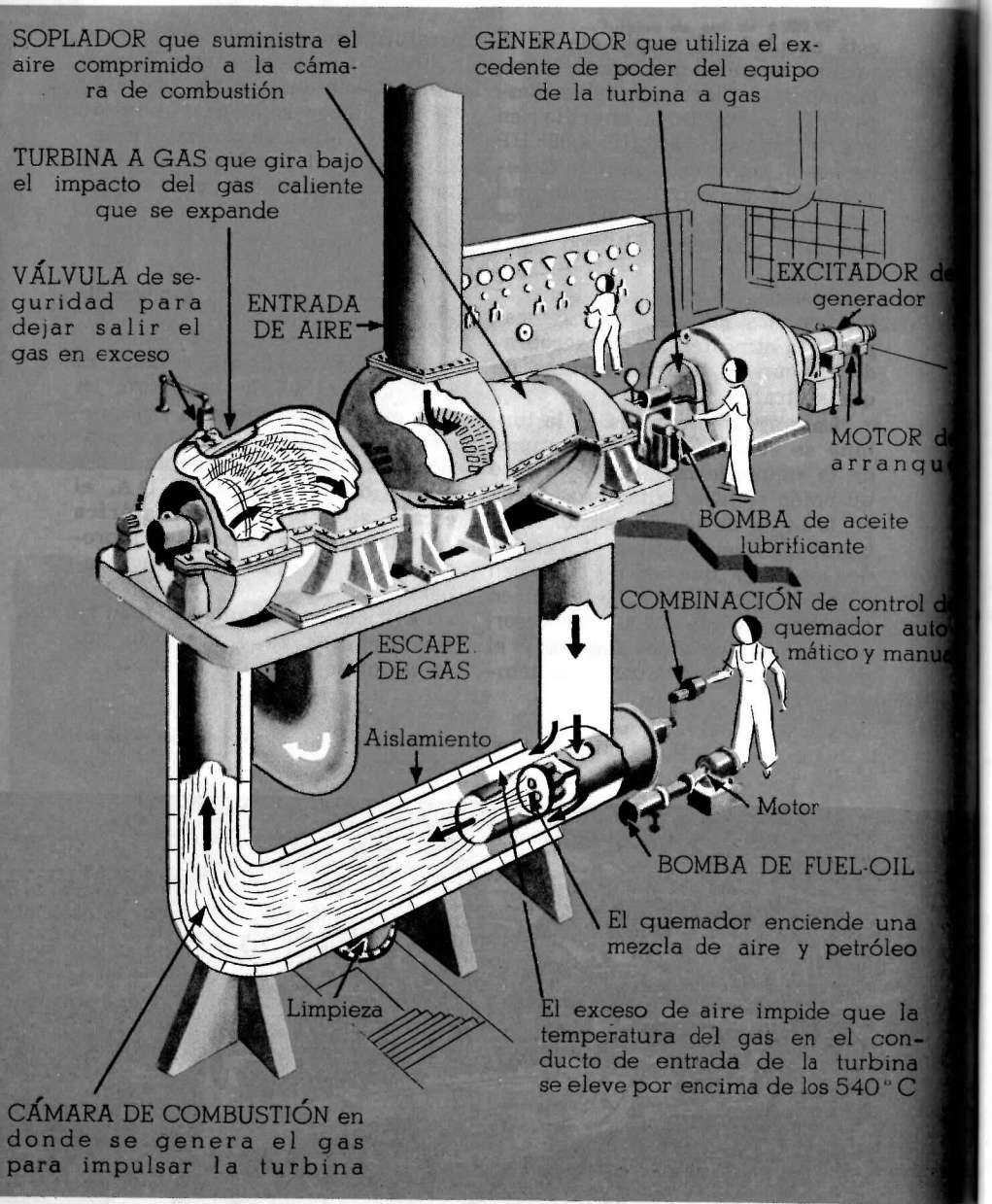
Rendimiento

El ciclo ideal –sin contar las pérdidas– es el de la figura, en donde A B representa la compresión; B C, el calentamiento a presión constante, C D, la expansión a través de la turbina, y D A, el escape a la presión atmosférica (se supone que tanto la compresión como la expansión son adiabáticas).

El ciclo enseña que también en las turbinas se cumple lo que en las otras máquinas térmicas:

Turbina de propulsión de chorro usada en los aviones modernos.





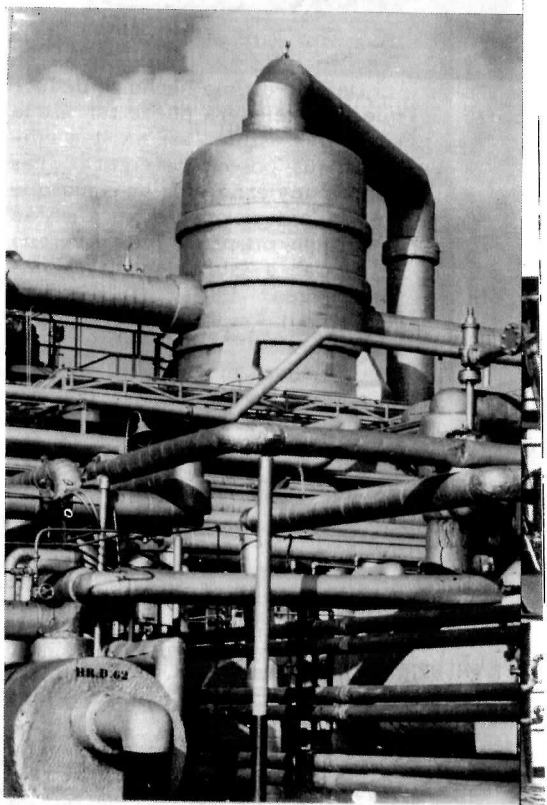
Esquema del funcionamiento de una usina eléctrica cuya energía la suministra una turbina de gas

Una turbina no puede tener un rendimiento del 100%.

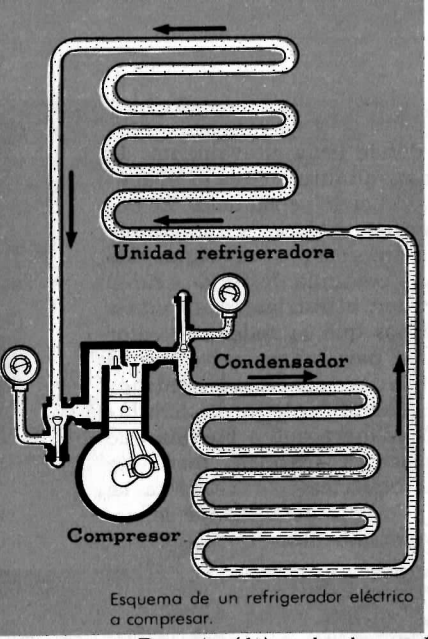
El rendimiento real de las turbinas llega a 20 %, como máximo. Se alcanzarán rendimientos superiores cuando se cuente con las aleaciones adecuadas para resistir temperaturas más altas.

Refrigeradoras

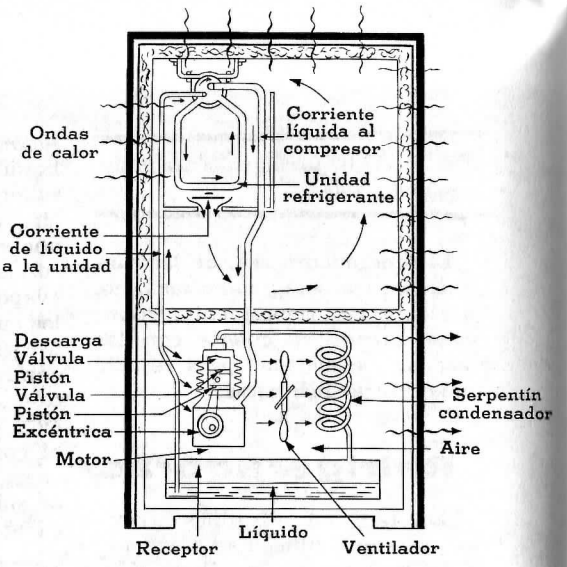
Son también máquinas térmicas, pero que funcionan al revés: en las que hemos estudiado, *desde el exterior* se entrega a la máquina una *cierta cantidad de calor*, que la máquina transforma en parte en trabajo, yendo el resto a la fuente fría. En las refrigeradoras, en cambio, *desde el exterior* se entrega *trabajo*, que la máquina utiliza para transportar calor desde una zona de baja temperatura a otra de alta temperatura. Analicemos, por ejemplo, lo que ocurre en una heladera eléctrica (refrigeradora a compresor): En el *evaporador* se produce la evaporación de un líquido volátil, llamado refrigerante (por ejemplo, amoníaco, dicloro-difluorometano, comercialmente llamado "freón", etc.). El vapor resultante es comprimido a alta presión, mediante el *compresor*, pasando luego al *condensador*, donde licua nuevamente. El líquido resultante vuelve al evaporador, y el ciclo se reinicia. Es decir: con el *trabajo* suministrado por el compresor se consigue una corriente continua de fluido. En el evaporador, el refrigerante *quita* a los cuerpos que le rodean el calor necesario para vaporizarse; en el condensador, en cambio, *entrega* calor, generalmente a la habitación, de manera que a medida que el compresor trabaja –mediante energía eléctrica–, *la heladera se enfría y la habitación donde se encuentra se calienta.*



Columnas de refrigeración en la industria petrolera.



Esquema de un refrigerador eléctrico a compresar.



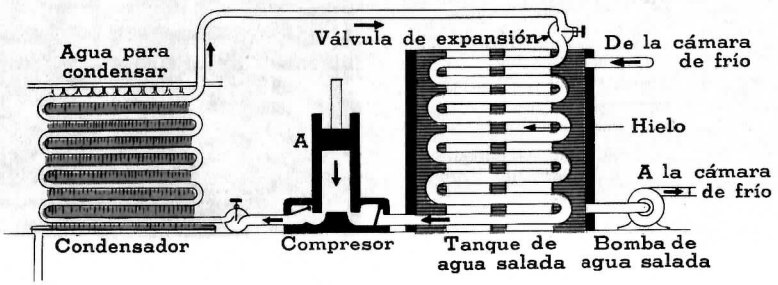
Corte de una heladera eléctrica.

De este último hecho se deduce que una heladera puede ser usada como una estufa: así, existen edificios que poseen refrigeradoras que en invierno enfrían agua que circula exteriormente y calientan el edificio, mientras que en verano refrigeran a éste mientras calientan el agua.

Como lo muestra el esquema, muy poca es la diferencia entre una heladera eléctrica de uso doméstico y una máquina de fabricar hielo.

Por último, una *observación*: en el capítulo XXXI hemos estudiado la *heladera de fuego*. Aunque en ésta no hay trabajo exterior alguno, la diferencia termodinámica con una heladera eléctrica es más aparente que real: en última instancia, esta última funciona gracias a la energía eléctrica, siendo el compresor el vehículo utilizado para su empleo, mientras que en la heladera a fuego es una llama la que suministra la energía necesaria. En ambos casos, la energía entregada desempeña la misma función: transportar calor desde un lugar de baja temperatura a otro de alta temperatura.

Esquema del funcionamiento de una instalación frigorífica.

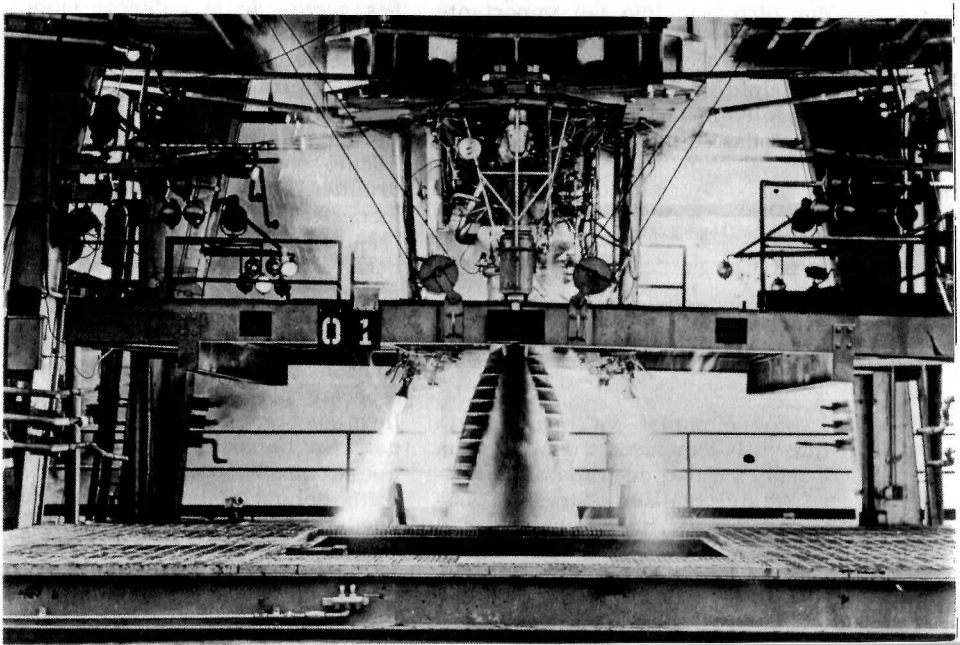


33 EL SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Las máquinas térmicas estudiadas en el capítulo anterior tienen una característica común: EN NINGUNA DE ELLAS EL RENDIMIENTO ES DEL 100 %. En todas es imposible evitar que una apreciable cantidad de calorías se "desperdicien" en la fuente fría (condensador en la máquina de vapor, la atmósfera en motores y turbinas).

Lo que en ellas ocurre, ¿es una simple casualidad, o hay quizás alguna ley natural que impida que el calor entregado a la máquina se transforme totalmente en trabajo? No podría ser el Principio de Conservación de la Energía, que sólo niega la posibilidad de rendimientos *superiores* al 100 %, porque implicarían *creación* de energía.

De acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, en una máquina térmica una cantidad apreciable de calorías se "desperdicia" en la fuente fría.



Como ocurrió con dicho Principio, la respuesta vino del fracaso reiterado de muchos inventores que, después de haber fallado en la búsqueda del movimiento continuo, se lanzaron tras la panacea de una máquina de 100 % de rendimiento. Observando lo que pasaba con las máquinas térmicas, en donde el culpable es la fuente fría, entendieron que la máquina buscada debería trabajar con una sola fuente térmica, la de temperatura superior. El ejemplo clásico es el de una máquina que funcionara utilizando el calor del mar, que es entregado a éste por el Sol. Se contaría en tal caso con un formidable almacén de energía, prácticamente inagotable, al alcance de todo el mundo y de costo ínfimo. Los ensayos fracasaron, y también las tentativas de inventar mecanismos adecuados. De ahí surgió el convencimiento de que en la Naturaleza existe, además del Principio de Conservación de la Energía, otro principio tan importante como él, y que es cumplido celosamente. Fue llamado Segundo Principio de la Termodinámica, y puede enunciarse de varias maneras, todas equivalentes entre sí:

Una máquina térmica no puede tener un rendimiento del 100 %.
Es imposible fabricar una máquina térmica que funcione con una sola fuente.

Por ejemplo: ya hemos visto que en la experiencia de Joule una cierta cantidad de trabajo mecánico (el que realizan las pesas al bajar) se transforma en una cantidad equivalente de calor. Si el proceso inverso fuera realizable, existiría alguna forma de levantar las pesas enfriando el calorímetro, llevándolas a la posición inicial. De acuerdo con el Segundo Principio, eso es imposible, por lo cual también se lo puede enunciar de la siguiente manera:

No existe ningún procedimiento que en la experiencia de Joule permita enfriar el calorímetro y levantar las pesas de modo que todo vuelva al estado inicial.

El ciclo perfecto

Aunque el Segundo Principio fue enunciado por Rodolfo Clausius (alemán) en 1850, en 1828 un joven físico francés, Sadi Carnot, lo intuyó admirablemente, en su célebre trabajo titulado *Reflexiones acerca de la potencia motriz del fuego*. Recalcaba muy especialmente la necesidad de *dos* fuentes térmicas para que una máquina térmica pudiese funcionar. Carnot comparaba su funcionamiento con el de una rueda hidráulica: para que funcione es menester un *desnivel* en la corriente de agua. De la misma manera, exponía, el calor sólo puede producir trabajo si existe un *desnivel térmico*.

Las conclusiones de Carnot derivaron del estudio de un ciclo especial, por él inventado, y que lleva su nombre: el *ciclo de Carnot*. Su importancia proviene de que es posible demostrar que se trata del ciclo más perfecto que pueda existir. Si fuera posible

Sadi Carnot.

Rodolfo Clausius.

construir una máquina que funcionara según dicho ciclo, su rendimiento sería mayor que el de cualquier otra máquina. Pero tampoco en ese caso –el perfecto– el rendimiento llegaría a 100 %.

El ciclo de Carnot A B C D A está formado por una *expansión isotérmica* (A B), *una expansión adiabática* (B C), *una compresión isotérmica* (C D) y una *compresión adiabática* (D A). (Obsérvese que los ciclos de las máquinas reales *tienden* a aproximarse todo lo posible a un ciclo de Carnot). Llamando Q_1 a la cantidad de calor entregada por la fuente caliente (de temperatura T_1), y Q_2 a la cantidad de calor entregado a la fuente fría (de temperatura T_2), se puede demostrar * que dichas cantidades de calor son proporcionales a las temperaturas absolutas, o sea:

* Se omite la demostración, por considerar que está fuera del nivel de este texto.

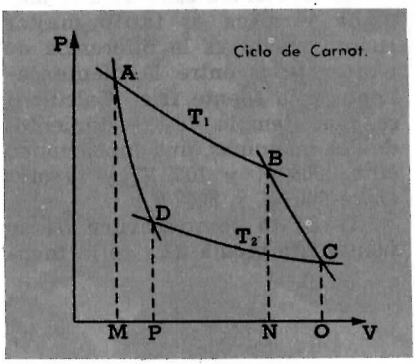
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \therefore \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

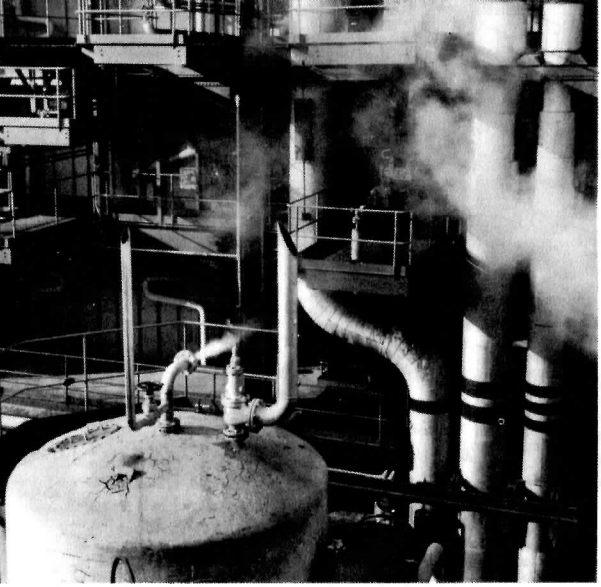
Como $Q_1 - Q_2$, es justamente el calor que se ha convertido en trabajo durante el ciclo, y Q_1 es la cantidad de calor entregada por la fuente caliente, resulta que el cociente $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ es el rendimiento del ciclo:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

O sea:

El rendimiento de un ciclo de Carnot sólo depende de las temperaturas absolutas de las fuentes.





Ninguna máquina térmica tiene un rendimiento del 100 %.

EJ.: *Calcular el rendimiento de un ciclo de Carnot que trabaja entre 1 000° K y 500° K.*

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{1\,000^\circ\,K - 500^\circ\,K}{1\,000^\circ\,K} = \frac{1}{2}\ ;\ \eta = 50\ \%.$$

Como en el ciclo de Carnot no existen pérdidas, la mitad del calor va a la fuente fría, que, por lo tanto, irá calentándose a medida que la máquina trabaja.

Consecuencias

1) El rendimiento de una máquina térmica es tanto mayor cuanto mayor es la diferencia de temperaturas entre la fuente caliente y la fuente fría. Calcúlense, por ejemplo, los rendimientos de dos máquinas, una funcionando entre 800° K y 100° K, y la otra entre 600° K y 300° K.

2) Si la temperatura de la fuente fría iguala a la de la fuente caliente, la máquina no puede funcionar ($\eta = 0$). En la máquina de vapor es tan importante calentar la caldera como enfriar el condensador.

3) El rendimiento de cualquier máquina real funcionando entre las mismas temperaturas es inferior a $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

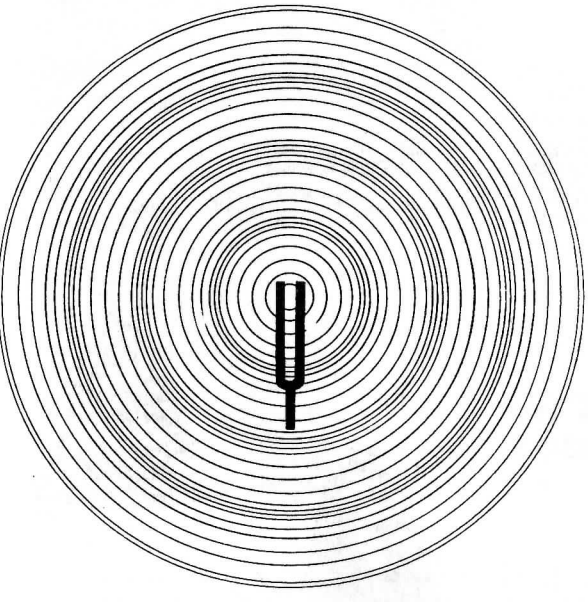
4) Para que el rendimiento de una máquina de Carnot fuera del 100 %, no debería haber fuente fría, o si no, $T_2 = 0^\circ$ K.

5) La fórmula del rendimiento permite comprender por qué no es posible que existan temperaturas absolutas negativas. En efecto:

Si T_2 fuera negativa,

$$\eta = \frac{T_1 - (-T_2)}{T_1} = \frac{T_1 + T_2}{T_1} > 1,$$

con lo cual el rendimiento de una máquina de Carnot que funcionara entre esas fuentes, superaría al 100 %, lo cual es imposible, por el Principio de Conservación de la Energía.



VIII

ACÚSTICA

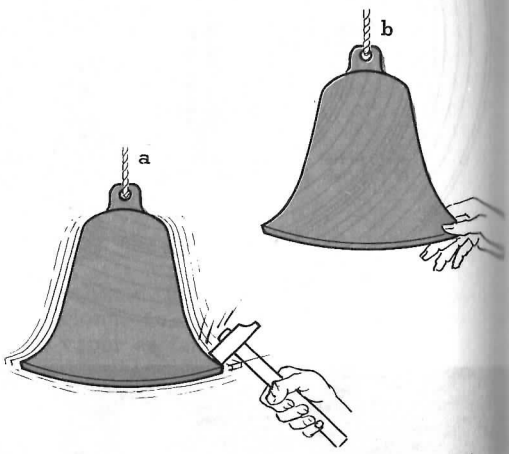
34 EL SONIDO

¿Qué es el sonido?

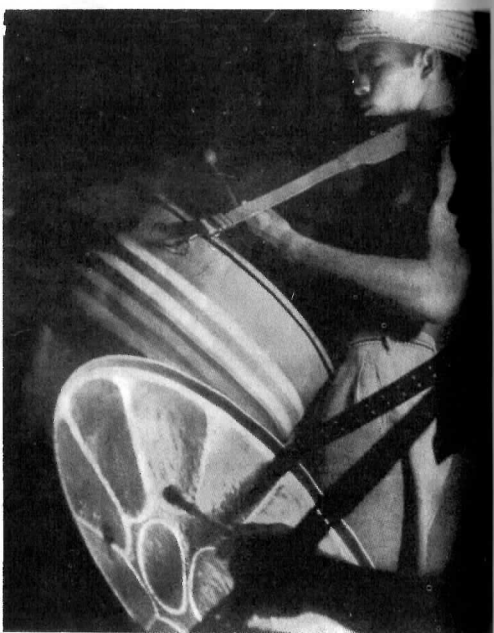
Todos tenemos una idea de lo que se llama *sonido*, puesto que a menudo hablamos del "sonido de un piano", del "sonido de una campana", etc. El sonido es un fenómeno físico percibido por el oído. Pero, ¿cómo se produce? ¿Qué lo produce? ¿Cómo se propaga?

Por lo pronto, si escuchamos un sonido pensamos que debe haber algo que lo produce. Ese algo es relativamente fácil de encontrar. Si oímos el sonido de una campana, sabemos que él proviene de un golpe dado a la misma. Ese golpe hace *vibrar* la masa metálica, cosa que podemos comprobar si acercamos un dedo y la tocamos con suavidad: sentimos un cosquilleo, que indica una rápida vibración.

¿Qué pasa si apoyando fuertemente nuestra mano impedimos que la campana siga vibrando? Todos hemos hecho alguna vez esa



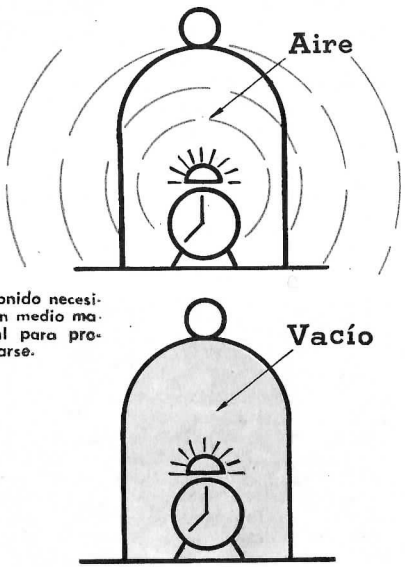
El sonido es producido por un movimiento vibratorio.



Con instrumentos musicales construidos con tambores vacíos de petróleo, estos hawaianos consiguen tonos tan suaves como los del xilofón o la guitarra hawaiana.

Al hacerlas vibrar, las cuerdas del violín producen sonido.

experiencia y conocemos el resultado: el sonido se apaga rápidamente. Es decir, *parece que el sonido es causado por la vibración*, puesto que *terminada la vibración, el sonido se apaga.*



El sonido necesita un medio material para propagarse.

Pensemos en otros casos, para ver si podemos confirmar esta sospecha. ¿Cuándo se produce un sonido en un piano? Cuando apretando una tecla hacemos que el pequeño martillo golpee la cuerda y la haga vibrar. Del mismo modo, para hacer sonar una cuerda de guitarra o de violín hay que hacerla vibrar. En todos los casos llegaríamos a la misma conclusión:

El sonido es producido por un movimiento vibratorio.

Para transmitirse, el sonido necesita siempre un medio elástico sólido, líquido o gaseoso:

En el vacío, las ondas sonoras no se propagan.

Si hacemos funcionar un timbre eléctrico o un despertador dentro de una campana de vidrio, se produce un sonido que se propaga por el aire encerrado en la campana, hasta alcanzar el vidrio; luego se transmite a través de éste y llega al aire exterior, y a nuestros oídos.

Si hacemos el vacío dentro de la campana, no hay aire que propague el sonido desde el timbre hasta el vidrio, y a pesar de que vemos al martillo golpeando en la campanilla, no oímos nada.

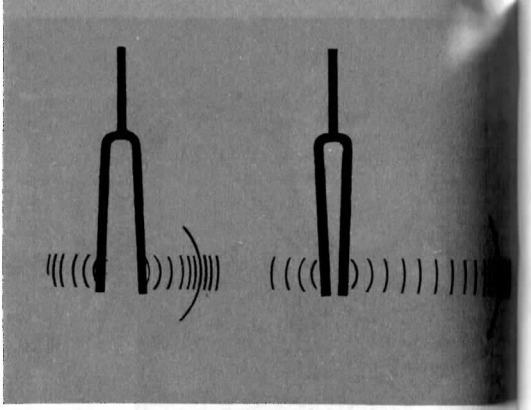
Los líquidos transmiten el sonido

Un nadador puede oír debajo del agua el golpe de dos piedras, o el ruido del motor de un barco, o bien la conversación de dos personas.

Los sólidos transmiten el sonido

Aplicando el oído sobre las vías del ferrocarril, puede escucharse la marcha de un tren distante. El oído aplicado al suelo percibe el galope del caballo que aún no se alcanza a divisar.

Los chicos suelen jugar con un "teléfono" construido con un piolín tenso entre dos cajitas de lata: el piolín transmite el sonido, con lo cual puede sostenerse una conversación entre dos puntos alejados.



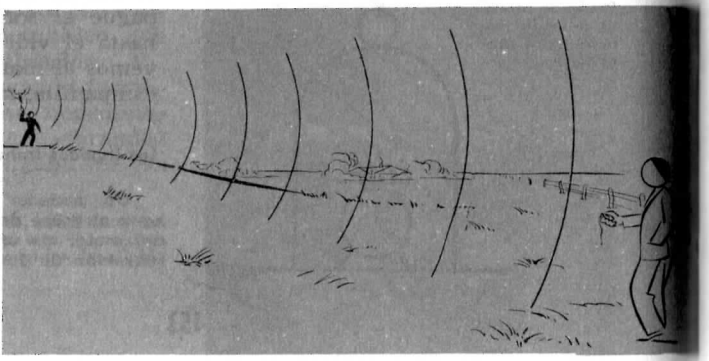
El sonido se propaga a través del agua.

Velocidad de propagación

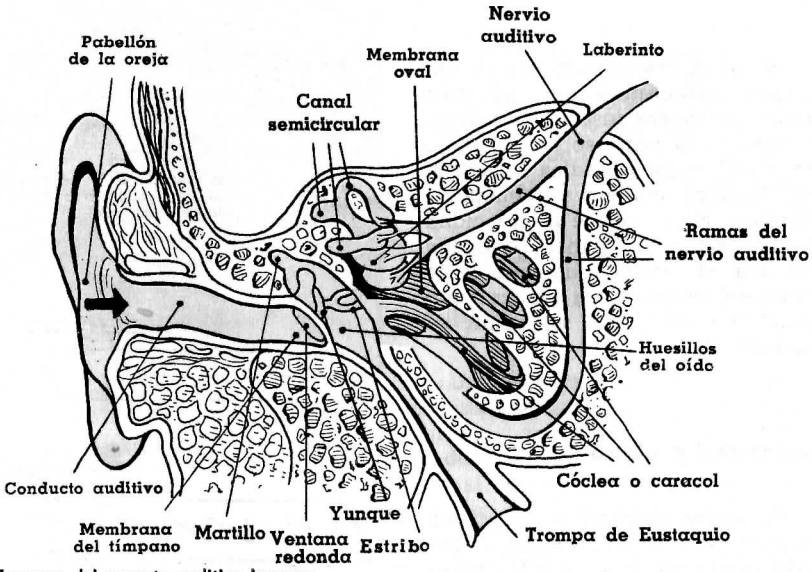
Para medir la velocidad de propagación del sonido, se sitúan dos observadores, separados por una distancia conocida. El observador A hace un disparo. El observador B, al ver el fogonazo, pone en marcha un cronómetro, y en el instante de oír el ruido del disparo detiene la marcha del mismo. El cronómetro señala el tiempo transcurrido entre la producción del sonido en A y su llegada a B.

Recordando que una velocidad se obtiene dividiendo una distancia por el tiempo empleado en recorrerla, $v = \frac{d}{t}$, basta reemplazar los datos y se obtiene la velocidad del sonido, que en el aire es de aproximadamente 340 m/s.

Joven escuchando sonido con el oído pegado a la mesa.



Cómo medir la velocidad del sonido.



Esquema del aparato auditivo humano.

Velocidad en el agua y en los sólidos

La velocidad del sonido en el agua dulce es de 1 435 m/s; en el agua de mar, 1 500 m/s.

En el latón es unas 10 veces la velocidad en el aire, y en el hierro, unas 15 veces.

EJEMPLO: *A los 6 segundos de ver un relámpago se oye el trueno. Calcular a qué distancia se produjo.*

$$d = v\,t = 340 \text{ m/s} \cdot 6^{\text{s}} \cong 2\,000 \text{ m}$$

Cómo oímos

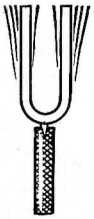
Las ondas sonoras penetran en el oído por el canal auditivo, que mide unos 25 mm, y al llegar a su extremo chocan con el tímpano, que es una membrana delgadísima (de aproximadamente 0,000 1 m), sujeta muy tensamente por los huesos del cráneo. Es como el parche de un tambor, y a ello debe su nombre. Al llegar la onda sonora, el tímpano vibra, y esta vibración se propaga hacia adentro, mediante los huesecillos del oído, el primero de los cuales está apoyado en el tímpano y el último en la ventana oval, por donde la vibración pasa al laberinto.

No se sabe con certeza cómo es que oímos, pero en el laberinto hay una multitud de nerviecitos, que parecerían funcionar como las cuerdas de un piano: cada uno de ellos es sensible a un cierto sonido, y cuando es excitado, envía la sensación al cerebro, el que elaborando todas las sensaciones recibidas, nos las hace percibir como sonidos.

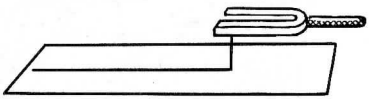
Característica de un sonido

Hay un aparato sumamente sencillo que nos permitirá averiguar bastante acerca de los sonidos: es el *diapasón*. Cuando se lo golpea entra en vibración, produciendo un sonido que llama la atención, y ya veremos por qué.

Si en el extremo de una de sus ramas colocamos una pequeña aguja, podremos inscribir el movimiento de la rama sobre una hoja de papel, como lo indica la figura. Se obtendrá una curva llamada *sinusoide*. Si se conoce la velocidad de traslación del papel, se puede calcular el tiempo que emplea la ramá del diapasón en realizar una oscilación completa, es decir, el período T.



Las vibraciones de un diapasón pueden inscribirse en una faja de papel.

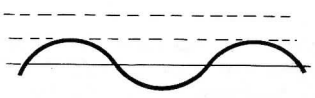


Intensidad y altura

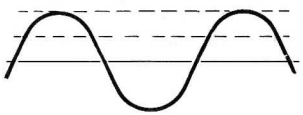
Si ahora golpeamos el mismo diapasón con mayor fuerza, el sonido producido sólo se diferenciará del anterior en que es más intenso. ¿Cómo se refleja en la sinusoide esa mayor intensidad? Simplemente, la amplitud de la sinusoide es ahora mayor, pues es mayor la amplitud del movimiento vibratorio:

A mayor amplitud, sonido más intenso.

Tomemos ahora dos diapasones que produzcan sonidos diferentes, y observemos las sinusoides que inscriben, para ver la diferencia. Para simplificar, hagamos que los dos sonidos tengan la misma intensidad.

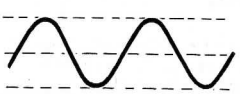


A mayor amplitud de la vibración, mayor intensidad del sonido.

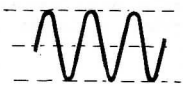


Observaremos que las dós sinusoides tienen la misma amplitud, pero el sonido más alto ha inscripto una sinusoide más apretada, es decir, que el sonido de mayor altura tiene un período menor. Como en acústica se habla de la frecuencia más que del período, diremos (recordando que la frecuencia es la inversa del período):

A mayor frecuencia, sonido más alto (o más agudo).



A mayor frecuencia (menor longitud de onda), mayor altura del sonido o sea sonido más agudo.

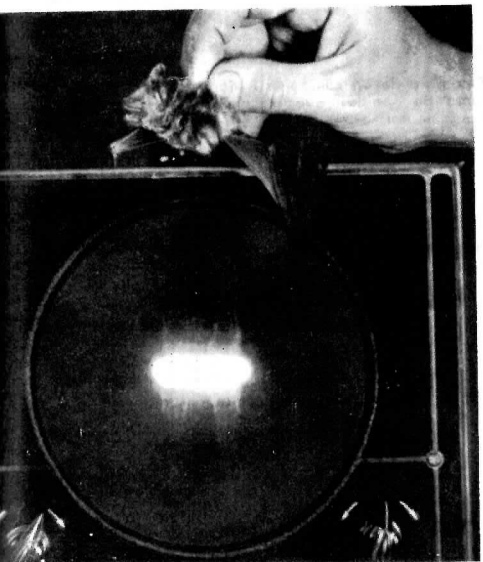


Un "hombre rana" puede oír debajo del agua el ruido del motor de un barco.

El diapasón emite un sonido puro

En la hoja de papel en donde el diapasón inscribe su movimiento, se observa una sinusoide perfecta. Ello revela que el sonido

Fotografía de la voz de un murciélago. Una persona no oye sus chillidos, pero el oscilógrafo los revela.



que produce el diapasón es un sonido puro, es decir, que no está mezclado con otros. En general, no estamos acostumbrados a escuchar sonidos puros, y por eso nos sorprende el sonido de un diapasón. Los instrumentos musicales no emiten sonidos puros, sino que cada nota es un conjunto de sonidos producidos simultáneamente.

El timbre

Una misma nota musical, producida por un piano y por un violín no suena igual. La diferencia se debe a que el sonido fundamental, si bien se halla presente en los dos casos, está acompañado de otros, distintos en cada caso, ya sea en intensidad, ya sea en frecuencia. El conjunto de sonidos que acompañan al fundamental es lo que da el *timbre*.

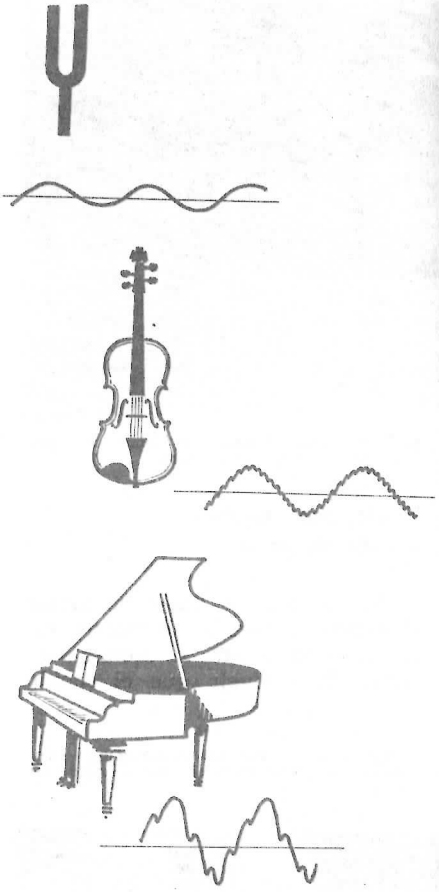
Por el timbre reconocemos la voz de una persona, de un cantante, por ejemplo, aun cuando otros produzcan las mismas notas con la misma intensidad y con la misma frecuencia.

Gama de los sonidos perceptibles por el oído humano

El oído humano sólo puede percibir los sonidos comprendidos entre ciertos límites de frecuencia. Fuera de ellos, el oído permanece *sordo*. El límite inferior está entre las 16 y 20 vibraciones por segundo. Es decir, el sonido más grave que se puede oír está comprendido entre dichas frecuencias. El límite superior, muy variable de una persona a otra, se puede colocar en 20 000 oscilaciones por segundo. Más allá de dicha frecuencia no se percibe ya sonido alguno. Sin embargo, sonidos de frecuencia superior a aquella que el oído humano es capaz de percibir, son captados por animales como el perro.

Es muy curioso lo que pasa con los murciélagos. Mucho antes que el hombre inventase el vuelo a ciegas, los murciélagos lo realizaban con extrema eficiencia. Se ha comprobado que, en efecto, estos mamíferos voladores son capaces de volar en cuartos absolutamente privados de luz. Al comienzo se creyó que podían tener ojos superdotados para las mayores oscuridades, pero una experiencia demostró que esta hipótesis no era correcta: se taparon con tela adhesiva los ojos de algunos murciélagos y se los soltó en habitaciones llenas de obstáculos. Los animalitos volaron sin dificultad.

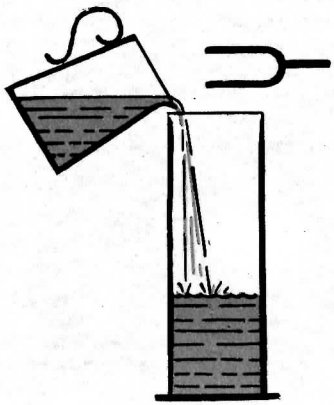
Entonces se pensó que quizá tuviesen un oído extremadamente fino. Y, en efecto, así era, pues cuando se los soltó con los oídos tapados, perdieron su facultad de volar sin tropezar en la oscuridad. Los físicos averiguaron enseguida cuál era el mecanismo de estos pilotos nocturnos. Micrófonos especiales revelaron que, durante el vuelo, emitían gritos agudísimos, inaudibles para el hombre, pues llegaban a las 50 000 vibraciones por segundo. Estos ultrasonidos emitidos por los murciélagos, se propagan a unos 340 m/s en torno del animal; al llegar a un obstáculo cualquiera, las ondas son reflejadas y vuelven hacia el murciélago, que se informa así de los obstáculos que tiene delante. Como se ve, un verdadero *radar* sonoro.



El timbre de un sonido está dado por el conjunto de sonidos que acompañan al sonido fundamental.

Resonancia

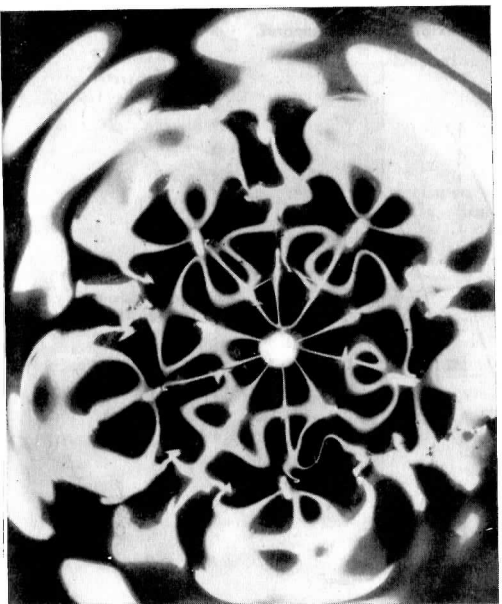
Si hacemos vibrar un diapasón y lo colocamos frente a la boca de un tubo con agua, cuando la columna alcanza cierta altura el sonido se hace más intenso. Esto se debe a que la columna de aire del tubo se pone a vibrar, y sus oscilaciones, de frecuencia igual a la del diapasón, refuerzan las de éste, aumentando su intensidad. La columna de aire del tubo vibra por resonancia.



El sonido del diapasón se ve reforzado al alcanzar el agua un determinado nivel.

Figuras a la vez curiosas y hermosas formadas por vibraciones de una superficie de glicerina.

La frecuencia es mayor en la que tiene menor trama (arriba). Es muy útil estudiar las ondas en superficies líquidas.



Los diapasones llevan cajas de dimensiones adecuadas, de modo que cuando los hacemos vibrar, la columna de aire de la caja vibra por resonancia, y el sonido producido es así mucho más intenso.

Con el piano es sencillo realizar una experiencia de resonancia: se pisa una tecla, por ejemplo la correspondiente a la nota do, tan lentamente que el martillo no alcance a golpear la cuerda, y se la mantiene apretada; luego se van tocando otras notas, cada una con un golpe seco. Se observará que cuando se tocan ciertas notas, aquella cuya tecla tenemos apretada comienza a sonar, sin que la hayamos tocado. El sonido es máximo cuando tocamos los otros does.

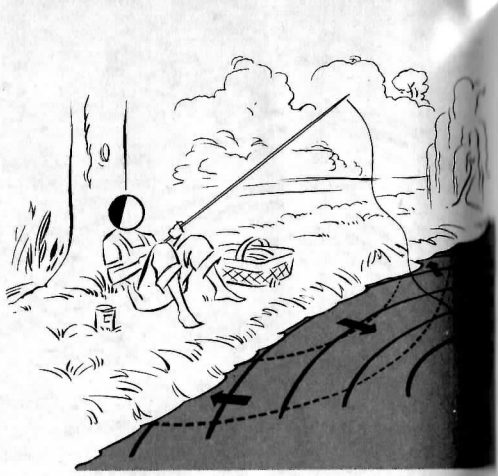
El fenómeno de resonancia no sólo se produce con ondas sonoras, sino con toda clase de vibraciones. Cuando una tropa de soldados marcha sobre un puente, se les hace "romper el paso" para evitar que la frecuencia del movimiento rítmico de la tropa pueda coincidir con la frecuencia de la vibración propia del puente. Cuando ello ha ocurrido, los efectos siempre han sido terribles: al entrar en "resonancia" el puente, vibra con frecuencia doble a la propia y se destruye.

En resumen: un cuerpo vibra por resonancia cuando a él llegan vibraciones de frecuencia igual a la propia de vibración del cuerpo.

Reflexión del sonido

Si arrojamos una piedra en un estanque, se producen ondas que se propagan; al llegar a las pare-

des se reflejan y vuelven en sentido contrario. De un modo semejante, las ondas sonoras se reflejan cuando encuentran una superficie dura en su camino. Colocando un reloj en el fondo de un tubo, sobre objetos blandos, no puede escucharse su marcha a cierta distancia del mismo. Si en la boca del tubo colocamos un plano como indica la figura, el sonido se reflejará en él y podrá ser escuchado.

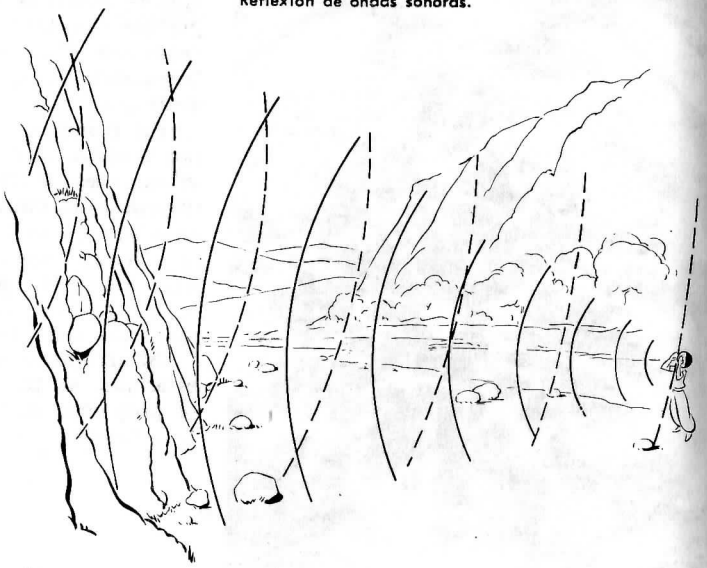


Reflexión de ondas en el agua.

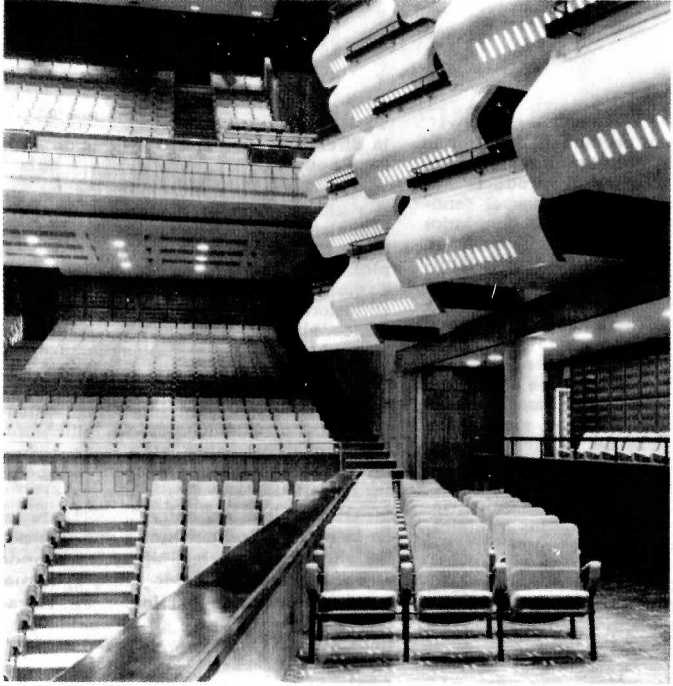
Eco

Una persona que emita un grito a cierta distancia de una pared, vuelve a percibir el mismo instantes después. Esto se debe al *eco*, que es la repetición de un sonido causada por su reflexión. Al emitir un sonido en las montañas, sobre todo en ciertos lugares se escucha el eco no una, sino varias veces, por las sucesivas reflexiones en las laderas.

Reflexión de ondas sonoras.



El eco es debido a la reflexión del sonido.

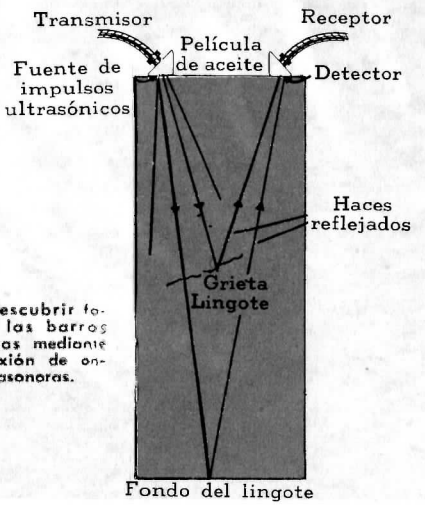


Sala del Royal Festival Hall, Londres.

Absorción del sonido

Si arrojamos una pelota contra el suelo duro, rebota. El suelo devuelve el golpe. En cambio, si arrojamos la pelota sobre una cama ésta absorbe el golpe, y la pelota no rebota, no se refleja.

Lo mismo ocurre con las ondas sonoras. Si encuentran superficies duras, se reflejan en ellas; si encuentran cortinas o materiales a prueba de sonidos, son absorbidas. La propiedad de ciertas sustancias a prueba de sonidos es aprovechada en los teatros y cines modernos para evitar la reverberación o producción de ecos múltiples.



Cómo descubrir fallas en las barras metálicas mediante la reflexión de ondas ultrasonoras.

Las ondas ultrasónicas

Las ondas ultrasónicas tienen muchísimas aplicaciones prácticas. Ya en la guerra del 14 se las empleó para descubrir la presencia de submarinos. Se las aplica también en la determinación del lugar preciso donde está un barco hundido, en la medición de profundida-

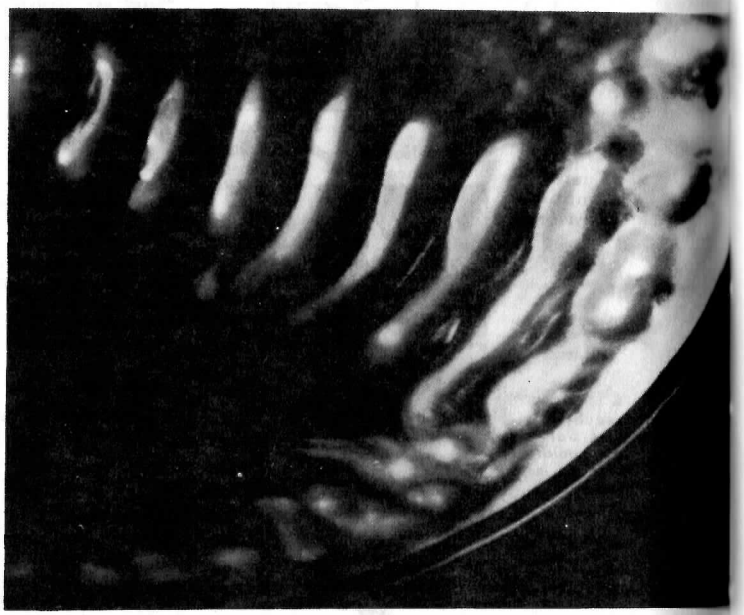
des, en ubicar un cardumen, resultando así un excelente auxiliar para la pesca.

Uno de los medios de producir ondas ultrasónicas es aprovechar el fenómeno piezoeléctrico: cuando los lados opuestos de una lámina de cuarzo están sometidos a un voltaje eléctrico, la lámina se contrae o se dilata levemente. Si se aplica un voltaje alternado, la lámina se dilatará y contraerá tantas veces por segundo como cambie el voltaje, y así entrará en vibración. Se comprende, entonces, que si se aplica un voltaje alternado, de unas 10 000 vibraciones por segundo, se escuchará un zumbido; pero si se aumenta el número de vibraciones, por ejemplo a 60 000 por segundo, se habrá producido un ultrasonido.

Se los utiliza mucho en la industria, para descubrir fallas en los metales. Al efecto, se produce una onda ultrasónica, que se transmite a través del metal, hasta llegar a la cara opuesta, donde se refleja y es captada por el detector. Si en el camino encuentra una falla, la onda se refleja en ella, y el eco llega al detector, donde se aprecia la diferencia, por el eco producido en la cara opuesta.

Otras de las aplicaciones de las ondas ultrasonoras es la de matar microorganismos: al enfocar sobre ellos un haz ultrasónico, los hace entrar en rapidísima vibración, con lo cual mueren. También se las utiliza para fabricar emulsiones. Por ejemplo, un haz ultrasónico elimina la superficie de separación entre el aceite y el agua, a causa de la rápida vibración, formando una emulsión de gotas pequeñísimas. También se ha experimentado con el calentamiento producido por los ultrasonidos: un ratón sobre el que se enfocó un haz, llegó a aumentar su temperatura hasta los 113° C.

Otra aplicación muy importante es en la eliminación del humo que sale por las chimeneas de las fábricas. Cuando el haz ultrasónico incide sobre el humo, las pequeñísimas partículas en vibración se agrupan entre sí, formando partículas más grandes, que caen rápidamente.



Superficie de fuel oil sometida a vibraciones supersónicas en los laboratorios de Esso.

INDICE TEMÁTICO

Acción y reacción, principio de 166
– en las rotaciones 189
– – principio de 190
aceleración 94, 120
– angular 138
– – representación vectorial 139
– – significado físico 139
– – y momento de inercia 185
– centrípeta 136
– de la gravedad 108
– – y cuerpo que la produce 254
– – y rotación de la Tierra 178
– – debida a los astros 253
– magnitud vectorial 120
– significado físico 95
– unidades de 94
adiabática 428
agua, densidad a distintas temperaturas 354
– dilatación irregular 352
– máxima densidad 353
– temperatura de ebullición según la presión 401
aire, peso 46
álabes 441
ángulo de ataque 333
– negativo 333
– nulo 333
– positivo 333
ángulo descripto en movimiento circular uniforme 135
Angstrom 8
aparejo potencial 295
– multiplicación del 295
– trabajo con 296
área, significado físico 88
Arquímedes, principio de 35
atmósfera 55
– altura de la 55
– conquista de la 59
– constitución de la 56
– peso de la 56
autoencendido 437
avión, fuerza sustentadora 331
– resistencia al avance 334
– – de perfil 334
– – de rozamiento 334
– – inducida 334
– vuelo 329
Avogadro-Ampère, ley de 361

Balanza 289
– de precisión 290
Banki, experiencia de 315
barógrafo 54
– aneroide 55
barómetro 54
– de Bourdón 54
– de cubeta 54
– de Fortin 54
batiscafo "Trieste" 40
Bernouilli, teorema de 317
bomba, difusora de aceite 71
– mecánica 71
Boyle-Mariotte, ley de 63, 396
– representación gráfica 65
Boyle, ley de 65

Caballo, potencia de un 272
caída de los cuerpos 104
– – experiencia de Galileo 106
– – fórmulas 109
– en el vacío 108
caldera 426
calor 386
– cantidad de 367
– conducción del 374
– – ley de 376
– de fusión 390, 392
– de vaporización 405, 406
– efectos del 340, 341
– específico 365, 367, 371
– – a presión constante 371
– – a volumen constante 371
– – de los gases 370, 418
– – medición del 369
– naturaleza del 383, 386
– teoría cinética del 388
– teoría mecánica del 388
– transformación del trabajo en 383
– transmisión por conducción 374
– – por convección 373

– – por radiación 378
– unidad de 386
– y energía 384
– y temperatura 339
– y trabajo mecánico 383
calor específico, tabla de 367
caloría, unidad de calor 364
calorimetría 364
calorímetro de las mezclas 369
cambios de estado 389
campo gravitatorio 262
– intensidad del 263
cantidad de movimiento 171
– angular, principio de conservación de la 193
– composición de 173
– conservación de la 172
– de rotación 191
capilar, tubo 319
capilaridad 325
– atracción de láminas paralelas 326
Carnot, ciclo de 448
caudal de una corriente 312
Celsius, escala 342
centro de gravedad 147
– determinación experimental del 229
cero absoluto (0° K) 356
– lucha por el 413
ciclo, de una máquina térmica 427
– de motor a explosión 434, 438
– de motor Diésel 438
– – ideal 439
– – real 439
– ideal de la máquina de vapor 428
– perfecto 448
– representación del 438
cigueñal 427, 433
cinemática 74
coeficiente de dilatación a presión constante 356
– a volumen constante 356
– de dilatación de gases a presión constante 355
– de dilatación de sustancias 350
– de dilatación lineal 349
color y temperatura 347
composición de movimientos 115
– de velocidades 120
compresores 70
condensación 389
condensador 426, 445
conductibilidad, coeficiente de 377
continuidad, ecuación de la 313
cuerpo, deformable 232
– que flota 36
– rígido 214
cupla 180, 194, 229
– momento de una 181, 216
– representación vectorial de una 182
cuplas concurrentes 221

Densidad 163
– de gases, variación de la 360
– medida de una 164
– unidades de 163
– y peso específico 163
densímetro 39
descomposición de una velocidad 124
diapasón 457
Diésel, motor 437
dilatación 348
– aparente de los líquidos 352
– de los cuerpos 348
– de los gases 354
– – a presión constante 354
– – a volumen constante 355
– de los líquidos 352
– – verdadera 352
– de los sólidos 348
– del tiempo 207
– fórmula de la 350
– irregular del agua 352
– lineal 348
— coeficientes de 350
— aplicaciones 351
— coeficiente de 349
— dependencia de la longitud 349
— dependencia de la temperatura 348
— dependencia del material 349
— factores que intervienen en la 348
dina, unidad de fuerza 161
dináma 142
– de los fluidos 311

Ebullición 395
– leyes de la 404
eco 460
ecuación, de la continuidad 313
– de los gases 359
– general de estado de los gases 361
empuje hacia arriba 34
energía 266, 274
– calórica de máquina de vapor 427
– cinética 275
– – de rotación 278
– – y potencial 274
– conservación de la 301, 303, 386, 432
– de un cuerpo 275
– en reposo 211
– fórmulas de la 275
– interna 420
– – variación de un ciclo 433
– potencial 275
– y masa 210
engranaje 291
– multiplicación del 292
equilibrio, condición general de 214
– de un cuerpo suspendido 229
– de un cuerpo apoyado 231
– inestable 399
– líquidos en 10
– líquido-vapor, curva de 399
– sólido-vapor, curva de 410
erg, unidad de trabajo 270, 271
escala absoluta o de Kelvin 345
– Celsius 342
– Fahrenheit 343
espectro aerodinámico 331
– laminar 331
– turbulento 331
estado higrométrico 407
estática 213
estratosfera 55, 56
evaporación 394
– calor de 406
– velocidad de 407
evaporador 445
exosfera 55
expansión 428, 435
– de los gases 63
experiencia, de Alcalde 51
– de Foucault 243
– de Joule 384
– de Michelson y Morley 201
– de Torricelli 48
– de Pascal 51

Fenómenos físicos 2
física 1
– magnitudes de la 6
fluidos 57
freno de aire 70
freón 445
fuerza 11, 146, 174
– cálculo de 158
– característica de una 13
– centrífuga 175, 178
– centrípeta 175, 178
– de atracción terrestre 258
– descomposición de una 222
– equivalencias entre unidades de 162
– impulsora 334
– medida de una 13
– representación de una 15
– sustentadora 331, 333
– – valor de 334
– unidades de 6, 12, 13, 160, 161
– y presión 11
– recorrido 22
fuerzas concurrentes, composición 219
– en el vuelo de un avión 333
– paralelas y del mismo sentido, composición 224
– – y de sentido contrario, composición 228
fusión 389
– franca 394
– pastosa 394
– punto de 390
– temperatura de 390

Galileo Galilei 112
– transformación de 203
gas, permanente 413
– licuación del 412
– y vapor 410
gases, calor específico de los 370
– compresión de los 63
– ecuación de los 359
– ecuación general de los 361

– en reposo 44
– expansión de los 63
– peso de los 45
– pesos específicos 41
– variación de la densidad de los 360
Gay-Lussac, primera ley 357
– segunda ley 358
gravedad, aceleración de la 108
– cálculo de 243
– variación de 178, 252
gravitación universal 251
– constante de 256
– ley de 257
– medición de la constante 257

Heladera de fuego 446
heladera eléctrica, corte de una 446
helio I y helio II 413
hemisferios de Magdeburgo 51
Herschel, descubrimiento de 379
hidrodinámica, ley fundamental de la 317
hidrostática 10
– ley fundamental 30
hielo, densidad del 354
– seco 409
higrómetro 408
– de Daniell 408
hipsómetro 403
Hooke, ley de 232
horse power 272
humedad relativa 407
– medición de la 408

Impulso, angular 191
– de rotación 191
– de una fuerza 171
– y cantidad de movimiento 171
independencia de los movimientos, principio de la 118
indicador 428
inercia 143
– en las rotaciones 183
– experiencias 149
– principio de 147
ingravidez 260
instalación frigorífica, esquema de una 446
interferencia luminosa 326
ionosfera 55, 56
isobáricos 416
isotermas 66, 411

Joule, experiencia de 384
Joule, idea del 271
Joule, unidad de calor 386
– unidad M.K.S. de trabajo 270

Kelvin, escala de 345
Képler, leyes de 261
kilocaloría 365
kilográmetro 268
– por segundo 271
kilogramo-fuerza 6, 12, 153
kilogramo-masa 153
– y la unidad técnica de masa 153
kilowatt-hora 273

Líquido y gas, diferencia entre 57
líquido y vapor en el punto crítico 412
líquidos en equilibrio 10
– pesos específicos 41
litro-atmósfera, unidad de trabajo 417
longitud, contracción de la 204
Lorentz, contracción de 206
– transformación de 204, 206

Mach, número de 337
magnitud escalar 15
– vectorial 14
manómetro 66
– abierto 66
– cerrado 67
– empleo del 313, 314
– en una cañería 313
– metálico 68
máquina, de vapor 425
– – energía calórica 427
– – transformación de la energía 427
– rendimiento de una 307
– simple 283
– térmica 425
– – refrigeradora 445
– – rendimiento 429
– – trabajo realizado 429
– – tiempos de la 427

– – de combustión externa 425
– – de combustión interna 425
– – limitación del rendimiento 429
– – rendimiento de una 428
– y hombre 267
máquinas y trabajo 298
martillo de mercurio 413
masa, concepto 150
– definición 152, 158
– en reposo 211
– medición 150
– principio de 150, 156, 157
– unidad de 152
– variación de 210
– y energía 210
– y peso 154
medición, de fuerzas 12
– en física 5
medición 5
menisco, cóncavo 325
– convexo 325
mesosfera 55
metro 7
– múltiplos y submúltiplos 8
milibar, unidad de presión 50
mol 361
momento de inercia 184
– cálculo del 187
– de los sólidos 188
– de una cupla 181
– de una fuerza, con respecto a un eje 181
– – con respecto a un punto 182
– y aceleración angular 185
motor de explosión 433
– ciclo del 434
– comparación del motor Diésel con el 438
– corte del cilindro de un 433
– tiempos del 434
– rendimiento del 436
motor Diésel 437
– ciclo del 438
– funcionamiento del 438
– rendimiento del 440
movimiento 75
– compuesto 115
– continuo 301
– de los cuerpos 74, 75
– de los planetas 261
– de un proyectil 126
– de rotación 81
– de traslación 81
– definición de 80
– del péndulo 235
– estacionario 313
– circular 130
– – frecuencia del 136
– – uniformemente variado 138
– – variado 138
– circular uniforme 130
– – período del 130
– – y movimiento armónico 244
– oscilatorio 235
– – oscilatorio armónico 244
– – concepto del 244
– – elementos del 245
– – representación gráfica 248
– pendular, fórmula del 241
– rectilíneo uniforme 82
– rectilíneo uniformemente variado 93, 94
– relativo 78
– uniforme 82
– uniformemente variado 102
– variado 93
– vibratorio armónico y movimiento circular uniforme 246
– y reposo 78

Neptuno, descubrimiento 261
neumostática 44
newton, unidad de fuerza 160
– y kilogramo-fuerza 161

Olla de presión 404
ondas ultrasónicas 461

Palanca 283
– Arquímedes y la 285
– equilibrio de la 284
– movimiento de la 288
– multiplicación de la 285
– pesada 286
– trabajo de la 288
palancas, géneros de 287
palmer 9
paradoja hidrostática 29
Pascal, principio de 20
péndulo 235

– amplitud 235
– aplicaciones del 235
– compuesto 249
– elementos del 235
– energía del 304
– físico 249
– fórmula del 241
– invariabilidad del plano de oscilación 243
– leyes del 237
– oscilación del 236
– valor de "k" 241
período 130, 235
– y velocidad angular 134
peso 11, 151
peso específico 15
– del aire 45
– determinación del 38
– variación con la presión 69
– y densidad de la Tierra 164
– y temperatura 352
pesos específicos, tabla de 41
piñón 292
pirómetro 346
Pitot, tubo de 314
plano inclinado 296
– equilibrio en el 296
– multiplicación del 297
– trabajo con 297
– traslación y rotación 298
plato 292
poder calorífico 429
polea fija 292
– equilibrio de una 293
– multiplicación de la 294
polea móvil 294
– equilibrio de la 294
– multiplicación de la 294
– trabajo con 294
poleas, combinaciones de 295
polígono de las velocidades 124
potencia 271
– equivalencia entre unidades de 280
– unidades de 271
prensa hidráulica 21
presión 15
– atmosférica 46
– – valor de la 50
– contra la pared del recipiente 26
– crítica 399
– de los gases 355, 358
– de los vapores 395
– de saturación 397
– – curva de 397
– – del vapor de agua 397
– – variación con la temperatura 397
– efectos de la 17
– en el interior 24
– equivalencia entre las unidades de 61
– exterior y vaporización 402
– hidrodinámica 314
– hidrostática 24
– – valor de la 27
– medición de la 66
– oblicua 25
– sobre un fluido 57
– superficie de igual 26
– unidad de 16
– y volumen 63
principio 36
– de Arquímedes 35
– – demostración del 36
– – y los gases 57
– de inercia 147
– – en las rotaciones 184
– de la independencia de los movimientos 119
– de la termodinámica, primer 416
– – segundo 447
– de masa 150
– de Pascal 21
– – aplicaciones del 21
– – y gases 57
principios de la dinámica 195
problema de la corona 39
proceso isobárico 416
– representación gráfica del 417
punto, crítico 399, 412
– de fusión 392
– muerto inferior 435
– muerto superior 434
– triple 410

Radiación, transmisión por 378
– frecuencia 378
radián 133
radiosondas 60
rayos infrarrojos 379

– aplicaciones de los 380
referencia, sistema de 79
reflexión del sonido 459
refrigeradoras 445
refrigerador eléctrico a compresor 446
relatividad, teoría de la 199
reposo y movimiento 78
representación gráfica 85
– de la distancia en el movimiento rectilíneo uniforme 87
– de la distancia en el movimiento uniformemente variado 100
– de la ley de Boyle-Mariotte 65
– de la velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme 87
– de la velocidad de un movimiento rectilíneo uniformemente variado 96
– de la velocidad en el movimiento variado 93
resonancia 458
resultante 214
– de un sistema 214
– de vectores 214
roldana 293
rotación 81
– analogías entre traslación y 194
– principio de inercia para la 184
rotaciones y traslaciones, paralelismo entre 182
rotor 441
rozamiento, rendimiento máximo 307

Satélite artificial 263
saturación 397
– curva de presión 397
– presión de 397
sifón 71
sistema de fuerzas o de cuplas 213
– planetario, un viaje por el 251
sistema de unidades 162
sniperscope 381
snooperscope 381
sobrefusión 393
solidificación 389
sólidos, pesos específicos 41
sonido 452
– absorción del 461
– diapasón 457
– intensidad, altura 456
– velocidad (agua y sólidos) 455
– velocidad de propagación 454
Stevin, relación de 226
sublimación 389, 409
submarino 27, 38
superficie, unidades de 8

Temperatura 339, 389
– crítica 399
– de ebullición, de algunas sustancias 400
– – según la presión exterior 401
– de equilibrio 368
– de fusión 390
– final de una mezcla 368
– y el color 347
– y presión crítica de sustancias 399
tensión 232
– superficial, 321
– – efectos 323
– – propiedades 322
– – y capilaridad 319
termodinámica 416
– primer principio 419
– segundo principio 447
termometría 339
termométricas, sustancias 346
termómetro, 344
– clínico 344
– de mercurio 342
– eléctrico 346
– óptico 346
termoscopio 346
tiempo, unidad de 6
Tierra, rotación de la 243
timbre 457
– del sonido 454
tiro, problema del 125
toberas 441
torno 290
– multiplicación del 291
– trabajo con 291
Torricelli, experiencia de 48
trabajo, 279
– en las rotaciones 278

– hecho con máquinas 298
– mecánico 268
– mecánico y calor 383
– positivo y negativo 418
– potencia y energía 267
– realizado por un gas 416
– transformación en calor 383
– unidades de 268, 273
– y energía, equivalencia entre unidades 279
transformación 423
– adiabática 423
– isométrica 421
– isotérmica 422
traslación, 81
– movimiento de 81
– analogías con la rotación 194
trayectoria 80
troposfera 55
tubo 319
túneles aerodinámicos 331
turbina 440
– de gas 441
– de vapor 440
– rendimiento de una 443, 445

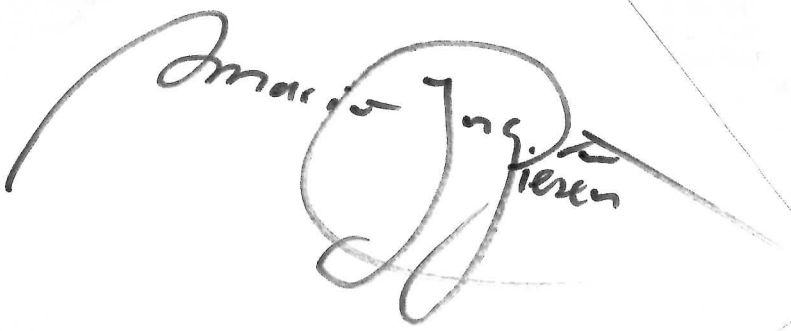
Unidad 50
– atmósfera (atm) 50
– caloría (cal) 364
– de tiempo (s) 6
– dina (dyn) 161
– erg 270
– horse power (H P) 272
– joule (J) 270, 386
– de longitud (m) 7
– kilowatt-hora (kWh) 273
– kilogramo-masa (kg) 153
– kilogramo-fuerza ($\vec{kg}$) 6, 12, 153
– kilográmetro (kgm) 268
– kilográmetro/segundo $\left(\frac{kgm}{s}\right)$ 271
– litro-atmósfera (lit. atm) 417
– metro (m) 7
– milibar 50
– mol 361
– newton (N) 160
– radián (rad) 133
– segundo (s) 6
– técnica de masa UT (m) 152
– watt (W) 272
unidades 364, 386
– de calor 364, 386
– de densidad 163
– de fuerza 6, 12, 160, 162
– de masa 152
– de potencia 271
– de presión 50
– de superficie 8
– de trabajo 268, 417
– de trabajo y energía 279
– de velocidad 82
– de volumen 8
– sistemas de 162

Vacío 70
vapor, 412
– en el punto crítico 412
– no saturado 397
– saturado 396
– – en presencia de gas 400
– y gas, diferencia entre 410
vapores, pesos específicos 41
vaporización 389, 394
– y presión exterior 402
vaporizador 316
vasos comunicantes 28
vector 15
vectores 218
– concurrentes 218
– recta de acción y sentidos 215, 217
velocidad 82, 90, 119
– angular 131
– – representación vectorial de la 132
– – unidades de 132
– – y período 134
– – de evaporación 407
– – de la luz 83
descomposición de una 124
– de un proyectil 174
– instantánea 101
– lineal 131
– lineal y angular 134
– media 93
– resultante de un movimiento compuesto 122

– significado físico 83
– tangencial y período 134
– unidades de 82
velocidades, 120
– composición de 120
– de vuelo 336
– polígono de las 123
– tabla de 83
velocímetro de fluidos 316
Venturi, tubo de 316
vernier 9
viento 55
viscosidad 319
volatilización 409
volumen, unidades de 8

Watt (W) 272

Ama
Agradece y
Perdona.



La EDITORIAL KAPELUSZ S.A. dio término a la decimoquinta tirada de la decima edición de esta obra, que consta de 3.000 ejemplares, en el mes de junio de 1986, en los Talleres Gráficos A.R.A. Editorial Impresora S.R.L., Pepirí 1452, Buenos Aires.

K — 20.377